This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

CRB
B/6T

CRB
B/ST

ORB

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

D'ASTRONOMIE PHYSIQUE.

V. ✓

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
RUE DU JARDINET, N° 12.

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

D'ASTRONOMIE PHYSIQUE,

Par J.-B. BIOT,

Membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes ; membre libre de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres ; professeur de Physique mathématique au Collége de France, et d'Astronomie à la Faculté des Sciences de Paris ; membre des Sociétés royales de Londres et d'Édimbourg ; de l'Académie impériale de Saint-Pétersbourg ; des Académies royales de Stockholm, Upsal, Turin, Munich, Lucques, Berlin, Naples, Messine, Catane et Palerme ; membre honoraire de l'Université de Wilna ; de l'Institution royale de Londres ; de la Société philosophique de Cambridge ; astronomique de Londres ; des Antiquaires d'Écosse ; littéraire et philosophique de Saint-Andrews ; de Manchester ; de la Société pour l'avancement des Sciences naturelles, de Marbourg ; de Halle ; de la Société helvétique des Sciences naturelles ; de la Société de Médecine d'Aberdeen ; de la Société italienne des Sciences résidante à Modène ; de l'Académie américaine des Sciences et Arts de Boston ; de la Société littéraire et historique de Quebec ; des Académies de Nancy, d'Arras, et de la Société philomatique de Paris.

Omnium rerum principia parva sunt,
sed suis progressionibus usa, augentur.
Cic., *de Fin.*, lib. V.

Troisième Édition, corrigée et augmentée.

TOME DEUXIÈME.

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK

PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE, ETC.,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.
1844

L|S

Tout exemplaire du présent ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature du libraire-éditeur, sera contrefait. Les mesures nécessaires sont prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

AVERTISSEMENT

RELATIF AU PRÉSENT VOLUME.

Conformément à ce que j'ai annoncé dans l'Avant-Propos du tome Ier, je commence par restreindre ici les formules générales du mouvement des rayons lumineux dans les systèmes optiques quelconques, au cas spécial des systèmes purement dioptriques, composés d'un nombre quelconque de lentilles sphériques, centrées sur un même axe, et environnées d'un même milieu ambiant, à réfraction simple. Le retour périodique de chaque rayon à une même vitesse, de deux en deux surfaces, permet alors de contracter les formules générales, de manière qu'elles se réduisent à un nombre de termes moitié moindres, pour un nombre total pareil de surfaces assemblées. Sous cette nouvelle forme, tous les effets d'un système dioptrique quelconque se trouvent encore uniquement dépendre de quatre coefficients principaux, liés entre eux par une équation de condition. Je ramène ces quatre coefficients, dans le cas général, comme dans le cas contracté, à dériver d'un seul d'entre eux par un simple procédé de différentiation; et j'expose ensuite une règle analytique générale, par laquelle on forme directement ce coefficient dont les trois autres

dérivent. La marche des rayons dans un système optique quelconque se trouve ainsi complétement déterminée par les expressions explicites des quatre coefficients principaux, où il n'y a plus que des nombres à substituer pour chaque système de constitution assignée. J'ai rassemblé ces résultats, relatifs aux systèmes purement dioptriques, dans un tableau qui exprime explicitement tous leurs effets, et dans lequel on peut introduire immédiatement toutes les conditions particulières auxquelles on veut les assujettir. Ce tableau est annexé à la page 25.

Je profite d'abord de ces expressions pour développer les conditions qui établiraient l'achromatisme rigoureux dans un objectif astronomique à deux lentilles. Comme on ne saurait les remplir complétement sans avoir à redouter une complication excessive, j'analyse, d'après leur forme, leurs effets physiques pour distinguer les plus influents, et connaître le degré d'approximation avec lequel il suffit d'y satisfaire. On voit alors, en premier lieu, qu'il y a beaucoup de danger à laisser entre les deux lentilles de crown et de flint un intervalle intérieur sensible, ce que les considérations physiques faisaient facilement pressentir. De sorte qu'il convient de rendre cet intervalle nul, ou presque nul, comme le faisait toujours Fraunhofer. Lorsque cette restriction est opérée, on découvre la possibilité d'établir entre les rayons des courbures certaines relations, qui, en laissant encore une très-grande liberté de choix pour la fixation de leurs valeurs, ont pour effet de rendre l'achromatisme stable, quand on l'aura établi approximativement;

c'est-à-dire qu'il se conservera sensiblement exact pour l'œil, quand même, dans l'exécution pratique, on s'écarterait quelque peu des valeurs précises que ces relations supposent aux rayons des courbures. Cette remarque faite, je combine les conditions de l'achromatisme approximatif avec celles qui détruisent le premier terme de l'aberration de sphéricité, pour former l'équation finale qui les compense simultanément; et comme elle laisse encore disponible le rapport des rayons de courbure des deux surfaces qui se regardent, j'en extrais les valeurs réelles de ce rapport qui se rapprochent, le plus possible, des relations précédemment trouvées pour la stabilité de la compensation. Je trouve ainsi qu'il est restreint dans des limites extrêmement étroites, depuis l'égalité des deux rayons qui mettrait la surface postérieure du crown en contact avec l'antérieure du flint, jusqu'à une très-petite différence de longueur, qui écarterait tant soit peu les bords des deux surfaces. Les combinaisons comprises entre ces deux limites sont donc les seules qu'il convient de choisir, et elles paraissent devoir être à peu près équivalentes pour la bonté des effets, quand on se borne ainsi à éteindre le premier terme des deux aberrations. Toutes donnent le flint concave à l'intérieur, et convexe extérieurement. C'est précisément la configuration que Fraunhofer avait adoptée, et qu'il a toujours combinée avec la nullité de l'intervalle des deux lentilles. Mais l'accord de la théorie analytique avec les combinaisons pratiques de ce grand artiste s'aperçoit bien plus intime encore, quand on le suit jusqu'aux nombres.

Car, en partant des mêmes données physiques qu'il avait employées pour la construction d'un objectif de ce genre, dont il a lui-même indiqué numériquement toutes les particularités, non-seulement il s'est trouvé compris dans les limites de relation assignées plus haut pour la stabilité de l'achromatisme, mais, en adoptant la proportion d'inégalité que Fraunhofer avait établie entre les rayons des surfaces qui se regardent, les rayons des quatre courbures, calculés par mes formules, ont été numériquement presque identiques avec les siens. On peut donc espérer qu'en suivant la marche que j'indique, on obtiendra directement, et à coup sûr, dans tous les cas semblables, les combinaisons de courbures sphériques qui s'appliqueront avec le plus d'avantage aux données physiques assignées pour l'exécution.

L'objectif étant ainsi complétement calculé, il faut pouvoir vérifier, par un calcul exact, si, en effet, les aberrations de sphéricité et d'achromatisme y sont suffisamment détruites, avec les combinaisons adoptées d'épaisseur et de courbure pour la grandeur d'ouverture efficace qu'on veut lui donner. J'expose pour cela une méthode de calcul trigonométrique, par laquelle on obtient rigoureusement les valeurs de ces aberrations dans les divers sens où elles s'exercent; et comme l'équation de condition qui en détruit les parties les plus sensibles, admet encore une légère inégalité dans les rayons des surfaces qui se regardent, on peut, en faisant varier cet élément par une gradation lente, reconnaître le sens ainsi que la grandeur des modifications qu'il faut y faire, pour rendre les

valeurs finales des aberrations insensibles, ou du moins aussi petites qu'elles peuvent le devenir. Par ces corrections définitives, on devra obtenir des courbures sphériques tout ce qu'elles pourront donner de meilleurs effets.

Après avoir développé cette importante application, je reprends les formules générales propres aux systèmes dioptriques, et je les emploie pour établir la théorie des oculaires appliqués aux objectifs achromatisés. Je les limite au cas usuel où les lentilles constituantes de ces appareils sont faites avec des verres de même nature, et j'en déduis les règles exactes de leur construction ainsi que toutes les particularités de leurs effets. J'applique ensuite les mêmes formules à l'analyse des lunettes de nuit employées comme chercheurs, à celle des lunettes de jour ou longues-vues, qui font voir les objets droits, et j'en déduis les meilleures conditions de leur construction. Je les emploie enfin à la discussion de l'héliomètre, devenu célèbre de nos jours par l'usage que M. Bessel a fait de celui qui a été construit par Fraunhofer pour l'observatoire de Kœnigsberg. J'en déduis l'expression rigoureuse de ses effets, ainsi que les modifications qu'ils doivent subir sous l'influence de températures diverses, considération essentielle pour apprécier le degré de justesse des mesures excessivement délicates qu'il est destiné à fournir. J'expose alors, concurremment, le procédé de duplication que M. Arago a imaginé pour mesurer les petits angles visuels célestes, et je le présente avec les derniers perfectionnements qu'il y a récemment apportés.

Je ne me dissimule pas qu'un exposé aussi étendu de la théorie des instruments optiques, pourra paraître trop en dehors d'un traité spécial d'astronomie pour que je dusse l'y insérer. Mais j'ai été contraint à cette nécessité, lorsque, voulant présenter une analyse succincte, mais exacte, des effets de ces instruments, et des principes d'après lesquels on peut les régler, les rectifier, apprécier leurs qualités ou leurs défauts, je me suis aperçu qu'après tant de travaux mathématiques faits sur ce sujet par les plus habiles géomètres, on ne possédait pas encore, même dans le cas des inflexions très-petites, une méthode analytique qui présentât les effets définitifs des systèmes optiques sphériques, sous une forme générale et explicite, où il n'y eût à substituer que des nombres pour en apprécier les résultats. De sorte qu'on était réduit à établir, pour chaque instrument, une discussion particulière, fondée sur des simplifications spéciales, dont le plus souvent on ne pouvait apprécier le degré d'exactitude, encore moins justifier la nécessité. Les seuls pas qu'on eût faits jusqu'à présent vers ce but, et qui sans l'avoir complétement atteint, faisaient du moins pressentir la possibilité d'y parvenir, c'étaient, je crois, les beaux théorèmes de Cotes, quelques inductions généralisées d'Euler, et surtout l'indication remarquable que Lagrange avait donnée, de l'emploi des différences finies, pour exprimer généralement les dérivations des effets produits par les surfaces successives. En suivant la voie que cet esprit lumineux avait ouverte, et la conduisant, peut-être plus pratiquement, à travers les sinuosités des circonstances physiques, dont les particularités étaient

étrangères à son génie, je suis parvenu à reconnaître, comme je l'ai dit plus haut, que, dans le cas des inflexions très-petites qu'il avait traité, et qui est le seul accessible, tous les effets des instruments d'optique quelconques résultent de trois coefficients indépendants, ayant chacun une signification physiquement saisissable, et pouvant être dérivés par la simple différentiation d'un seul d'entre eux, dont j'ai obtenu l'expression générale sous une forme explicite. Alors, tous les détails propres à chaque instrument se sont présentés comme des déductions de cette forme générale, avec tant de simplicité et d'évidence, que je n'ai pu me défendre de les présenter ainsi. Les géomètres qui voudront bien jeter les yeux sur la Table des matières, où j'énumère la série des questions que cette méthode m'a servi à résoudre, m'excuseront peut-être de l'avoir exposée dans un ouvrage qui en nécessitait du moins les résultats.

Ayant ainsi établi les détails des instruments d'optique, dont l'astronomie fait un continuel usage, j'explique les autres appareils de précision qui ne lui sont pas moins nécessaires, tels que les procédés qui servent à subdiviser les dimensions de l'étendue, les niveaux et les fils-à-plomb qui servent à régler l'horizontalité ou la verticalité des axes de rotation et des plans des limbes divisés, les horloges mécaniques qui servent à mesurer le temps. Ayant décrit les principes de ces appareils, et leur application, pour régler les instruments divisés, fixes ou mobiles, dont l'astronome fait usage, je les fais concourir dans l'étude du mouvement diurne du ciel, dont je démontre l'exacte

circularité et l'uniformité par des observations rigoureusement calculées. J'arrive ainsi à substituer ce mouvement aux horloges mécaniques, comme donnant une unité bien plus parfaite du temps et de ses subdivisions. Pour aller plus loin, en suivant le plan de déduction logique que je me suis prescrit, il aurait fallu aborder de nouvelles questions qui auraient donné trop d'étendue à ce volume, et je les ai rejetées dans le suivant. Alors, pour compléter celui-ci par des résultats dont les notions préparatoires s'y trouvaient déjà comprises, j'y ai joint comme addition l'exposé de la mesure du pendule à secondes par le procédé de Borda, et la discussion des expériences faites tant par ce procédé que par les pendules de comparaison, pour déterminer les lois suivant lesquelles la pesanteur varie, sur toute l'étendue du sphéroïde terrestre.

J'ai effectué seul les nombreux calculs numériques qui se trouvent rapportés dans ce volume et dans le précédent. Quoique je les aie faits avec soin, et la plupart plusieurs fois, je ne puis répondre qu'il ne me soit pas échappé des fautes de détail; mais le lecteur attentif, qui devra n'y voir que des exemples, trouvera lui-même sur sa route l'occasion de les corriger. Je devais redouter davantage les fautes qui auraient pu m'échapper dans les formules analytiques, à cause de l'influence générale qu'elles auraient pu avoir sur les applications. Mais une personne très-versée dans l'analyse, et très-habile à découvrir les erreurs des expressions qu'elle emploie, M. Yvon Villarceau, a bien voulu revoir attentivement les formules que ce

volume renferme, et m'indiquer les inexactitudes que l'impression y avait laissées. J'ai fait rectifier celles qui étaient réparables, et qui auraient pu faire le plus aisément illusion. J'indique ici, parmi les autres, celles qui, malgré leur évidence, pourraient arrêter un moment le lecteur; priant instamment qu'on veuille bien prendre soin de les corriger avant de lire l'ouvrage, surtout avant d'en faire des applications.

Pag.	Lig.		*au lieu de :*	*lisez :*
11	»	tableau en regard : titre de la deuxième colonne.....	plan des yz	plan des xz
13	13	.....	de P_i et de Q_i	de P_i et de R_i
20	13	.....	page 324	page 424
57	7	.....	P_2	δP_2
67	2	dernier terme de la formule, au dénominateur	$r_2 r_2$	$r_2 r'_2$
68	dernière	dernier terme de la formule	$\frac{h_1}{R}$	$\frac{h_1}{R_2}$
70	8	en remontant.....	r_1	r'_1
74	9	en remontant.....	$\frac{n_2 - 2}{R_2}$	$\frac{n_2 - 1}{R_2}$
90	4	en remontant : au dénominateur de la formule.....	$n + 2$	$n_1 + 2$
97	dernière	.....	du centre et des bords	du centre, des bords, et des parties intermédiaires
108	12	.....	$\mu_1 = 0,649395$	$\mu_1 = 1,649395$
113	9	en remontant : second membre de la formule	$\sin(Z - \zeta_2)$	$\sin(Z_2 - \zeta_2)$
131	5	en remontant : au dénominateur de δ_{f_i}	$n_1 - 1$	$n_i - 1$
132	2	.....	f_1	f_i
410	6	Après la description de la machine parallatique de M. Gambey, *ajoutez ce qui suit :* Lorsque l'astre observé est la lune, on serre un rappel, qui agit sur l'appareil d'horlogerie; et le mouvement stellaire du cercle équatorial se change en mouvement lunaire moyen.		

L'impression de ce second volume a suivi celle du premier à un intervalle plus long que je ne l'aurais

voulu. Ce retard a été, en partie, occasionné par le travail qu'ont exigé les nouvelles recherches qu'il renferme sur les instruments optiques, et aussi par la nécessité de terminer plusieurs autres travaux, qui n'étaient pas étrangers à la confection des deux volumes suivants. Je m'appliquerai à ceux-ci sans aucune distraction, et j'emploierai à leur prompt achèvement tout ce que mon âge pourra me laisser encore de temps ainsi que de forces.

Paris, août 1844.

TABLE DES CHAPITRES

contenus dans ce second volume

ET INDICATION DES PRINCIPAUX OBJETS QUI Y SONT TRAITÉS.

Pages.

Limitation des formules générales du tome Ier au cas particulier des appareils purement dioptriques, dont les lentilles sont environnées d'un même milieu ambiant, à réfraction simple, en supposant toujours très-petites les inflexions des rayons lumineux autour de l'axe du système 1

Formules contractées propres à ces appareils. Leur analogie avec celle du cas général; elles dépendent aussi de quatre coefficients principaux, liés entre eux par une équation de condition. Relation de ces coefficients contractés avec leurs analogues du cas général. Leurs expressions explicites pour le cas où le nombre des lentilles assemblées n'excède pas cinq. 12

Règle analytique pour former *directement* les quatre coefficients principaux propres à un système quelconque de surfaces sphériques, centrées sur un même axe et séparées par des milieux quelconques; ou à un système purement dioptrique, composé d'un nombre quelconque de lentilles sphériques environnées d'un même milieu ambiant 20

Tableau présentant l'emploi des coefficients contractés, pour spécialiser tous les effets produits par les systèmes purement dioptriques, en les déduisant des formules générales relatives aux systèmes quelconques. Détails sur ce mode de déduction. . . 23

Application des résultats précédents à la construction des objectifs achromatiques, particulièrement de ceux qui sont composés de deux lentilles de différente nature. Formation des quatre coefficients principaux propres à ce cas, et conditions qui doivent s'y trouver remplies dans le cas d'un achromatisme rigoureux. Première application au cas où les épaisseurs centrales des lentilles peuvent être considérées comme très-petites, comparativement à leurs rayons de courbure postérieurs 34

Seconde application plus rigoureuse. Diversité des conditions à remplir, selon que l'objectif devra recevoir les radiations venant d'objets très-proches ou très-éloignés. Développement spécial

Pages.

de ce dernier cas, qui est celui des objectifs astronomiques. Distinction des conditions analytiques nécessaires pour opérer l'achromatisme dans le sens longitudinal et dans le sens latéral. Expressions qui les établissent. 56

Discussion spéciale de celle qui se rapporte à l'achromatisme latéral. Relations qu'elle indique entre les rayons des courbures pour que cet achromatisme soit *stable*, c'est-à-dire pour qu'il subsiste indépendamment des petites erreurs qui peuvent survenir dans l'exacte réalisation des valeurs assignées aux rayons des courbures. 66

Coïncidence presque parfaite de ces relations avec les systèmes de courbure adoptées par Fraunhofer. 77

De l'aberration de sphéricité : ses effets, son expression générale. Formule d'Euler pour en détruire le terme le plus sensible dans le sens longitudinal. Relation qu'elle établit entre les quantités déterminatrices des deux lentilles, quand celles-ci doivent former un système achromatique dans le sens longitudinal 82

Combinaison de cette relation avec celle qui assure la stabilité de l'achromatisme latéral. Marche de calcul à suivre pour les accorder aussi exactement qu'il est possible. Application numérique à un objectif, fondée sur les indices de réfraction et de dispersion employés par Fraunhofer. Les combinaisons qui y satisfont alors sont comprises entre des limites de possibilité extrêmement restreintes, dans lesquelles la construction adoptée par Fraunhofer se trouve comprise; de sorte que le problème de compenser à la fois les deux genres d'aberration avec le plus d'avantage est presque déterminé 99

Détermination numérique rigoureuse de la marche d'un rayon lumineux, traversant, sous des incidences quelconques, un nombre quelconque de surfaces sphériques centrées sur un même axe longitudinal. Application de ces formules pour calculer rigoureusement les portions des deux aberrations qui peuvent rester encore dans un objectif déjà très-approximativement compensé par les méthodes précédentes; procédés à employer pour découvrir par des corrections de calcul, les combinaisons qui peuvent achever de le détruire entièrement. 110

Sur la construction des oculaires, applicables aux objectifs achromatisés. Conditions analytiques nécessaires pour opérer la dispersion rectiligne des foyers définitifs, lorsque le centre de la pupille est placé au point oculaire moyen de l'instrument, avec une distance donnée de vision distincte. Expression explicite de la position du point oculaire moyen, dans laquelle on voit les circonstances analytiques qui le rendent extérieur ou intérieur à l'instrument. Conditions à remplir pour que les points oculaires propres aux rayons lumineux de diverse réfrangibilité soient

Pages.

très-peu dispersés sur l'axe longitudinal du système, autour du point oculaire moyen. 119

Difficultés de complication qui s'opposent à ce que l'on satisfasse rigoureusement par le calcul à toutes les conditions précédentes Préparations analytiques suffisantes pour les remplir approximativement avec des lentilles oculaires faites d'une même espèce de verre, en se conservant la possibilité ultérieure d'achever d'y satisfaire expérimentalement par un mouvement relatif de ces lentilles, dans le sens de leur axe commun. 128

Application de ces méthodes à la construction des oculaires composés de deux lentilles faites avec une même espèce de verre, en opérant la dispersion longitudinale des foyers définitifs. Tableau présentant les expressions générales et complètes de tous les éléments constitutifs d'un tel oculaire, opérant un grossissement angulaire total assigné, pour une distance focale donnée de l'objectif supposé individuellement achromatique 138

Discussion de ces expressions. Examen des divers systèmes d'oculaires positifs ou négatifs qui peuvent en résulter, avec la spécification de leurs propriétés particulières. On démontre que tous les oculaires positifs qui opèrent la dispersion longitudinale des foyers, rendent nécessairement le point oculaire moyen du système intérieur à l'instrument. Avantage des oculaires négatifs pour comporter une plus grande étendue de champ, à grossissement égal. Exemples numériques de ces diverses constructions avec l'analyse, analytique et figurée, de leurs effets propres . . 146

Limitation des formules générales pour le cas où le grossissement angulaire du système total doit être très-grand, comparativement à l'unité. Tableau des éléments constitutifs des oculaires, tant positifs que négatifs, applicables à cette supposition 158

Des lunettes de nuit, applicables à la marine, ainsi qu'à l'inspection nocturne du ciel. Conditions spéciales de ces instruments, et nécessité de calculer rigoureusement leurs oculaires par les formules exactes, pour le faible grossissement qui leur est propre. 163

Des lunettes achromatiques à oculaires quadruples, qui font voir les objets droits; conditions les plus avantageuses de leur construction, en supposant les lentilles de l'oculaire faites avec une même espèce de verre. 168

Analyse de l'héliomètre. Procédé de duplication des images appliqué à la mesure des petits angles visuels. Emploi de l'héliomètre pour la mesure des angles visuels d'une plus grande amplitude. Construction et représentation de cet instrument. Expressions générales des valeurs angulaires qu'il donne pour une constitution quelconque de son objectif, supposé seulement achromatique. Expression des variations que les changements de

Pages.

la température y peuvent occasionner. Exemples numériques de ces formules appliquées aux observations faites par M. Bessel avec l'héliomètre de Kœnigsberg 176

CHAPITRE IX.

De quelques appareils de précision appliqués aux instruments astronomiques (*). 229

SECTION I. Le vernier et autres procédés immédiats de subdivision. 229

SECTION II. Les niveaux. Leur construction. Conditions essentielles à remplir pour que leurs indications soient régulières. . . . 240

Usage du niveau pour constater la verticalité des axes de rotation. Application spéciale aux instruments astronomiques ayant un axe vertical, qui mesurent les distances zénithales par retournement. Notation uniforme de leurs indications pour ce but, avec des exemples numériques de son usage. 248

Emploi du niveau pour déterminer l'horizontalité des axes de rotation. Applications spéciales à l'instrument des passages et au secteur zénithal, au moyen d'un appareil de suspension. Méthodes pour vérifier la cylindricité de ces axes, et pour en déterminer au besoin l'erreur. Procédés à l'aide desquels on rend les axes optiques physiques de ces instruments perpendiculaires à leur axe de rotation, quand l'horizontalité de celui-ci est assurée. Exposé des opérations par lesquelles on règle les fils de leurs réticules, longitudinalement et transversalement; épreuves par lesquelles on vérifie la constance de leurs positions, une fois qu'elles ont été convenablement établies. Mires de jour, mires de nuit. . . . 260

SECTION III. Emploi du fil-à-plomb pour constater la verticalité des droites ou des plans. Applications de ce procédé : 1° aux grands secteurs zénithaux, par l'intermédiaire d'un appareil de réflexion ; 2° aux plans des cercles répétiteurs portatifs ; 3° aux limbes des grands cercles muraux dont l'axe de rotation doit rester fixe 281

CHAPITRE X.

Du concours des instruments nécessaires pour les observations astronomiques, et en particulier des horloges mécaniques qui servent à la mesure du temps. 296

(*) C'est par erreur que l'on a désigné ce chapitre par le n° IX, déjà appliqué au chapitre précédent du tome Ier concernant les instruments d'optique, auquel celui-ci succède immédiatement. Mais cette inadvertance a été aperçue trop tard pour qu'on pût la corriger. Elle sera sans inconvénient, puisque ce chapitre IX bis se trouve ici compris dans un autre volume, et j'ai pensé qu'il suffisait d'en prévenir le lecteur.

Pages.

Notion abstraite du temps. Sa mesure par les mouvements périodiques. Horloges fondées, 1° sur l'écoulement des liquides; 2° sur la descente d'un poids rendue intermittente par la périodicité des oscillations d'un balancier horizontal, communiqué au moyen d'un échappement à palettes. Horloges astronomiques à pendule compensé. Principes mécaniques de leur construction, de leur périodicité. Manière d'en faire usage, de les comparer entre elles. Soins que leur emploi exige. Leur périodicité démontrée expérimentalement, sans recourir aux observations astronomiques. Construction des chronomètres portatifs et des garde-temps 296-317

CHAPITRE XI.

De la manière d'associer les indications des horloges à celles des instruments de passage pour étudier les circonstances du mouvement diurne du ciel 318

Description spéciale de l'instrument des passages. Manière de s'en servir 318-323

CHAPITRE XII.

De l'égalité des révolutions diurnes du ciel et de leur usage pour la mesure du temps 324

Démonstration expérimentale de l'uniformité du mouvement diurne. Corrections théoriques ultérieurement nécessaires pour la rendre tout à fait rigoureuse. Définition du jour sidéral, et son usage comme unité de temps. Rectification des horloges mécaniques, par leur comparaison avec les révolutions stellaires ramenées à une exacte uniformité. 324-340

CHAPITRE XIII.

Détermination exacte du méridien par la mesure du temps. Définition exacte de la méridienne et de la perpendiculaire 340

Détermination expérimentale du méridien par l'instrument des passages, en bissectant les révolutions diurnes des étoiles qui sont toujours visibles : annonce d'autres moyens fondés sur les lois du mouvement diurne et qui seront ultérieurement expliqués. Mires fixes pour conserver la direction du méridien une fois trouvée. Détermination du méridien par l'observation des hauteurs correspondantes, à l'aide d'instruments ayant un limbe vertical qui peut être dirigé dans tous les azimuts ; exemples : le quart de cercle, les cercles répétiteurs portatifs, le cercle entier azimutal de Palerme. Indication de ces instruments et leur représentation 340-350

Pages.

CHAPITRE XIV.

Direction de l'axe de rotation du ciel. Description et usage des instruments destinés à mesurer les distances zénithales des astres, au moment de leur passage dans le plan du méridien. Détermination de la hauteur du pôle. La Terre est comme un point dans les espaces célestes. 351

Distinction de deux classes d'instruments employés à la mesure des distances zénithales méridiennes, les uns fixes et non susceptibles de retourne, les autres fixes ou mobiles, mais pouvant être retournés. Ire classe : le quart de cercle mural et les cercles muraux; IIe classe : les cercles répétiteurs portatifs, le cercle entier azimutal, les théodolites 351-353

Description et usage du quart de cercle mural; manière de l'établir, de le diriger, de le régler ; construction et emploi de la *lunette d'épreuve*. Erreur de collimation; manières de la déterminer. Application au ciel. 353-360

Description et usage des cercles muraux; manières de les établir, de les diriger, de les régler, de les appliquer au ciel 361-365

Erreur de collimation de ces instruments; manière de la déterminer et de fixer la position de leur point zénithal, en combinant les observations d'une même étoile faites successivement par vision directe, et par réflexion, dans le passage méridien. Application à un cercle isolé, en s'aidant d'un micromètre auxiliaire à fil transversal mobile. Formules propres à ce cas, et discussion des résultats qu'on en déduit. Extension de cette méthode à deux cercles pareils établis dans un même observatoire et employés simultanément. Variations qui s'observent dans le point zénithal de ces instruments 365-376

Détermination des distances zénithales méridiennes par le cercle entier azimutal de Palerme; détails sur la manière d'établir cet instrument et d'en régler toutes les parties. Application au ciel. Variations observées dans la position du point zénithal. Modification importante à faire dans l'établissement de l'axe vertical, pour affaiblir les causes de ces variations. 377-385

Détermination de l'axe de rotation du ciel, par la coïncidence des moyennes obtenues entre les distances zénithales méridiennes des étoiles toujours visibles, observées dans leur passage supérieur et inférieur. L'axe de rotation semble toujours passer par l'œil de l'observateur. Hauteur du pôle sur l'horizon de chaque lieu qui se conclut de ces observations. 385-392

Détails particuliers relatifs aux observations des distances méridiennes faites sur les astres qui offrent un disque sensible. Moyens qui s'emploient pour compenser, ou évaluer les effets

Pages.

de l'épaisseur des fils micrométriques qui sont mis en contact avec leurs bords 392-394

CHAPITRE XV.

Détermination exacte des lois du mouvement diurne. Preuve que ce mouvement est circulaire; preuve qu'il est uniforme. Mesure du temps par les arcs célestes 395

Constance de la distance polaire des astres fixe, présentée comme condition de la circularité du mouvement diurne. Calcul trigonométrique de cette distance, d'après des observations simultanées des hauteurs et des azimuts d'une même étoile, faites dans diverses phases de sa révolution diurne avec le cercle entier de Palerme; constance des distances polaires qui s'en déduisent . . 395-400

Uniformité du mouvement diurne des astres fixes, prouvée par la proportionnalité des angles horaires aux intervalles de temps qui précèdent ou qui suivent le passage méridien. 400-403

Extension de ces résultats aux astres qui ont un mouvement propre, en corrigeant leurs positions des déplacements qu'il y produit. Usage des faits précédents pour mesurer le temps par les arcs célestes et établir leurs rapports trigonométriques. Réalisation mécanique des lois du mouvement diurne par la machine parallatique. Description et usage de cet instrument. 403-410

Note Ire. Sur l'équation des hauteurs correspondantes. Définitions anticipées du temps solaire moyen et apparent, ainsi que de leurs rapports avec le temps sidéral, qui sont nécessaires pour cette application 411-418

Note II. Détermination du coefficient de la réfraction atmosphérique par des observations d'étoiles circompolaires. Application numérique de ce procédé, avec la fixation des limites de distances zénithales auxquelles on doit le restreindre, quand on l'établit sur l'expression de la réfraction développée en série. 419-431

ADDITIONS.

Sur la longueur du pendule à secondes, mesurée à différentes latitudes, par le procédé de Borda. Description des appareils employés pour cette détermination; exposé détaillé de leur usage, des précautions qu'ils exigent, et des résultats numériques qu'on en déduit. 432-446

Note Ire. Démonstration de la formule donnée par Borda, pour ramener le pendule d'expérience au cas idéal où il aurait oscillé dans des amplitudes d'arc infiniment petites . . . . . 447-450.

Note II. Description et usage du comparateur. Description de la règle à languette sortante qui sert pour mesurer la longueur du

Pages.

pendule d'expérience. Manière la plus avantageuse de la diviser Précaution qu'il faut prendre en la substituant au pendule, et en la transportant sur le comparateur, pour évaluer les subdivisions de ses parties qui complètent la longueur observée 451-454

Note III. Calcul numérique des réductions qu'il faut faire à la longueur mesurée du pendule d'expérience, pour avoir celle du pendule à secondes qui y correspond. 455-459

Dissertation sur les mesures du pendule exécutées en différentes régions de la terre, avec la discussion des conséquences qu'on en peut légitimement déduire sur la configuration et la constitution du sphéroïde terrestre. Les variations d'intensité de la pesanteur sur les diverses parties d'un même méridien diffèrent notablement des lois qu'elles devraient suivre si la terre était un ellipsoïde de révolution, formé de couches elliptiques semblables, ayant des densités arbitrairement variables du centre à la surface. Même conclusion tirée des inégalités que ces intensités présentent quand on les compare entre elles sur les divers points d'un même parallèle terrestre. On ne peut déduire de ces expériences une mesure précise de l'aplatissement de la terre, parce que, même dans leur ensemble, elles lui assignent des valeurs différentes, selon qu'on le détermine par des systèmes d'observation plus ou moins rapprochés des pôles ou de l'équateur. 460-495

Note additionnelle. Description et usage d'un appareil propre à mesurer les diamètres des boules sphériques employées comme corps oscillant dans le procédé de Borda. 496-502

FIN DE LA TABLE DU DEUXIÈME VOLUME.

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

D'ASTRONOMIE PHYSIQUE.

Limitation des formules générales au cas particulier des appareils dioptriques.

1. Les formules établies dans le tome premier, conviennent à tous les systèmes de surfaces sphériques assemblées sur un même axe central, soit qu'ils opèrent par réfraction, par réflexion, ou de ces deux manières à la fois. La généralité que nous leur conservions, ne faisait que présenter avec plus d'évidence les propriétés communes à tous ces systèmes, sans aucune complication de calcul. Mais, lorsqu'on veut arriver aux applications numériques, si les surfaces assemblées deviennent nombreuses, comme cela arrive dans les instruments purement dioptriques, le nombre des termes qui composent les coefficients généraux N, P, Q, R, se multiplie au point d'en rendre la formation immédiate trop pénible pour pouvoir en faire un usage direct. Il faut donc alors chercher, dans les conditions spéciales de l'appareil, les moyens de concentrer les expressions générales de ces coefficients; et c'est ce que nous allons faire.

2. Néanmoins, tout en préparant cette concentration pour des systèmes dioptriques quelconques, il est bon de remarquer d'avance que, dans les applications aux instruments réels, il existe toujours des particularités de constitution, fondées sur des convenances pratiques, qui devront simplifier considérablement les formules générales que nous aurons établies. Car d'abord, ainsi que je l'ai annoncé tome premier, page 579, dans la confection de tout appareil optique, le système objectif et le système oculaire doivent tou-

jours être assujettis à certaines conditions spéciales qui exigent qu'on les considère isolément; ce qui déjà y restreint l'emploi des formules à des nombres de surfaces ou de lentilles beaucoup moindres que s'il fallait considérer simultanément le système total. Ainsi le nombre de lentilles qui compose un objectif dioptrique n'excède jamais trois, et se réduit presque toujours à deux, qui, en outre, dans un cas comme dans l'autre, sont toujours presque en contact entre elles. Pour les oculaires dioptriques, le nombre des lentilles assemblées n'excède jamais quatre, et cela se réalise seulement dans les lunettes destinées aux observations des objets terrestres. Car, dans les oculaires appliqués aux instruments astronomiques, on n'emploie jamais plus de deux lentilles, pour éviter les pertes de lumière qu'une plus grande multiplicité de surfaces réfléchissantes produirait. Puis, dans ces deux cas, la condition de la dispersion rectiligne des foyers, que l'oculaire doit toujours remplir, ne s'établit par le calcul qu'avec un premier degré d'approximation, dans lequel les épaisseurs des lentilles qui le composent sont considérées comme négligeables, comparativement aux autres éléments longitudinaux du système. Le reste de la perfection, qui résulterait d'une solution rigoureuse, est opéré expérimentalement, au moyen d'une petite étendue de course qu'on laisse aux intervalles des lentilles calculées, et qui se limite d'après l'observation, de manière que l'oculaire produise le meilleur effet possible quand il est appliqué à l'objectif auquel on le destine. On conçoit combien ces diverses limitations physiques doivent simplifier le calcul des instruments dioptriques réels; et ainsi il importe beaucoup que les formules qui leur seront spéciales soient préparées de manière que l'on puisse aisément les y introduire. C'est à quoi nous allons parvenir, en particularisant les formules relatives aux systèmes optiques quelconques, de manière qu'elles se restreignent aux systèmes purement dioptriques, considérés dans leur application usuelle, où les lentilles qui les composent sont toutes extérieurement contiguës à un même milieu ambiant.

3. J'admets donc que l'appareil est uniquement composé de lentilles de verre à surfaces sphériques, pouvant être de nature diverse, mais toutes disposées sur un même axe passant par leurs

centres de courbure, et confinant à un même milieu qui sera l'air ambiant. Alors le nombre total des surfaces assemblées sera nécessairement pair. En outre, les deux surfaces de chaque lentille devant être contiguës à l'air, les vitesses de rang pair, u, u_2, u_4,... seront toutes égales entre elles, et à la vitesse propre, dans l'air, des corpuscules lumineux homogènes que l'on voudra considérer. Donc, si l'on prend cette vitesse pour unité, relativement à chaque espèce de rayons, les vitesses de rang impair u_1, u_3, u_5,..., qui ont lieu dans l'intérieur des lentilles, exprimeront les indices de réfraction de ces mêmes rayons en passant de l'air dans les diverses espèces de verre dont elles sont formées, ce qui rendra toutes ces vitesses plus grandes que 1. En introduisant ces particularités dans les abréviations que nous avons établies page 415 du premier volume, pour former nos équations de dérivation générales, leurs valeurs successives présentent des analogies qui reviennent de deux en deux termes. On a, en effet, en ne considérant qu'un seul système de projection,

$$\begin{array}{llll}
\cos Y = \psi, & & & \\
u_1 \cos Y_1 = \psi_1, & +\dfrac{(u_1-1)}{r_1} = \dfrac{1}{\varphi_1}, & & \dfrac{h_1}{u_1} = H_1, \\
\cos Y_2 = \psi_2, & -\dfrac{(u_1-1)}{r_2} = \dfrac{1}{\varphi_2}, & & h_2 = H_2, \\
u_3 \cos Y_3 = \psi_3, & +\dfrac{(u_3-1)}{r_3} = \dfrac{1}{\varphi_3}, & & \dfrac{h_3}{u_3} = H_3, \\
\cos Y_4 = \psi_4, & -\dfrac{(u_3-1)}{r_4} = \dfrac{1}{\varphi_4}, & & h_4 = H_4. \\
\text{etc.}, & \text{etc.}, & & \text{etc.}
\end{array}$$

Les h de rang pair, qui sont sans dénominateur, expriment les intervalles des lentilles; les h de rang impair, qui sont divisés par les indices de réfractions, expriment leurs épaisseurs, qui sont généralement très-petites comparativement aux rayons de courbure des deux surfaces. Ces mêmes analogies simplifient pareillement les relations entre les Y d'incidence et d'émergence sur les deux faces de chaque lentille. Car, en les introduisant dans les équations éliminées relatives à deux surfaces consécutives et consignées dans le tableau inséré au premier volume, en regard de la

page 413, elles donnent

$$\cos Y_2 = \left(1 - \frac{(u_1 - 1)}{u_1}\frac{h_1}{r_2}\right)\cos Y + (u_1 - 1)\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{(u_1 - 1)}{u_1}\frac{h_1}{r_1 r_2}\right] y_1,$$

et de même

$$\cos Y_4 = \left(1 - \frac{(u_3 - 1)}{u_3}\frac{h_3}{r_4}\right)\cos Y_2 + (u_3 - 1)\left[\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} - \frac{(u_3 - 1)}{u_3}\frac{h_3}{r_3 r_4}\right] y_3.$$

4. Ces équations pourraient se continuer ainsi indéfiniment. Mais, pour les approprier d'une manière commode au genre d'appareil que nous voulons spécialement considérer, il faut contracter la notation que nous y avions admise dans le cas général, en caractérisant les éléments propres à chaque lentille par des indices communs relatifs à son rang dans la série entière dont l'instrument se compose, sans les lier par la continuité avec les intervalles intermédiaires qui en deviennent ici physiquement distincts. Le choix de lettres et d'indices qui me paraît le plus propre à atteindre ce but, est exposé dans le tableau suivant, dont j'emploierai désormais les dénominations.

DÉSIGNATION des divers éléments constitutifs du système.	NOTATION générale.	NOTATION spéciale.
Vitesses de rang impair, devenues les indices de réfraction de chaque lentille, pour le rayon lumineux considéré, quand il passe de l'air ambiant dans la matière de la lentille.....	u_1	n_1
	u_3	n_2
	u_5	n_3
	u_7	n_4
	u_{2i-1}	n_i
Rayons de courbure antérieurs des lentilles.....	r_1	r_1
	r_3	r_2
	r_5	r_3
	r_7	r_4
	r_{2i-1}	r_i
Rayons de courbure postérieurs des lentilles.....	r_2	r'_1
	r_4	r'_2
	r_6	r'_3
	r_8	r'_4
	r_{2i}	r'_i

DÉSIGNATION des divers éléments constitutifs du système.	NOTATION générale.	NOTATION spéciale.
Épaisseurs des lentilles.....	h_1 h_3 h_5 h_7 h_{2i-1}	e_1 e_2 e_3 e_4 e_i
Intervalle central des lentilles consécutives entre elles; ou distances, comprises sur l'axe central, entre les centres de figure de leurs surfaces opposées mutuellement.....	h_2 h_4 h_6 h_8 h_{2i}	h_1 h_2 h_3 h_4 h_i
Ordonnées latérales d'incidence sur les surfaces antérieures des lentilles successives.....	y_1 z_1 y_3 z_3 y_5 z_5 y_7 z_7 y_{2i-1} z_{2i-1}	y_1 z_1 y_2 z_2 y_3 z_3 y_4 z_4 y_i z_i
Ordonnées latérales d'incidence sur les surfaces postérieures des lentilles successives.....	y_2 z_2 y_4 z_4 y_6 z_6 y_8 z_8 y_{2i} z_{2i}	y'_1 z'_1 y'_2 z'_2 y'_3 z'_3 y'_4 z'_4 y'_i z'_i

5. Si l'on introduit ces nouvelles dénominations dans les équations en Y, Y_2, Z, Z_2, relatives à deux surfaces consécutives, que je viens de rappeler tout à l'heure, et que l'on fasse pour abréger

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{(n_1 - 1)}{n_1}\frac{e_1}{r'_1}, \qquad \frac{1}{f_1} = (n_1 - 1)\left[\frac{\epsilon_1}{r_1} - \frac{1}{r'_1}\right],$$

$$\epsilon_2 = 1 - \frac{(n_2 - 1)}{n_2}\frac{e_2}{r'_2}, \qquad \frac{1}{f_2} = (n_2 - 1)\left[\frac{\epsilon_2}{r_2} - \frac{1}{r'_2}\right],$$

etc. etc.

elles se contractent sous cette forme simple

$$(1)\quad \begin{cases} \cos Y_2 = \varepsilon_1 \cos Y + \dfrac{y_1}{f_1}, & \cos Z_2 = \varepsilon_1 \cos Z + \dfrac{z_1}{f_1}, \\ \cos Y_4 = \varepsilon_2 \cos Y_2 + \dfrac{y_2}{f_2}, & \cos Z_4 = \varepsilon_2 \cos Z_2 + \dfrac{z_2}{f_2}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Les épaisseurs se trouvent alors complétement renfermées dans les facteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, où elles se trouvent divisées par les rayons de courbures postérieures des lentilles. Cette disposition permet de discerner aisément leur influence générale sur les angles d'émergence successifs. En faisant $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ tous égaux entre eux et à l'unité, on aurait la série d'équations qui conviennent à un système de lentilles infiniment minces.

6. Ces mêmes notations simplifient pareillement les expressions des ordonnées tant d'incidence que d'émergence sur les surfaces successives des lentilles, et permettent aussi d'y séparer les termes dépendants des épaisseurs, lorsqu'on exprime ces ordonnées en fonctions des angles d'émergence sur les *secondes* surfaces. Pour le faire voir, considérons seulement leurs valeurs consécutives sur les trois premières surfaces, c'est-à-dire y_1, y_2, y_3 de notre notation générale. Nous avons eu alors, dans le tableau annexé en regard de la page 413 (tome I),

$$y_2 = \frac{h_1}{u_1} u \cos Y + \left(1 + \frac{(u_1 - u)}{u_1} \frac{h_1}{r_1}\right) y_1,$$
$$y_3 = y_2 + h_2 \cos Y_2;$$

ce qui, dans notre notation actuelle, devient

$$y'_1 = \frac{e_1}{n_1} \cos Y + \left(1 + \frac{(n_1 - 1)}{n_1} \frac{e_1}{r_1}\right) y_1,$$
$$y_2 = y'_1 + h_1 \cos Y_2.$$

Multipliez les deux membres de la première équation par ε_1, et remplacez $\varepsilon_1 \cos Y$ dans le second membre par sa valeur en $\cos Y_2$ tirée de la première des équations (1), vous trouverez, après les

réductions,

$$(2) \qquad \iota_1 y'_1 = \frac{e_1}{n_1} \cos Y_2 + y_1.$$

Prenant donc cette valeur de y'_1 et la substituant dans l'ordonnée antérieure suivante y_2, il viendra

$$\iota_1 y_2 = \left(\frac{e_1}{n_1} + \iota_1 h_1\right) \cos Y_2 + y_1;$$

de sorte qu'en faisant par abréviation

$$\frac{e_1}{n_1} + \iota_1 h_1 = H_1,$$

on aura définitivement

$$(3) \qquad \iota_1 y_2 = H_1 \cos Y_2 + y_1,$$

et de même

$$\iota_1 z_2 = H_1 \cos Z_2 + z_1.$$

Car, quoique nous n'ayons considéré qu'un seul système de projection, il est évident que la même forme se reproduirait sur l'autre en opérant de la même manière.

7. Si l'on voulait arriver à ces équations contractées, sans passer par l'intermédiaire de notre notation générale, il n'y aurait qu'à reprendre les équations primitives trouvées pour une seule surface, page 379 du premier volume, et qui sont

$$u_1 \cos Y_1 = u \cos Y + (u_1 - u) \frac{y_1}{r_1},$$

$$u_1 \cos Z_1 = u \cos Z + (u_1 - u) \frac{z_1}{r_1}.$$

Ici la première surface étant contiguë à l'air ambiant, $\frac{u_1}{u}$ devient l'indice de réfraction n_1 du rayon que l'on considère, lorsqu'il passe de l'air dans le verre dont la lentille est formée. On a donc

$$n_1 \cos Y_1 = \cos Y + (n_1 - 1) \frac{y_1}{r_1}, \qquad n_1 \cos Z_1 = \cos Z + (n_1 - 1) \frac{z_1}{r_1}.$$

A l'émergence du rayon lumineux par la seconde surface de la même lentille, l'équation primitive devient

$$u_2 \cos Y_2 = u_1 \cos Y_1 + (u_2 - u_1) \frac{y'_1}{r'_1},$$

$$u_2 \cos Z_2 = u_1 \cos Z_1 + (u_2 - u_1) \frac{z'_1}{r'_1},$$

y'_1, z'_1 étant les coordonnées du point d'émergence, et r'_1 le rayon de courbure de la seconde surface. Mais, puisque l'émergence a lieu dans l'air, $\frac{u_1}{u_2}$ devient n_1, ce qui donne

$$\cos Y_2 = n_1 \cos Y_1 - (n_1 - 1) \frac{y'_1}{r'_1},$$

$$\cos Z_2 = n_1 \cos Z_1 - (n_1 - 1) \frac{z'_1}{r'_1}.$$

Éliminant Y_1 et Z_1, entre celles-ci et les premières, en Y et Z, il vient

$$\cos Y_2 = \cos Y + (n_1 - 1) \left[\frac{y_1}{r_1} - \frac{y'_1}{r'_1}\right],$$

$$\cos Z_2 = \cos Z + (n_1 - 1) \left[\frac{z_1}{r_1} - \frac{z'_1}{r'_1}\right].$$

Maintenant e_1 désignant l'épaisseur de la lentille, et les incidences étant très-petites, on a, par le raisonnement général exposé page 412 du premier volume,

$$y'_1 = y_1 + e_1 \cos Y_1, \qquad z'_1 = z_1 + e_1 \cos Z_1,$$

ou, en mettant pour $\cos Y_1$, $\cos Z_1$, leurs valeurs précédentes,

$$y'_1 = \frac{e_1}{n_1} \cos Y + \left[1 + \frac{(n_1 - 1)}{n_1} \frac{e_1}{r_1}\right] y_1,$$

$$z'_1 = \frac{e_1}{n_1} \cos Z + \left[1 + \frac{(n_1 - 1)}{n_1} \frac{e_1}{r_1}\right] z_1.$$

Substituant dans $\cos Y_2$ et $\cos Z_2$, il vient

$$\cos Y_2 = \left[1 - \frac{(n_1-1)}{n_1}\frac{e_1}{r'_1}\right]\cos Y + (n_1-1)\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r'_2} - \frac{(n_1-1)}{n_1}\frac{e_1}{r_1 r'_1}\right] y_1;$$
$$\cos Z_2 = \left[1 - \frac{(n_1-1)}{n_1}\frac{e_1}{r'_1}\right]\cos Z + (n_1-1)\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r'_1} - \frac{(n_1-1)}{n_1}\frac{e_1}{r_1 r'_1}\right] z_1.$$

Soient donc, pour abréger,

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{(n_1-1)}{n_1}\frac{e_1}{r'_1}, \qquad \frac{1}{f_1} = (n_1-1)\left[\frac{\varepsilon_1}{r_1} - \frac{1}{r'_1}\right],$$

on aura

$$(1) \quad \cos Y_2 = \varepsilon_1 \cos Y + \frac{y_1}{f_1}, \qquad \cos Z_2 = \varepsilon_1 \cos Z + \frac{z_1}{f_1}.$$

Ce sont déjà les équations (1) du § 5. Prenez-y les valeurs de $\cos Y$, $\cos Z$ en $\cos Y_2$, $\cos Z_2$, puis substituez-les dans y'_1 et z'_1, vous aurez, après les réductions,

$$(2) \quad \varepsilon_1 y'_1 = \frac{e_1}{n_1}\cos Y_2 + y_1, \qquad \varepsilon_1 z'_1 = \frac{e_1}{n_1}\cos Z_2 + z_1.$$

Ce sont les équations (2) du § 6. Maintenant, le rayon continuant sa route dans l'air, va percer la surface antérieure de la lentille suivante. Soient y_2, z_2 les ordonnées du point d'incidence, et h_1 l'*intervalle* des centres de figure des surfaces opposées; on aura, à cause de la petitesse des incidences, comme dans la page 412 du premier volume,

$$y_2 = y'_1 + h_1 \cos Y_2, \qquad z_2 = z'_1 + h_1 \cos Z_2.$$

Remplaçant y'_1 et z'_1 par leurs valeurs, et faisant, pour abréger,

$$\frac{e_1}{n_1} + \varepsilon_1 h_1 = H_1,$$

on aura

$$(3) \quad \varepsilon_1 y_2 = H_1 \cos Y_2 + y_1, \qquad \varepsilon_1 z_2 = H_1 \cos Z_2 + z_1.$$

Ce sont les équations (3) du § 6. On voit déjà que les quantités auxiliaires ε_1 ne diffèrent de l'unité que par un terme qui est de l'ordre de l'épaisseur centrale des lentilles, et les H_1 ne diffèrent de leur intervalle mutuel h_1 que par un terme du

même ordre. Les quantités auxiliaires f_1 ne diffèrent de la distance focale principale de la lentille que dans le même degré d'approximation (*). De sorte que, si les épaisseurs centrales ϵ_1 étaient assez petites pour qu'on pût les considérer comme absolument négligeables, ϵ_1 serait 1, f_1 deviendrait la distance focale principale de la lentille considérée, et H_1 serait l'intervalle central qui la sépare de la lentille suivante.

8. Les équations (1) et (3) étant successivement appliquées à toutes les lentilles, présentent une continuité de dérivation indéfinie, de forme presque aussi simple que nos équations générales, et deux fois plus rapide, puisque les angles et les ordonnées y procèdent par saut, de deux en deux surfaces. Je les adopterai donc; et, les disposant à la suite les unes des autres par ordre, pour un nombre quelconque i de lentilles, j'en forme le premier tableau placé en regard de la page 11, dans lequel j'écris les lettres ϵ_0 au lieu de 1, H_0 au lieu de 0, et y_0, z_0 au lieu de y_1, z_1, pour conserver la continuité des dérivations.

9. Il est inutile de former des séries spéciales de dérivations pour les ordonnées d'émergence y'_i, z'_i. Car le rang i du couple étant donné, lorsqu'on connaîtra les angles d'émergence Y_{2i}, Z_{2i} avec les ordonnées d'incidence antérieure y_i, z_i, propres à ce couple-là, les ordonnées d'émergence postérieures y'_i, z'_i se calculeront, d'après ces données, au moyen des deux formules

$$\epsilon_i y'_i = \frac{e_i}{n_i} \cos Y_{2i} + y_i, \qquad \epsilon_i z'_i = \frac{e_i}{n_i} \cos Z_{2i} + z_i,$$

(*) Cela se voit aisément par les expressions des coefficients généraux propres à une lentille sphérique, calculés tome Ier, page 616. En effet la distance focale principale F d'un système optique quelconque a pour valeur générale $\frac{R}{P} u_m$, page 453. Pour une lentille agissant dans l'air u_m est égal à u, et les coefficients R, P ont les valeurs calculées page 616. Or $\frac{u}{P}$ est alors égal à notre quantité auxiliaire f_i; et N ne diffère de l'unité que par un terme dépendant de l'épaisseur centrale. Donc si cette épaisseur est supposée nulle, N devient 1, et f_i devient égale à la distance focale principale F, prise dans la même supposition.

Numéros d'ordre des couples. i.	ÉQUATIONS [illegible]	[illegible]AN DES y z. [illegible]aison du rayon lumineux [illegible] des z à son émergence du [illegible]ple dont le rayon est i. Z_{2i}.
1	$\varepsilon_0 y_1 = H_0 \cos Y + y$	[illegible] $= \varepsilon_1 \cos Z + \frac{z_1}{f_1}$
2	$\varepsilon_1 y_2 = H_1 \cos Y_2 + y$	[illegible] $= \varepsilon_2 \cos Z_2 + \frac{z_2}{f_2}$
3	$\varepsilon_2 y_3 = H_2 \cos Y_4 +$	[illegible] $= \varepsilon_3 \cos Z_4 + \frac{z_3}{f_3}$
4	$\varepsilon_3 y_4 = H_3 \cos Y_6 +$	[illegible] $= \varepsilon_4 \cos Z_6 + \frac{z_4}{f_4}$
»	»	»
i	$\varepsilon_{i-1} y_i = H_{i-1} \cos Y_{2(i-}$	[illegible] $= \varepsilon_i \cos Z_{2(i-1)} + \frac{z_i}{f_i}$

Numéros d'ordre des couples.	Ordonnée antérieure [illegible]	[illegible]rgence du m^e couple.
1	y_1	
2	$y_2 = H_1 \cos Y +$	[illegible] $+ \frac{H_1}{f_1 f_2}\Big) y_1$

Numéros d'ordre des couples.	Ordonnée antérieure [illegible]	[illegible]rgence du m^e couple.
1	z_1	
2	$z_2 = H_1 \cos Z -$	[illegible] $+ \frac{H_1}{f_1 f_2}\Big) z_1$

[illegible]. *phys.*, T. II, page 11.

lesquelles ne sont que la traduction des équations (2) que nous avons obtenues tout-à-l'heure pour le premier couple. Seulement, d'après l'essence de ces formules, il faudra donner à l'épaisseur e, ainsi qu'à l'indice de réfraction n, les valeurs propres au couple pour lequel on fait le calcul; c'est ce que j'ai voulu exprimer, en appliquant à ces deux éléments l'indice i, du couple auquel ils appartiennent, conformément au sens général de notre notation.

Il faut toujours se rappeler que, dans ces formules, les quantités ε_i, f_i, H_i sont des fonctions dépendantes des épaisseurs centrales des couples e_i, de leurs rayons de courbure antérieurs et postérieurs r_i, r'_i, des intervalles h_i qui séparent chacun d'eux du couple suivant, et enfin de l'indice de réfraction n_i propre à chacun d'eux. En sorte qu'on a toujours

$$1-\frac{(n_i-1)}{n_i}\frac{e_i}{r'_i}=\varepsilon_i, \qquad (n_i-1)\left[\frac{\varepsilon_i}{r_i}-\frac{1}{r'_i}\right]=\frac{1}{f_i}, \qquad \frac{e_i}{n_i}+\varepsilon_i h_i=H_i.$$

Si l'on supposait les épaisseurs centrales nulles ou insensibles, ε_i deviendrait 1; f_i serait la distance focale principale du couple de rang i, et H_i sera sa distance centrale au couple suivant.

10. Lorsque les éléments d'incidence antérieurs, y_1, z_1, $\cos Y$, $\cos Z$, seront donnés pour la première surface de tout l'appareil, on en déduira immédiatement $\cos Y_2$ et y_2, $\cos Z_2$ et z_2 par les premières équations de chaque colonne. Avec ces nouveaux éléments, on obtiendra $\cos Y_4$ puis y_3, $\cos Z_4$ puis z_3; avec ceux-ci, $\cos Y_6$ puis y_4, $\cos Z_6$ puis z_4, et ainsi de suite jusqu'au dernier couple, pour lequel y_i, z_i seront les ordonnées antérieures d'incidence, et Y_{2i}, Z_{2i} les angles formés par le rayon émergent sur les axes des y ou des z. D'après ces données, jointes aux éléments ε_i, n_i, du dernier couple, on obtiendra les ordonnées d'émergence finale y'_i, z'_i, par les expressions de ces deux quantités rapportées dans le § 9.

La seconde partie du tableau, placé en regard de cette page, présente les résultats de ces calculs, effectués pour deux couples de surfaces, par les deux séries de dérivations.

11. Ici, comme dans notre notation générale, les éliminations

successives s'effectuent par des expressions toujours linéaires. Les éléments primitifs d'incidence y_1, z_1, $\cos Y$, $\cos Z$, ne pourront donc entrer qu'au premier degré dans les valeurs finales de $\cos Y_{2i}$, $\cos Z_{2i}$, y_i, z_i. Donc, si l'on représente par N_i, P_i, Q_i, R_i quatre coefficients variables avec l'indice i, mais indépendants de ces éléments primitifs, et les mêmes pour les deux séries de dérivation, les expressions finales de $\cos Y_{2i}$, y_i, $\cos Z_{2i}$, z_i, seront nécessairement de cette forme

$$\cos Y_{2i} = N_i \cos Y + P_i y_1, \qquad \cos Z_{2i} = N_i \cos Z + P_i z_1,$$
$$y_i = Q_i \cos Y + R_i y_1, \qquad z_i = Q_i \cos Z + R_i z_1;$$

ce qui donnera pour les ordonnées finales d'émergence

$$\iota_i y'_i = \left(\frac{e_i}{n_i} N_i + Q_i\right) \cos Y + \left(\frac{e_i}{n_i} P_i + R_i\right) y_1,$$
$$\iota_i z'_i = \left(\frac{e_i}{n_i} N_i + Q_i\right) \cos Z + \left(\frac{e_i}{n_i} P_i + R_i\right) z_1.$$

12. En opérant ici exactement comme nous l'avons fait pour le cas général, page 417 du premier volume, on obtiendra de même des conditions de déduction immédiates entre les quatre coefficients généraux N_i, P_i, Q_i, R_i; et l'on trouvera entre eux des relations analogues qui seront d'abord

$$(C)\quad \left\{\begin{aligned} N_i &= \iota_i N_{i-1} + \frac{Q_i}{f_i}, & \iota_{i-1} Q_i &= Q_{i-1} + H_{i-1} N_{i-1}, \\ P_i &= \iota_i P_{i-1} + \frac{R_i}{f_i}, & \iota_{i-1} R_i &= R_{i-1} + H_{i-1} P_{i-1}. \end{aligned}\right\} (C')$$

De là, en suivant toujours la même marche, on déduira qu'il existe entre les quatre coefficients une relation générale qui est

$$N_i R_i - P_i Q_i = \iota_i.$$

Enfin on prouvera aussi généralement que N_i et Q_i peuvent respectivement se déduire de P_i et de R_i, au moyen d'une simple différentiation relative à f_1, en vertu des relations

$$(D)\qquad N_i + \iota_1 f_1^2 \left(\frac{dP_i}{df_1}\right) = 0, \qquad Q_i + \iota_1 f_1^2 \left(\frac{dR_i}{df_1}\right) = 0,$$

es

$$R_5 = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \dfrac{(H_1 + H_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + H_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \varepsilon_3 + \ldots}{f_1} \\ + \dfrac{H_1(H_2 + H_3 \varepsilon_2 \varepsilon_3 + H_4 \varepsilon_2 \varepsilon_3^2 \ldots}{f_1 f_2} \\ + \dfrac{H_2(H_3 + H_4 \varepsilon_3 \varepsilon_4)}{f_2 f_3} + \dfrac{(H_3 + \ldots}{f_3} \\ + \dfrac{H_3 H_4}{f_3 f_4} \\ + \dfrac{H_1 H_2 (H_3 + H_4 \varepsilon_3 \varepsilon_4)}{f_1 f_2 f_3} + \dfrac{H_1 \ldots}{} \\ + \dfrac{H_2 H_3 H_4}{f_2 f_3 f_4} \\ + \dfrac{H_1 H_2 H_3 H_4}{f_1 f_2 f_3 f_4} \end{array} \right.$$

$$Q_5 = \frac{1}{\varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4} \left\{ H_1 + H_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + H_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \varepsilon_3 + H_4 \varepsilon_1^2 \varepsilon_3^2 \varepsilon_4^2 \ldots \right.$$

$$R_5 = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4} \left\{ 1 + \frac{(H_1 + H_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + H_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \varepsilon_3 + H_4 \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \varepsilon}{f_1} \right.$$

$$+ \frac{H_1 (H_2 + H_3 \varepsilon_2 \varepsilon_3 + H_4 \varepsilon_2 \varepsilon_3^2 \varepsilon_4)}{f_1 f_2} + \frac{(H_1}{}$$

$$+ \frac{H_2 (H_3 + H_4 \varepsilon_3 \varepsilon_4)}{f_2 f_3} + \frac{(H_2 + H_3 \varepsilon_2 \varepsilon_3) H}{f_2 f_4}$$

$$+ \frac{H_3 H_4}{f_3 f_4}$$

$$+ \frac{H_1 H_2 (H_3 + H_4 \varepsilon_3 \varepsilon_4)}{f_1 f_2 f_3} + \frac{H_1 H_4 (H_2 +}{f_1 f_2 f_4}$$

$$+ \frac{H_2 H_3 H_4}{f_2 f_3 f_4}$$

$$\left. + \frac{H_1 H_2 H_3 H_4}{f_1 f_2 f_3 f_4} \right.$$

$$Q_5 = \frac{1}{\varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4} \left\{ H_1 + H_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + H_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \varepsilon_3 + H_4 \varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \varepsilon_3^2 \varepsilon_4 + \right.$$

$$+$$

$$+$$

ont analogues à celles que nous avons trouvées pour le
, page 420, § 57. On aura donc, de même, à calculer
R_i et P_i par les dernières équations (C) et (C'), appliquées
rs successivement croissantes de l'indice i. Pour cela on
eurs valeurs pour le cas de $i=1$, lesquelles se concluent
ière ligne de notre deuxième tableau, page 11, et sont

$$\varepsilon_1, \qquad P_1 = \frac{1}{f_1}, \qquad Q_1 = 0, \qquad R_1 = 1;$$

déduira de proche en proche les expressions de R_i et
les valeurs supérieures de l'indice auxquelles on vou-
dre. Les expressions correspondantes de N_i et de Q_i se
celles-là pour chaque indice, par la différentiation re-
onformément aux équations (D). Cela revient à prendre
mes de P_i et de Q_i qui ont f_1 pour diviseur, en les
par $f_1\ \varepsilon_1$. Le tableau, placé en regard de la présente
les expressions des quatre coefficients N, P, Q, R, ainsi
ur le cas de $i=5$; et j'indiquerai tout à l'heure la ma-
réduire à une valeur inférieure de l'indice. Elles pourront
ısi, depuis une, jusqu'à cinq lentilles, comprenant dix
serait inutile d'en pousser plus loin le calcul général;
es applications réelles, il faut éviter de multiplier les
me jusqu'à ce nombre, à cause des pertes de lumières
ar l'absorption ainsi que par les réflexions partielles;
tteint, ou si on le dépasse, pour quelques instruments
vulgaire, le calcul peut toujours se séparer en deux
bjectif et les oculaires, auxquelles alors les valeurs des
pourraient être successivement appliquées. En jetant les
expressions que j'en donne, on peut remarquer qu'elles
ie la plus frappante avec celles que nous avions obte-
premier, page 423, dans le cas général où les effets des
ccessives restaient distincts; et elles leur deviennent
emblables, quand on suppose les épaisseurs des len-
eables comparativement aux rayons de courbure de
es postérieures, ce qui donne $\varepsilon_i = 1$, quel que soit i.
s les résultats que je viens d'énoncer ne sont d'au-

cune difficulté à obtenir, puisque les procédés qui y conduisent sont exactement les mêmes que nous avons suivis dans le cas général. Je n'en développerai donc pas la démonstration matérielle qui ne serait qu'une répétition des mêmes calculs. Mais je vais établir les relations qui lient les nouveaux coefficients contractés N_i, P_i, Q_i, R_i, avec ceux que nous avions formés alors pour les surfaces considérées séparément. Car ce rapprochement nous permettra de transporter ici, et d'exprimer, sans aucun nouveau calcul, toutes les conséquences auxquelles nous étions parvenus pour des systèmes de surfaces quelconques.

Afin d'éviter toute confusion qui pourrait être produite par des similitudes de lettres, j'affecterai désormais les premiers coefficients généraux obtenus pour l'indice m, d'un prime supérieur qui les distinguera. Ceci convenu, je remarque d'abord que les angles Y_{2i}, Z_{2i}, de nos formules actuelles, seront identiques aux angles Y_m, Z_m, de nos formules générales, page 417, si l'on fait dans celles-ci $m=2i$. Et comme cette identité est indépendante des valeurs particulières que peuvent avoir les éléments antérieurs d'incidence, on aura, en égalant les coefficients qui les affectent,

$$N'_{2i} = N_i; \qquad P'_{2i} = P_i.$$

Maintenant, nos ordonnées actuelles y_i, z_i, appartiennent aux incidences *antérieures* opérées sur le couple de surfaces dont le rang est i. Ce seront donc les ordonnées qui répondent à l'indice $m-1$ ou $2i-1$ dans nos premières formules. Ainsi l'on doit avoir

$$Q'_{2i-1} = Q_i; \qquad R'_{2i-1} = R_i.$$

Enfin, les ordonnées actuelles y'_i, z'_i, appartiennent aux incidences *postérieures* sur le même couple dont le rang est i. Elles répondent donc à l'indice $m = 2i$ de nos premières formules, ce qui donne

$$e_i Q'_{2i} = \frac{e_i}{n_i} N_i + Q_i; \qquad e_i R'_{2i} = \frac{e_i}{n_i} P_i + R_i.$$

14. Si l'on introduit dans ces équations, les propriétés que nous avons vu appartenir aux coefficients généraux des formules non contractées, on en déduira aussitôt les mêmes relations que

viens de rapporter dans le § 12, comme résultats du calcul direct. Par exemple, formons ici les produits $P'_{2i} Q'_{2i}$; $N'_{2i} R'_{2i}$; nous rouverons

$$\varepsilon_i P'_{2i} Q'_{2i} = \frac{e_i}{n_i} P_i N_i + P_i Q_i ; \quad \varepsilon_i N'_{2i} R'_{2i} = \frac{\varepsilon_i}{n_i} P_i N_i + N_i R_i .$$

Retranchez maintenant la première de ces équations, membre à membre de la seconde, en remarquant que par la nature des coefficients non contractés, on a toujours identiquement

$$N'_{2i} R'_{2i} - P'_{2i} Q'_{2i} = 1 ; \quad \text{il viendra} \quad N_i R_i - P_i Q_i = \varepsilon_i ,$$

ce qui est précisément une des relations annoncées § 12.

13. Il n'est pas plus difficile de démontrer aussi, par déduction, l'introduction de la nouvelle différentiation, relative à f_1, que les formules du § 12 contiennent. Pour cela, je reprends les formules relatives aux coefficients généraux non contractés, que j'avais nommées (D) à la page 421 du tome premier, et en y faisant $m = 2i$, elles deviennent

$$Q'_{2i} + \varphi_1^2 \frac{dR'_{2i}}{d\varphi_1} = 0 , \quad N'_{2i} + \varphi_2^2 \frac{dP'_{2i}}{d\varphi_1} = 0 .$$

Nous faisions alors, page 415,

$$\frac{1}{\varphi_1} = \frac{u_1 - u}{r_1} = \frac{n_1 - 1}{r_1} ;$$

et nous faisons à présent

$$\frac{1}{f_1} = (n_1 - 1) \left[\frac{\varepsilon_1}{r_1} - \frac{1}{r'_1} \right] ,$$

où il faut remarquer que ε_1 ne contient pas r_1. De là on tire

$$\frac{1}{f_1} = \frac{\varepsilon_1}{\varphi_1} - \frac{(n_1 - 1)}{r'_1} .$$

différentiant les deux membres par rapport à φ_1, qui seul contient r_1, il vient

$$\frac{df_1}{d\varphi_1} = \frac{\varepsilon_1 f_1^2}{\varphi_1^2} ;$$

on aura donc généralement

$$\left(\frac{dR'_{2i}}{d\varphi_1}\right) = \left(\frac{dR'_{2i}}{df_1}\right)\frac{df_1}{d\varphi_1} = \frac{\varepsilon_1 f_1^2}{\varphi_1^2}\frac{dR'_{2i}}{df_1},$$
$$\left(\frac{dP'_{2i}}{d\varphi_1}\right) = \left(\frac{dP'_{2i}}{df_1}\right)\frac{df_1}{d\varphi_1} = \frac{\varepsilon_1 f_1^2}{\varphi_1^2}\left(\frac{dP'_{2i}}{df_1}\right).$$

Substituant ces valeurs dans les deux équations de condition d
nées entre les anciens coefficients, φ_1^2 disparaît et il reste

$$Q'_{2i} + \varepsilon_1 f_1^2 \frac{dR'_{2i}}{df_1} = 0, \qquad N'_{2i} + \varepsilon_1 f_1^2 \frac{dP'_{2i}}{df_1} = 0.$$

Maintenant, remplacez les anciens coefficients de l'indice $2i$,
leurs équivalents nouveaux, trouvés tout à l'heure page 14; i
résultera

$$\frac{e_i}{n_i}\left(N_i + \varepsilon_1 f_1^2 \frac{dP_i}{df_1}\right) + Q_i + \varepsilon_1 f_1^2 \left(\frac{dR_i}{df_1}\right) = 0,$$
$$N_i + \varepsilon_1 f_1^2 \left(\frac{dP_i}{df_1}\right) = 0,$$

qui, existant ensemble, donnent les deux équations (D) du § 1

16. Si l'on voulait déduire aussi des anciens coefficients
équations (C), (C′) du § **12**, il faudrait remarquer que cell
procédant par des valeurs de i toujours paires, N_{i-1} corresp
à N'_{m-2}, et P_{i-1} à P'_{m-2}, m étant pair. Il faudrait donc repre
les anciennes équations du tome premier, page 418, et en tire
relations immédiates entre N'_m et N'_{m-2} comme entre P_m et P_n
ce qui serait facile. Alors, en y introduisant les contraction
notre notation actuelle, on retomberait sur les nouvelles équat
(C) et (C′). Mais il est bien plus simple de les obtenir par
formation immédiate, avec cette notation, comme je l'ai supp

17. En les admettant, on en tirera les expressions cont
tées des coefficients, pour autant de lentilles que l'on vou
Le tableau, mis en regard de la page 13, contient ces exp
sions, effectuées pour le cas de cinq lentilles, ce qui suffira
toutes les applications que nous aurons à faire aux instrum
usuels. J'exposerai ci-après, dans le § **19**, les conditions analyti

de limitation qu'il faudra y introduire pour les restreindre immédiatement à tout nombre moindre qui serait proposé.

18. Mais d'abord, afin d'éviter tout embarras dans l'usage de ces expressions, je rappelle ici les conventions faites sur la signification des lettres ε, f, H, dans le § 9. Soit une lentille dont le rang est i. Son rayon antérieur de courbure est r_i; le postérieur r'_i; son épaisseur centrale e_i; l'indice de réfraction pour la matière dont elle est faite, et pour l'espèce d'éléments lumineux que l'on considère, est n_i, la lumière étant supposée passer de l'air ambiant dans la matière de la lentille; enfin, h_i est l'intervalle compris sur l'axe central du système, entre le centre de figure postérieur de cette lentille et l'antérieur de la lentille suivante. Cela posé, l'on a

$$\varepsilon_i = 1 - \frac{(n_i - 1)}{n_i}\frac{e_i}{r'_i}, \qquad \frac{1}{f_i} = (n_i - 1)\left(\frac{\varepsilon_i}{r_i} - \frac{1}{r'_i}\right), \qquad H_i = \frac{e_i}{n_i} + \varepsilon_i h_i.$$

Quand l'épaisseur centrale de la lentille est nulle, ε_i devient 1; f_i exprime la distance focale principale de la lentille, et H_i est égal à l'intervalle central h_i qui la sépare de la lentille suivante. Si l'on conçoit un assemblage de m lentilles auxquelles cette supposition soit applicable, les coefficients N_m, P_m, Q_m, R_m, deviennent exactement de même forme que ceux qu'on aurait pour m surfaces, et qui ont été définis tome Ier, page 423. Il n'y a de différence qu'en ce que les lettres φ, qui exprimaient alors les distances focales des surfaces isolées, se trouvent remplacées par les lettres f, qui expriment les distances focales principales des lentilles, et que les H_1, H_2, ..., sont remplacées par leurs intervalles successifs. Dans cette même condition de nullité des épaisseurs centrales, les coefficients non contractés N'_{2i}, P'_{2i}, Q'_{2i}, R'_{2i} de la page 14 deviennent respectivement égaux aux coefficients contractés N_i, P_i, Q_i, R_i, et l'on a, en outre,

$$Q'_{2i} = Q'_{2i-1}, \qquad R'_{2i} = R'_{2i-1}.$$

Cela résulte des relations établies à l'endroit cité, en y faisant e_i nul et $\varepsilon_i = 1$; mais on pouvait aisément le prévoir d'avance.

Les coefficients N, P, Q, R étant ainsi obtenus sous leur forme contractée, pour un certain nombre i de lentilles d'épaisseur quel-

conque, il n'y a qu'à les substituer dans les formules générales

$$\cos Y_{2i} = N_i \cos Y + P_i y_1, \qquad \cos Z_{2i} = N_i \cos Z + P_i z_1,$$
$$y_i = Q_i \cos Y + R_i y_1, \qquad z_i = Q_i \cos Z + R_i z_1,$$
$$\varepsilon_i y'_i = \left(\frac{e_i}{n_i} N_i + Q_i\right) \cos Y + \left(\frac{e_i}{n_i} P_i + R_i\right) y_1,$$
$$\varepsilon_i z'_i = \left(\frac{e_i}{n_i} N_i + Q_i\right) \cos Z + \left(\frac{e_i}{n_i} P_i + R_i\right) z_1,$$

et l'on en tirera aussitôt les angles d'émergence finale Y_{2i}, Z_{2i}, du rayon lumineux dont on se sera donné les éléments antérieurs d'incidence. On aura aussi les coordonnées latérales y_i, z_i, y'_i, z'_i, du point où il perce les surfaces antérieures et postérieures de la dernière lentille; de sorte que tous ses éléments d'émergence seront complétement déterminés.

19. Il ne reste plus qu'à voir quelles réductions il faut faire subir aux expressions des coefficients, pour les transporter immédiatement de l'indice i à tout autre indice m, inférieur à i. Cela peut se faire de plusieurs manières, parmi lesquelles j'indiquerai seulement la suivante comme me paraissant la plus simple.

Considérons d'abord les angles d'émergence Y_{2m}, Z_{2m}; il est évident qu'ils coïncideront avec Y_{2i} et Z_{2i}, si l'on suppose que les lentilles postérieures à la $m^{ième}$ sont de simples plaques planes à faces parallèles. Cette supposition rendant infinis les rayons de courbure de ces lentilles idéales, il en résultera pour elles

$$\varepsilon_{m+1} = 1, \qquad \varepsilon_{m+2} = 1, \ldots, \text{ etc.},$$
$$f_{m+1} = \infty, \qquad f_{m+2} = \infty, \ldots, \text{ etc.}$$

Ainsi, en substituant ces valeurs dans N_i et P_i, leurs expressions se réduiront à N_m et P_m.

Pour avoir les deux autres coefficients Q_m et R_m, je reprends, dans le § **12**, les relations générales

$$N_i = \varepsilon_i N_{i-1} + \frac{Q_i}{f_i}, \qquad P_i = \varepsilon_i P_{i-1} + \frac{R_i}{f_i}.$$

Je remarque d'abord que N_{i-1} et P_{i-1} ne contiennent pas la lettre f_i qui appartient à un indice ultérieur; et, d'après les équations (C)'

qui règlent la formation de Q_i et de R_i, dans ce même § 12, la lettre f_i ne s'introduit pas non plus dans ces deux coefficients. Conséquemment f_i n'entre dans N_i que comme diviseur de Q_i, et dans P_i comme diviseur de R_i. Alors si l'on différentie ces deux équations relativement à f_i seul, on en tire

$$Q_i + f_i^2 \frac{dN_i}{df_i} = 0, \qquad R_i + f_i^2 \frac{dP_i}{df_i} = 0.$$

Cela veut dire que Q_i se compose uniquement des termes de N qui contiennent f_i, en les multipliant par f_i; et R_i peut se déduire de P_i par le même procédé. C'est en effet ce que l'on peut vérifier sur les valeurs de ces coefficients, pour $i = 5$, que nous venons de former directement.

D'après cela, quand N_m et P_m seront déduits de N_i et P_i par les réductions expliquées tout à l'heure, on en tirera ensuite Q_m et R_m par ces dernières relations.

Par exemple, on demande les expressions des quatre coefficients pour $m = 3$; alors il faudra d'abord faire

$$\begin{aligned} \varepsilon_4 &= 1, & \varepsilon_5 &= 1, \\ f_4 &= \infty, & f_5 &= \infty; \end{aligned}$$

N_5, P_5, réduits par ces conditions, deviendront N_3 et P_3, ..; on aura ainsi

$$N_3 = \frac{1}{\varepsilon_2}\left(\varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \varepsilon_3 + \frac{H_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}{f_2} + \frac{(H_2 + H_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2)}{f_3} + \frac{H_1 H_2}{f_2 f_3}\right),$$

$$P_3 = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \varepsilon_3}{f_1} + \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \frac{H_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}{f_1 f_2} + \frac{(H_1 + H_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2)}{f_1 f_3} + \frac{H_2}{f_2 f_3} + \frac{H_1 H_2}{f_1 f_2 f_3}\right);$$

puis, prenant les seuls termes de ces expressions qui sont divisés par f_3, et les multipliant par f_3, il viendra

$$Q_3 = \frac{1}{\varepsilon_2}\left(H_1 + H_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \frac{H_1 H_2}{f_2}\right),$$

$$R_3 = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\left(1 + \frac{H_1 + H_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2}{f_1} + \frac{H_2}{f_2} + \frac{H_1 H_2}{f_1 f_2}\right).$$

Ce sont en effet les valeurs que l'on aurait obtenues directement

par l'élimination, et l'on peut remarquer qu'elles présentent entre N_3 et P_3, comme entre Q_3 et R_3, le mode de dérivation différentiel relatif à f_1 que nous avons d'abord démontré généralement exister. Le mode particulier de déduction que j'ai employé ici pour obtenir Q et R, après avoir trouvé N et P, est nécessité par la distinction du rang des surfaces auxquelles ces deux couples de coefficients appartiennent. En effet, N_i et P_i servant à déterminer les angles d'émergence finale, appartiennent à des surfaces postérieures ou de rang pair; au lieu que Q_i et R_i, servant à déterminer les ordonnées latérales d'incidence antérieures, appartiennent à des surfaces de rang impair. C'est ce qui empêche d'employer ici la méthode de réduction commune à ces coefficients, qui nous a servi page 324 du premier volume, lorsque les surfaces étaient considérées isolément et non par couples. Car alors les quatre coefficients généraux appartenaient à la même surface.

Règle analytique pour former directement les quatre coefficients généraux propres à un système optique quelconque, ou à un système purement dioptrique dont les lentilles sont extérieurement contiguës à un même milieu ambiant.

20. Quoique les tableaux renfermés dans les pages précédentes, et ceux qui ont été annexés à la page 423 du premier volume, suffisent pour former les quatre coefficients généraux dans tous les cas auxquels s'étendent les applications usuelles, il ne sera pas sans intérêt de montrer comment on peut directement les obtenir pour tout nombre donné m de surfaces, ou de lentilles réfringentes, en s'exemptant du travail pénible de l'élimination.

A cet effet, je reprends d'abord les formules relatives aux systèmes optiques quelconques, dont les surfaces constituantes sont introduites individuellement dans le calcul. Pour ce cas général, qui comporte aussi des expressions plus uniformes, les coefficients P_m et R_m, s'obtiennent d'abord par l'élimination successive entre les deux équations suivantes établies page 422 du premier volume :

$$R_m = R_{m-1} + H_{m-1} P_{m-1}; \qquad P_m = P_{m-1} + \frac{R_m}{\varphi_m}.$$

Tableau de la formation du coefficie

Soit généralement

$$\pi_m$$

les indices successifs de la lettre φ étant rang
une somme de termes qui auront individuell
entre eux ; et la forme de ces termes pour les

Termes à dénominateur simple.....

à dénominateur binaire.....

à dénominateur ternaire....

à dénominateur quaternaire.

etc.

On continuera de procéder suivant cette l
l'unité, jusqu'au nombre donné m inclusiv
les trois autres coefficients correspondants a
férentiels de P_m, relatifs aux lettres extrême
aux valeurs de m égales ou inférieures à 5.
annexé à la page 423 du premier volume, et c
termes se présenteront écrits dans un ordre d

On peut ramener P_m à dépendre d'une équa
sont données. Pour cela, considérant les de
fonction de P seul ; et chassant R de la premi

$$P_m = \varphi_{m-1} \left(\right.$$

qui est l'équation cherchée. Les valeurs initia
médiate, tome 1er, page 416 ; ce sont :

$$P_1 =$$

La règle de formation de P_m prescrite ci-dessu
cial de ces valeurs attribuées à P_1 et P_2.

Lorsqu'ils sont ainsi connus pour le nombre donné m de surfaces que l'on veut considérer, on en déduit les deux autres Q_m et N_m, par la simple différentiation relativement à la lettre φ_1, comme on l'a vu page 423; et l'on a ainsi

$$Q_m = -\varphi_1^2 \frac{dR_m}{d\varphi_1}, \qquad N_m = -\varphi_1^2 \frac{dP_m}{d\varphi_1},$$

les diverses quantités représentées par les lettres φ et H pour les divers indices, ayant la signification que nous leur avons attribuée alors, page 415.

D'après la forme des deux premières équations, on voit d'abord que la lettre φ_m n'entre point dans R_m. Car R_{m-1} et P_{m-1} ne contiennent que des quantités dont les indices sont antérieurs à m; et H_{m-1} est indépendant des φ. Par suite, φ_m ne s'introduit dans l'expression de P_m, que comme dénominateur de R_m. Conséquemment, si l'on différentie l'expression de P_m, relativement à la lettre φ_m, considérée comme seule variable, R_m devant être alors traité comme constante, il en résultera

$$R_m = -\varphi_m^2 \frac{dP_m}{d\varphi_m}.$$

Cette expression, introduite dans Q_m, permet de le conclure de P_m, et, en y joignant celle de N_m qui présente un mode de dérivation analogue, on aura, en définitive,

$$N_m = -\varphi_1^2 \frac{dP_m}{d\varphi_1}; \qquad Q_m = +\varphi_1^2 \varphi_m^2 \frac{d^2P_m}{d\varphi_1\, d\varphi_m}; \qquad R_m = -\varphi_m^2 \frac{dP_m}{d\varphi_m}.$$

D'après cela il suffit que l'on sache former directement P_m. Car, ce seul coefficient obtenu, les trois autres s'en dériveront pour la même valeur de l'indice m par les différentiations indiquées. Or P_m peut être formé par la règle exprimée dans le tableau placé ici en regard de la présente page.

21. Je vais maintenant appliquer un mode semblable à la formation des quatre coefficients contractés propres aux systèmes purement dioptriques, dont les surfaces sont extérieurement contiguës à un même milieu ambiant. Pour cela, les désignant par les mêmes

lettres, affectées de l'indice quelconque i, qui exprime le nombre total des lentilles dont se compose le système considéré, je commence par les ramener à dépendre aussi du seul d'entre eux que nous avons nommé P_i. Cette réduction est très-facile. Car déjà, dans la première discussion à laquelle nous les avons soumises, page 12, nous avons obtenu les deux relations

$$N_i = -\varepsilon_1 f_1^2 \frac{dP_i}{df_1}, \qquad \text{et} \qquad Q_i = -\varepsilon_1 f_1^2 \frac{dR_i}{df_1}.$$

Mais, en outre, dans la page 19, nous en avons trouvé une troisième qui est

$$R_i = -f_i^2 \frac{dP_i}{df_i},$$

laquelle se démontre précisément comme son analogue pour les coefficients non contractés. Substituant celle-ci dans la seconde, et rassemblant les résultats, on aura, en définitive,

$$N_i = -\varepsilon_1 f_1^2 \frac{dP_i}{df_1}; \quad Q_i = +\varepsilon_1 f_1^2 f_i^2 \frac{d^2 P_i}{df_1\, df_i}; \quad R_i = -f_i^2 \frac{dP_i}{df_i}.$$

Ainsi il suffira de savoir former directement P_i pour en dériver les trois autres coefficients par de simples différentiations. On retrouve ici l'analogie que nous avons remarquée page 17, entre les formes des coefficients propres à un système quelconque de simples surfaces, et ceux qui appartiennent à un système de lentilles dont les épaisseurs centrales sont négligeables. Car cette supposition rendant ε_1 égal à $+1$, les trois relations précédentes deviennent exactement semblables à celles que nous avons trouvées dans le paragraphe précédent, pour un nombre quelconque m de surfaces distinctes.

Maintenant, pour obtenir le coefficient P_i, je lui donne d'abord cette forme

$$P_i = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_{i-1}} S_i;$$

puis, cherchant S_i, je fais généralement

$$\pi_i = f_1 f_2 f_3 \ldots f_n \ldots f_p \ldots f_q \ldots\ldots f_i,$$

tation contractée, seront λ_i, λ'_i. Désignons toujours par ${}_cX$ la demi-amplitude du champ apparent, limitée par un rayon lumineux d'une certaine réfrangibilité, qui, ayant percé la première de toutes les surfaces à son centre de figure, se rend finalement au point oculaire où le centre de la pupille est supposé fixe. En appliquant à ces circonstances les coefficients non contractés, avec la seule modification de $u = u_m = 1$, on aura, comme dans la page 553 du premier volume,

$$\lambda_i = Q'_{2i-1} \sin {}_cX, \qquad \lambda'_i = Q'_{2i} \sin {}_cX.$$

Remplaçant donc Q'_{2i-1} et Q_{2i} par leurs expressions générales en coefficients contractés trouvées page 14, il viendra, en fonction de ces nouveaux coefficients,

$$\lambda_i = Q_i \sin {}_cX, \qquad \varepsilon_i \lambda'_i = \left(\frac{e_i}{n_i} N_i + Q_i\right) \sin {}_cX.$$

On pourra ainsi calculer immédiatement ${}_cX$ par ces nouvelles formules, pour les deux faces de la lentille dont le rang est i. Si un diaphragme intérieur est placé *en avant* de cette lentille, à une distance h_{i-1} *après* celle qui la précède, on le considérera comme une surface *antérieure*, appartenant à une lentille idéale dont le rang est i, et pour laquelle Q_i doit être calculé avec la valeur attribuée à h_{i-1}.

En effectuant ce calcul pour toutes les surfaces, et pour tous les diaphragmes, dont les demi-diamètres d'ouverture seront donnés, la plus petite des valeurs de ${}_cX$ qui en résultera sera la demi-amplitude du champ apparent que le centre de la pupille percevra étant placé au point oculaire. Si ce point était intérieur à l'instrument, en sorte que l'on ne pût mieux faire que d'appliquer extérieurement la pupille contre la dernière lentille pour l'en rapprocher le plus possible, il faudrait considérer le demi-diamètre ω de cet organe comme appartenant à un diaphragme placé sur la dernière surface du système total. Alors, en désignant par m le nombre total des lentilles dont l'instrument se compose, il en résulterait la condition de transmission

$$\varepsilon_m \omega = \left(\frac{e_m}{n_m} N_m + Q_m\right) \sin {}_cX,$$

elle concourrait avec les autres pour déterminer la plus petite r de $_eX$ qui limite le champ apparent ainsi observé; et ce p sera propre à la réfrangibilité particulière pour laquelle ra effectué le calcul.

t cela est conforme à ce que nous avons démontré dans le cas l; et ici, de même qu'alors, quand on connaîtra tous les élé- constitutifs de l'appareil, si l'on se donne la valeur *efficace* ou de λ'_i pour une seule lentille de rang connu, cette condi- déterminera les valeurs analogues pour toutes les autres, ainsi pour les diaphragmes interposés. Car ce λ_i ou λ'_i donné fera aître $_eX$ qui y correspond; et $_eX$ étant connu, tous les autres l-diamètres efficaces, tant antérieurs que postérieurs aux len- , le seront d'après leurs rang et place, en leur appliquant aleurs des coefficients contractés qui y correspondent.

. On peut encore former une expression contractée de $_eX$ ana- e à celle que nous avons obtenue, page 563 du premier volume, r des systèmes quelconques. Mais, lorsqu'on veut ne pas né- r les épaisseurs centrales, elle ne s'établit avec simplicité ntre les demi-diamètres d'ouverture des surfaces antérieures lentilles. On la déduit alors des équations contenues dans la rième colonne du tableau de la page 11, en les appliquant à ayon lumineux dont le trajet s'opère entièrement dans le des xz, ce qui, d'après notre manière de compter les angles onne généralement $\sin X_n = \cos Z_n$, soit qu'on prenne le nom- pair ou impair. Suivant donc ici l'analogie indiquée par le énéral, je fais, pour abréger,

$$\frac{\lambda_1}{f_1} = \pi_1, \qquad \frac{\lambda_2}{f_2} = \pi_2, \ldots, \qquad \frac{\lambda_i}{f_i} = \pi_i.$$

qu'on applique les équations citées au trajet du rayon lumi- qui borde le champ, les ordonnées z_i deviennent égales aux -diamètres efficaces λ_i pris avec leurs grandeurs et leurs signes res. Mais, pour éliminer tous les angles X intermédiaires entre xtrêmes, comme nous l'avons fait dans le cas général, il faut ifier l'opération, à cause des coefficients ε qui les affectent; et me les produits successifs de ces coefficients s'y introduisent,

je fais, par abréviation :

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_i = (\varepsilon_1 \varepsilon_i); \quad \varepsilon_2 \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_i = (\varepsilon_2 \varepsilon_i); \quad \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_i = (\varepsilon_3 \varepsilon_i),$$

Alors, en multipliant la première des équations de la page 11 p[illegible] seconde de ces quantités, la seconde par la troisième, et ainsi [illegible] suite, puis les ajoutant toutes ensemble, les angles intermédi[illegible] disparaissent, comme on le désirait, et l'on a généralement

$$\sin X_{2i} = (\varepsilon_1 \varepsilon_i) \sin X + (\varepsilon_2 \varepsilon_i)\pi_1 + (\varepsilon_3 \varepsilon_i)\pi_2 + (\varepsilon_4 \varepsilon_i)\pi_3 + \ldots + \varepsilon_i \pi_{i-1} + [illegible]$$

Si nous appliquons cette équation à un rayon lumineux qui [illegible] percé la première surface à son centre de figure, il faudra faire [illegible] nul, ce qui supprime π_1 ; et en caractérisant par l'indice c l[illegible] angles extrêmes X propres à un tel rayon, il reste simplement

$$\sin_c X_{2i} = (\varepsilon_1 \varepsilon_i) \sin_c X + (\varepsilon_3 \varepsilon_i)\pi_2 + \ldots + \varepsilon_i \pi_{i-1} + \pi_i.$$

Or, en exprimant l'angle final X_{2i} en fonction des coefficients contractés de l'appareil, et le limitant aussi à un rayon incident central, les formules générales de la page 18 donnent

$$\sin_c X_{2i} = N_i \sin_c X.$$

Puisque ces deux valeurs de $\sin_c X_{2i}$ doivent s'accorder et subsister ensemble, il en résulte

$$\sin_c X = \frac{(\varepsilon_3 \varepsilon_i)\pi_2 + \ldots + \varepsilon_i \pi_{i-1} + \pi_i}{N_i - (\varepsilon_1 \varepsilon_i)}.$$

C'est l'expression cherchée du champ apparent, en fonction du grossissement angulaire N_i, et des ouvertures efficaces propres aux surfaces antérieures des lentilles, le centre de la pupille étant placé au point oculaire H qui appartient à l'espèce de rayons lumineux que l'on a considérés. Si l'on suppose les lentilles infiniment minces, tous les coefficients $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i$ deviennent égaux à 1. Les $f_1, f_2, \ldots, f_i$ représentent alors les distances focales principales des lentilles ; et la formule se retrouve la même qu'Euler a donnée pour ces conditions restreintes. Les quantités $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_i$, sont ce qu'il appelle les *raisons des ouvertures*.

Dans la réalité des applications, où les épaisseurs ne sont pas nulles, les coefficients ε sont toujours positifs, et peu différents de l'unité. Mais ils sont moindres que 1 quand la surface postérieure de la lentille à laquelle ils s'appliquent est concave vers les points rayonnants, et plus grands que 1 quand elle est convexe. D'après cela, celles des quantités $\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_i$, qui sont de signe contraire entre elles, rétrécissent l'amplitude du champ; et, dans le cas des lentilles infiniment minces, la plus grande valeur de cette amplitude, pour un grossissement donné, s'obtient quand ces quantités, étant toutes de même signe, ont individuellement les plus grandes valeurs que permettent les conditions de l'approximation. Les valeurs des coefficients ε dans les lentilles réelles modifient un peu cet énoncé; mais, lorsque le grossissement angulaire N_i est un grand nombre, comme cela a lieu ordinairement dans les instruments astronomiques, leur influence est évidemment plus sensible sur le numérateur de $\sin_\varepsilon X$ que sur son dénominateur.

25. Dans le calcul préparatoire de ces instruments, on a coutume de prendre $\pi_i = \frac{1}{4}$ pour la dernière lentille de l'oculaire. Il en résulte donc $\lambda_i = \frac{1}{4} f_i$; c'est-à-dire qu'en négligeant l'épaisseur de cette lentille, le demi-diamètre de son ouverture efficace serait égal au quart de sa distance focale principale.

Pour voir les conséquences de cette supposition, sur les dernières incidences des rayons émergents, faisons la lentille dont il s'agit plane sur sa face postérieure, ce qui est la forme qu'on lui donne habituellement. Alors, en prenant les expressions générales

$$\varepsilon_i = 1 - \frac{(n_i - 1)}{n_i} \frac{e_i}{r'_i}, \qquad \frac{1}{f_i} = (n_i - 1)\left(\frac{\varepsilon_i}{r_i} - \frac{1}{r'_i}\right),$$

la valeur infinie attribuée à r'_i donnera

$$\varepsilon_i = 1; \qquad \frac{1}{f_i} = \frac{n_i - 1}{r_i}, \qquad \text{et par suite} \qquad \lambda_i = \frac{r_i}{4(n_i - 1)}.$$

Si, pour fixer les idées, on suppose que la lentille est faite avec une espèce de verre dans lequel l'indice de réfraction moyen n_i soit 1,5, il en résultera, relativement aux rayons de moyenne ré-

frangibilité,

$$f_i = 2r_i, \qquad \lambda_i = \tfrac{1}{2} r_i.$$

En considérant la lentille comme sans épaisseur, f_i serait sa distance focale principale, § 7. Mais, quelle que soit son épaisseur, comme nous faisons sa seconde surface plane, cette quantité, prise avec un signe contraire, représente *exactement* sa distance focale principale *réciproque* (*). La valeur de l'ordonnée efficace λ_i ainsi conclue, se trouve comprise dans la limite $\frac{6}{10} r_i$ que l'on donne aux ordonnées extrêmes des lentilles oculaires en les fabriquant, comme je l'ai annoncé dans le tome premier, page 596. Ainsi le rayon qui borde le champ, et auquel appartient cette ordonnée efficace, traverse la dernière lentille de l'oculaire sans atteindre ses bords, ce qu'en effet il faut toujours éviter.

26. Cette dernière lentille étant ainsi construite pour admettre l'ordonnée efficace extrême $\frac{1}{2} r_i$, mettons-la ainsi à sa place dans l'instrument que nous supposerons préparé pour un œil infiniment presbyte : c'est ce que représente la *fig.* 1. Marquons en C le centre de courbure de la surface antérieure, et prenons IP égal au demi-diamètre d'ouverture efficace λ_i. D'après les valeurs trouvées tout à l'heure, IP sera $\frac{1}{2}$ CI ; et par conséquent l'angle ICP sera de 30°. Cet angle est le ξ de nos formules fondamentales, t. Ier, p. 376; et il paraît bien considérable pour que son sinus, qui est $\frac{1}{2}$ ou 0,5, puisse être introduit dans notre approximation, en négligeant son cube qui est 0,125. Si l'on conçoit un faisceau de rayons émergents parallèle à l'axe central, qui remplisse l'ouverture efficace IPI, les rayons extrêmes IR de ce faisceau auraient en I un angle d'émergence intérieur CIR égal à 30°. Cela exigerait un angle d'incidence NIF égal à 48° 35′ 25″, en pre-

(*) Cela se voit aisément par les formules générales du premier volume. Dans un système optique quelconque, la distance focale principale réciproque F_r est, d'après la page 455, $-\frac{Nu}{P}$. Or pour une lentille à face postérieure plane, et observée dans l'air, les expressions de la page 593 donnent :

$$N = 1, \qquad P = \frac{n-1}{r'}; \qquad \text{donc} \qquad F_r = -\frac{r'}{n-1} = -f_i.$$

nant $n_i = 1,5$, comme nous l'avons fait; et, par suite, l'angle IFC serait de 18° 35′ 25″. Alors, en résolvant le triangle FIC avec ces données, on trouverait $CF = 2,352576.CI$, par conséquent, $A_iF = 1,352576.CI$. Mais les rayons plus intérieurs du faisceau émergent, auraient dû partir de points plus éloignés que F du centre de figure A_i; et les plus voisins de l'axe central auraient eu pour origine commune le point F_r, qui est le foyer principal réciproque de la lentille, lequel, d'après nos formules, serait ici à une distance $A_iF_r = 2CI$. De sorte que l'aberration totale de sphéricité entre ceux-ci et les rayons extrêmes, c'est-à-dire FF_r, serait $0,647424.CI$. On ne pourrait donc réaliser le parallélisme d'un faisceau émergent si large, qu'en supposant que les lentilles antérieures eussent préalablement dispersé ses foyers partiels sur une étendue aussi grande de l'axe central, ce que l'on s'efforce au contraire d'éviter. Inversement, si l'on amenait en F un point lumineux réel, ou formé par les lentilles antérieures, et que sa radiation pût couvrir toute l'ouverture IPI, que nous avons admise comme efficace, les rayons extrêmes FI sortiraient seuls par la face plane de la lentille, suivant des directions parallèles à l'axe central; et tous les autres divergeraient à partir de divers points de cet axe beaucoup antérieurs à F; ce qui produirait une discordance d'effets intolérable. Cette alternative de résultats également fautifs semblerait donc montrer que l'on ne devrait jamais donner à la dernière lentille de l'oculaire une ouverture aussi grande que nous l'avons supposé; et pourtant on le fait avec succès. Mais le dénouement de ce paradoxe consiste en ce que, dans les appareils dioptriques, le pinceau transmis qui vient rayonner ainsi sur la dernière lentille, à partir d'un point de l'axe central, n'a jamais, à beaucoup près, une amplitude de radiation assez grande pour couvrir l'ouverture entière qu'on donne à sa surface antérieure. Il est toujours restreint convenablement par l'action des lentilles précédentes. Par exemple, s'il provient d'un faisceau incident parallèle à l'axe central, ayant pour diamètre primitif $2\lambda_1$, et qu'il doive être encore parallèle à cet axe dans son émergence, il est alors réduit au diamètre $\frac{2\lambda_1}{N_i}$, N_i étant le grossissement an-

gulaire, t. Ier, p. 436. De sorte qu'avant de sortir sous cette forme, il constituait un pinceau intérieur dont la radiation ne couvrait qu'une petite portion de la dernière lentille près de son centre de figure A_i. Les pinceaux latéraux intérieurs, qui proviennent de rayons incidents primitivement obliques à l'axe central, étant amincis de même, ne couvrent aussi que des portions superficielles très-restreintes de la dernière lentille, d'où résultent également des aberrations de sphéricité peu différentes pour les rayons lumineux qui les composent. Et cette limitation de leur amplitude est la circonstance qui permet de les recevoir, simultanément avec le pinceau central, sur une étendue sphérique aussi grande que celle qu'on attribue à la dernière lentille oculaire, au moins théoriquement.

27. Néanmoins, il importe toujours de rétrécir cette étendue dans les moindres limites possibles pour chaque valeur de grossissement angulaire et d'amplitude du champ que l'on a l'intention d'obtenir; et ici, comme dans le cas général, tome Ier, page 565, l'expression de $\sin_c X$ en N_i fournit des indications très-utiles sur les moyens d'effectuer une telle atténuation. En effet, elle donne

$$[N_i - (\varepsilon_1 \varepsilon_i)] \sin_c X = (\varepsilon_3 \varepsilon_i) \pi_2 + \ldots + \varepsilon_i \pi_{i-1} + \pi_i.$$

Alors, en reprenant les mêmes raisonnements que nous avons faits sur le cas général, et considérant, pour plus de simplicité, les $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_i$ comme égales à l'unité, dont elles diffèrent à peine, on aura des résultats exactement pareils, qu'il nous suffira de rappeler.

1°. Si les quantités $\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_i$, sont tout-à-fait arbitraires, il faudra les faire toutes de même signe entre elles, et leur donner une valeur égale qui sera

$$\frac{(N_i - 1) \sin_c X}{i - 1};$$

2°. Si les particularités prescrites à l'instrument exigent que l'on partage ces quantités en deux groupes de signe contraires $\Pi - \varpi$, et que ϖ ne puisse pas être moindre que S^2, il faudra donner à ϖ cette valeur limite, et déterminer le groupe positif Π

de manière à satisfaire l'équation; après quoi l'on fera tous les éléments de chaque groupe égaux entre eux et de même signe;

3°. Enfin, si ces éléments ainsi déterminés entraînent quelque condition physique que l'on ne puisse pratiquement admettre, il faudra s'en écarter aussi peu que possible, et justement autant qu'il est nécessaire pour que l'inconvénient dont il s'agit n'ait plus lieu. Mais il ne sera indispensablement nécessaire de s'astreindre à ces précautions, qu'autant que l'on voudra concilier une valeur assignée du grossissement angulaire N_i avec la plus grande étendue de champ qui puisse y correspondre, sans excéder les limites de petitesse que notre approximation impose aux angles d'incidence et d'émergence des rayons lumineux sur les diverses surfaces de l'appareil. Car, ainsi que nous l'avons déjà remarqué dans le cas général, si l'on avait seulement à étudier des objets qui soutendent un angle visuel extrêmement petit, on pourrait sans inconvénient restreindre l'étendue du champ 2_eX qu'on associe au grossissement N_i, jusqu'à ce que le produit..... $[N_i - (\varepsilon_1 \varepsilon_i)] \sin_e X$ atteignît un degré de petitesse tel, qu'on pût le reproduire avec des valeurs de $\pi_2 \ldots \pi_i$, suffisamment faibles.

29. En exceptant ce cas spécial, la facilité de concilier l'étendue du champ avec la puissance du grossissement, et la possibilité d'approprier en outre l'instrument de la manière la plus favorable aux particularités d'effet qu'on veut qu'il produise, sont des avantages considérables, qui dépendent surtout de la constitution du système oculaire, et l'on ne peut les obtenir qu'en composant ce système non d'une seule lentille, mais de plusieurs. Pour comprendre ce résultat important, considérons d'abord les appareils purement dioptriques. Leur système objectif est généralement composé de lentilles en contact, ou presque en contact entre elles; de sorte que leur ensemble a toujours une épaisseur centrale très-petite, comparativement à sa distance focale actuelle. Alors, quand un rayon lumineux perce la première surface de ce système à son centre de figure, en formant avec l'axe central un très-petit angle $_eX$, comme cela est toujours nécessaire pour qu'un tel rayon soit admissible dans notre approximation, il coupe toutes

les surfaces suivantes de l'objectif à de très-petites distances de cet axe. Ceci étant appliqué au rayon à incidence centrale qui borde le champ dans le plan des xz, son ordonnée antérieure d'incidence λ_1 sera d'abord nulle par définition; puis toutes les suivantes sur les lentilles du système objectif, c'est-à-dire $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$, seront très-petites et presque insensibles, comparativement aux quantités $f_2, f_3, \ldots$; ce qui rendra presque nulles les quantités $\pi_2, \pi_3, \ldots$, qui dépendent de ces lentilles dans l'expression de $\sin {}_cX$. Ce rayon ne pourra donc avoir des ordonnées efficaces un peu grandes qu'en arrivant à des lentilles notablement distantes des premières, comme celles dont les oculaires sont composés; et ainsi l'amplitude de l'angle ${}_cX$ résultera principalement, ou même presque uniquement, des valeurs de $\pi_i, \pi_{i-1}, \pi_{i-2}, \ldots$, propres à ces dernières lentilles. Or, quoique la minceur des pinceaux qu'elles reçoivent permette d'agrandir ces rapports beaucoup plus qu'on ne le ferait pour une radiation d'amplitude indéfinie, il est cependant indispensable de ne pas les exagérer; et il y a, au contraire, beaucoup d'avantage à les restreindre individuellement, puisque les aberrations de sphéricité qui en résultent sont d'autant moindres qu'ils sont plus petits. Ceci reconnu, proposons-nous de former un instrument qui embrasse une certaine amplitude de champ ${}_cX$, pour un grossissement assigné N_i. Si l'on veut remplir ces conditions avec une seule lentille oculaire, il faudra que le π_i ou $\frac{\lambda_i}{f_i}$ qui s'y rapporte soit assez fort pour donner au numérateur de $\sin {}_cX$ une valeur qui suffise à l'effet proposé. Mais si l'on emploie deux lentilles oculaires au lieu d'une seule, toutes deux étant placées assez loin du système objectif pour ne recevoir que des pinceaux à radiation déjà restreinte, ce sera la somme de deux termes $\varepsilon_{i-1}\pi_{i-1} + \pi_i$, qui devra composer cette même valeur. Ainsi, en disposant l'appareil de manière qu'ils puissent avoir le même signe, chacun d'eux pourra être à peu près moitié moindre que précédemment. Cela donnera donc des courbures plus aplaties, conséquemment des incidences plus petites, et par suite des aberrations de sphéricité moindres pour les mêmes pinceaux transmis par l'objectif aux

mêmes distances. Car, dans chaque pinceau qui contient un rayon à incidence normale, l'aberration longitudinale du foyer, pour les autres rayons, est à très-peu près proportionnelle aux carrés de leurs angles d'incidence. Cette influence remarquable qu'exerce déjà sur l'amplitude du champ l'interposition d'une seule lentille loin de l'objectif, avant celle qui est le plus près de l'œil, a fait donner à la lentille interposée le nom de *verre de champ*. La place qu'on lui assigne peut, en outre, être réglée de manière à produire sur l'achromatisme du système total, un effet favorable que je ferai bientôt connaître. Des considérations toutes pareilles s'appliquent aux appareils, dont les deux premières surfaces opèrent par réflexion. Car, d'après ce que l'on a vu t. Ier, p. 492, la raison d'ouverture π_2 ou $\frac{\lambda_2}{r_2}$, qui appartient à la seconde de ces surfaces, se trouve assujettie à des conditions particulières, résultantes des directions rétrogrades qu'elle doit imprimer aux rayons lumineux que la première a réfléchis. Mais ces conditions étant supposées remplies, le produit $(N_m - 1) \sin_c X$ doit également, dans ces appareils, être représenté par la somme des quantités $\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_i$, appartenantes à cette seconde surface et aux lentilles suivantes de l'oculaire dioptrique ; ce qui donne les mêmes motifs pour atténuer leurs valeurs individuelles, en les multipliant, quand on veut concilier l'amplitude du champ avec la puissance du grossissement N_m. Toutefois, dans les instruments destinés aux observations astronomiques, quelle que soit la constitution du système objectif, on n'emploie jamais que des oculaires composés de deux lentilles au plus, pour que la multiplicité des réflexions et des absorptions n'affaiblisse pas trop l'intensité de la lumière transmise. Alors ces appareils sont habituellement disposés de manière à donner des images renversées des objets. Mais on emploie jusqu'à quatre lentilles dans les oculaires destinés aux observations des objets terrestres ; et alors on en obtient des images droites, ce qui est essentiel pour ce genre d'application.

30. Après les détails qui précèdent, on comprendra sans difficulté le tableau annexé à la page 25, où tous les résultats que nous avons obtenus pour des systèmes optiques quelconques sont

traduits pour les systèmes dioptriques en coefficients contractés, d'après les relations établies dans la page 14.

Des objectifs achromatiques.

31. L'inégale réfrangibilité des rayons lumineux qui émanent des objets naturels, fait que les appareils optiques qui opèrent par transmission ne peuvent donner des images distinctes qu'autant qu'on les assujettit à certaines conditions d'achromatisme que nous avons exprimées analytiquement, de la manière la plus générale, tome Ier, page 574. Quoique, en théorie, ces conditions ne soient indispensables à remplir que dans l'ensemble de l'appareil, on trouve beaucoup d'avantage à les introduire séparément dans le système objectif et dans le système oculaire. Car, non-seulement elles s'obtiennent ainsi, dans l'un et dans l'autre, par des procédés divers qui deviennent plus faciles à réaliser isolément; mais il en résulte, en outre, la possibilité d'adapter successivement au même objectif des oculaires divers qui donnent des grossissements angulaires de grandeurs différentes, sans que l'appareil total cesse de remplir les conditions générales d'achromatisme, du moins aussi approximativement qu'il est nécessaire pour la netteté de la vision. On va, en effet, bientôt se convaincre que ce n'est jamais que par approximation qu'il y peut satisfaire.

Les objectifs achromatiques employés en Astronomie sont faits avec deux ou au plus avec trois lentilles, de matière différente, qui, à réfraction égale, exercent d'inégales dispersions. On n'y emploie jamais plus de trois lentilles, afin que la lumière transmise ne soit pas trop affaiblie par la multiplicité des réflexions partielles qu'elle éprouve en arrivant sur chaque surface; et aussi pour ne pas accroître la difficulté du travail, ainsi que du centrage exact des lentilles combinées. Même, les opticiens les plus habiles n'admettent plus aujourd'hui que deux lentilles dans la construction de leurs grands objectifs astronomiques. Je me bornerai donc à discuter ici complétement ce cas spécial, qui ser-

virait au besoin de guide pour les autres plus complexes que l'on voudrait considérer.

32. A cet effet, je forme d'abord les coefficients généraux d'un tel système, pour un rayon lumineux quelconque de réfrangibilité donnée. On les obtient en faisant $i = 2$ dans les expressions contractées du tableau de la page 13, ou en les empruntant de celui de la page 11, où elles sont toutes calculées. On a ainsi

$$N_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \frac{H_1}{f_2}, \qquad P_2 = \frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{H_1}{f_1 f_2}\right), \qquad Q_2 = H_1.$$

Les lettres employées, par abréviation, sont des fonctions immédiates des éléments constitutifs des lentilles, qui ont les valeurs suivantes :

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{(n_1 - 1)}{n_1}\frac{e_1}{r'_1}, \qquad \frac{1}{f_1} = (n_1 - 1)\left(\frac{\varepsilon_1}{r_1} - \frac{1}{r'_1}\right),$$

$$H_1 = \frac{e_1}{n_1} + \varepsilon_1 h_1,$$

$$\varepsilon_2 = 1 - \frac{(n_2 - 1)}{n_2}\frac{e_2}{r'_2}, \qquad \frac{1}{f_2} = (n_2 - 1)\left(\frac{\varepsilon_2}{r_2} - \frac{1}{r'_2}\right).$$

J'y joins tout de suite les expressions qui déterminent les coordonnées du foyer pour la distance Δ de l'objet, ainsi que la distance du point oculaire H en avant de la dernière surface du système. Je les extrais du tableau de la page 25, en y faisant $i = 2$. On a ainsi :

$$\frac{1}{\Delta_f - H} = N_2 P_2 + \frac{N_2^2}{\Delta}, \qquad y_f = \frac{b}{P_2 \Delta + N_2}, \qquad z_f = \frac{c}{P_2 \Delta + N_2},$$

$$H = \frac{\frac{e_2}{n_2} N_2 + Q_2}{\varepsilon_2 N_2}.$$

Les divers éléments de ces formules varient évidemment avec la réfrangibilité; et, d'après ce que nous avons démontré tome Ier, page 574, pour que le système dioptrique ainsi formé fût *com-*

plétement achromatique, il faudrait que les trois fonctions

$$N, \qquad P_2, \qquad \frac{\frac{e_2}{n_2} N_2 + Q_2}{\varepsilon_2} \text{ ou } H N_2,$$

restent toutes trois constantes, quelle que soit la réfrangibilité des rayons introduits. Nous allons essayer de satisfaire simultanément à ces conditions; et si elles ne peuvent être toutes trois remplies, nous chercherons quelles sont celles dont l'accomplissement peut être sacrifié avec le moins de désavantage pour les effets que l'objectif projeté doit le plus indispensablement produire.

33. Je remarque d'abord que si les épaisseurs centrales e_1, e_2, des deux lentilles, étaient assez petites pour qu'on pût les considérer comme négligeables, comparativement à leurs rayons de courbure postérieurs r'_1, r'_2, on aurait généralement

$$\varepsilon_1 = 1, \qquad \varepsilon_2 = 1.$$

Les valeurs de ces deux quantités deviendraient donc alors indépendantes de la réfrangibilité. Cela n'a pas lieu ainsi, à la rigueur, dans les instruments réels. Mais pourtant les épaisseurs centrales des lentilles qui composent le système objectif, y sont toujours maintenues très-petites, comparativement aux rayons de courbure; de sorte que $\frac{e_1}{r'_1}$, $\frac{e_2}{r'_2}$, y sont toujours des fractions très-petites, indépendantes de la réfrangibilité. Les variations de celle-ci affectent donc seulement les rapports $\frac{n_1 - 1}{n_1}$, $\frac{n_2 - 1}{n_2}$, qui les multiplient respectivement dans les expressions de ε_1 et ε_2. Or, la dispersion qui s'opère dans l'amplitude totale du spectre visible ne change jamais les indices de réfraction que de quantités très-petites, comparativement à leurs valeurs absolues. Par exemple, prenons n_1, n_2, comme les indices qui, dans les deux lentilles, appartiennent aux rayons de réfrangibilité moyenne, lesquels, sur le spectre, répondent à peu près à la limite sensible du vert et du bleu. Alors, si ces indices deviennent $n_1 + \delta n_1$, $n_2 + \delta n_2$, pour une autre espèce de rayons, les rapports

$\frac{\delta n_1}{n_1}$, $\frac{\delta n_2}{n_2}$, seront toujours de très-petites fractions dans les verres employés aux usages optiques. Car, même dans les plus dispersifs, elles n'atteindront pas $+ 0,014$ pour le dernier violet visible, et $- 0,013$ pour le rouge extrême (*). Encore, de si grandes amplitudes de dispersion ne pourraient-elles s'apercevoir qu'avec une lumière transmise beaucoup plus vive que celle qu'on admet habituellement dans les observations d'astronomie. Il sera donc très-légitime de considérer d'abord ces petites quantités comme étant du même ordre que celles auxquelles nous avons restreint les inclinaisons des rayons lumineux sur l'axe central et sur les normales des surfaces réfringentes; ce qui nous parmettra d'établir provisoirement nos calculs, en tenant seulement compte de leur première puissance, comparativement à l'unité, sauf à rectifier ultérieurement ces premières appréciations, si nous venions à découvrir que les conséquences pourraient en devenir défectueuses. Alors, en les désignant par la caractéristique δ, employée comme dans la notation différentielle, on aura, dans l'étendue sensible du spectre dispersé,

$$\delta\left(\frac{n_1 - 1}{n_1}\right) = + \frac{\delta n_1}{n_1^2}, \qquad \delta\left(\frac{n_2 - 1}{n_2}\right) = + \frac{\delta n_2}{n_2^2},$$

ce qui donnera, dans la même notation,

$$\delta \varepsilon_1 = - \frac{e_1}{r'_1} \frac{\delta n_1}{n_1^2}, \qquad \delta \varepsilon_2 = - \frac{e_2}{r'_2} \frac{\delta n_2}{n_2^2}.$$

(*) J'obtiens ces nombres en comparant les indices de réfraction trouvés par Fraunhoffer dans un échantillon de flint-glass, pour les rayons dont la réfrangibilité répond aux raies B, F, H du spectre. La raie F coïncide à très-peu près avec la limite du vert et du bleu de Newton, comme on peut le conclure en comparant la longueur d'accès assignée par lui à cette espèce de lumière, et celle que Fraunhoffer donne pour la raie F. En prenant l'indice de réfraction de celle-ci pour n, les valeurs exactes de $\frac{\delta n}{n}$ résultantes des mesures de Fraunhoffer sont $- 0,012444$ pour la raie B, et $+ 0,0138659$ pour la raie H. Mais il ajoute que l'étendue perceptible du spectre ne s'étend jusqu'à ces extrêmes que lorsqu'il est formé par la lumière solaire.

Les variations de ε_1 et de ε_2, sans être absolument nulles, se trouvent ainsi exprimées par le produit de deux fractions qui sont individuellement du même ordre de petitesse que celles auxquelles nous avons borné les inclinaisons et les incidences. Nous pourrons donc, au moins dans une première approximation, les considérer comme négligeables, comparativement à l'unité qui les accompagnera toujours dans les expressions de ε_1 et ε_2, calculées pour un rayon quelconque du spectre. C'est ce que je vais d'abord faire, dans les opérations qui vont suivre. Alors, ces lettres y représenteront des quantités sensiblement constantes, qui devront être évaluées pour chaque lentille, avec l'indice de réfraction n_1, n_2, qui est propre aux rayons lumineux de moyenne réfrangibilité.

34. Ceci convenu, je remplace H_1, dans N_2, par son expression explicite; et il vient

$$N_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \frac{c_1}{n_1 f_2} + \frac{\varepsilon_1 h_1}{f_2}.$$

En calculant les variations que peut éprouver N_2 quand la réfrangibilité change, nous devons, d'après ce qui précède, traiter le produit $\varepsilon_1 \varepsilon_2$, comme constant. Or, je dis que, dans les mêmes limites d'approximation, nous devons attribuer la même constance au produit $\frac{c_1}{n_1 f_2}$.

En effet, selon ce qui a été démontré page 10, les f_1, f_2, ne diffèrent des distances focales principales des lentilles que par des quantités de l'ordre des épaisseurs centrales. Or, dans les objectifs, ces distances focales sont toujours très-considérables, relativement aux épaisseurs, quelle que soit l'espèce de rayons lumineux que l'on considère, c'est-à-dire quel que soit n_1. Cela rend le rapport $\frac{c_1}{n_1 f_2}$ très-petit du premier ordre de notre approximation. Ainsi, pour rester dans les limites que nous avons actuellement fixées, il faut négliger les variations que l'inégalité des réfrangibilités y peut produire.

Si l'on veut en avoir la preuve matérielle, il n'y a qu'à

effectuer ces variations par la caractéristique δ. On aura ainsi d'abord

$$\delta \frac{e_1}{n_1 f_2} = -\frac{e_1}{f_2}\frac{\delta n_1}{n_1^2} + \frac{e_1}{n_1}\delta\left(\frac{1}{f_2}\right).$$

Or, l'expression générale de $\frac{1}{f_2}$ est

$$\frac{1}{f_2} = (n_2 - 1)\left(\frac{\varepsilon_2}{r_2} - \frac{1}{r'_2}\right).$$

En appliquant la caractéristique δ à cette équation, nous devrons, d'après ce qui précède, traiter ε_2 comme une constante; il viendra donc

$$\delta\left(\frac{1}{f_2}\right) = \left(\frac{\varepsilon_2}{r_2} - \frac{1}{r'_2}\right)\delta n_2,$$

ou, en éliminant le facteur qui contient les rayons de courbure, au moyen de sa valeur en f_2,

$$\delta\left(\frac{1}{f_2}\right) = \frac{\delta n_2}{(n_2 - 1) f_2}.$$

En substituant ce résultat, on aura définitivement

$$\delta\left(\frac{e_1}{n_1 f_2}\right) = -\frac{e_1}{f_2}\frac{\delta n_1}{n_1^2} + \frac{e_1}{f_2}\frac{\delta n_2}{n_1(n_2 - 1)}.$$

Alors il devient évident que chacun des termes du second membre est le produit de deux fractions, individuellement très-petites, de l'ordre de notre approximation actuelle, ce qui permet de les négliger, comparativement à l'unité qui les accompagne toujours dans N_2.

Reprenant donc l'expression

$$N_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \frac{e_1}{n_1 f_2} + \frac{\varepsilon_1 h_1}{f_2},$$

nous voyons qu'en vertu de la petitesse des épaisseurs, comparativement aux rayons de courbure et aux distances focales principales des lentilles employées, les variations de la réfrangibilité,

calculées entre les limites de notre approximation actuelle, n'auront d'effet sensible que sur le terme $\frac{\varepsilon_1 h_1}{f_2}$, où h_1 exprime l'intervalle central des deux lentilles, lequel n'est pas nécessairement très-petit. En effectuant les variations de ce terme, il faudra encore traiter ε_1 comme constante, à cause du dénominateur f_2. Faisant donc varier seulement le facteur $\frac{1}{f_2}$, comme nous l'avons fait tout à l'heure, on aura pour résultat final

$$\delta N_2 = \frac{\varepsilon_1 h_1}{(n_2 - 1) f_2} \delta n_2.$$

Maintenant, une de nos conditions d'achromatisme exact est l'anéantissement de δN_2. Or nous ne pouvons anéantir le facteur δn_2, puisque le changement de réfrangibilité fera nécessairement varier l'indice de réfraction n_2; et même d'autant plus notablement, que la seconde lentille est habituellement formée de la matière la plus dispersive. Mais nous pouvons rendre h_1 nul, en combinant les courbures des surfaces qui se regardent, de manière que ces surfaces se trouvent en contact central. Il faudra donc s'astreindre à cette condition, sinon rigoureusement, ce qui pourrait endommager par la friction le poli des verres, du moins d'assez près pour que l'intervalle central h_1 des deux lentilles soit insensible, comparativement à la distance focale de la seconde, représentée ici très-approximativement par f_2. Même, à ne considérer que notre approximation actuelle, il suffirait que l'intervalle h_1 fût très-petit de l'ordre des épaisseurs, pour que cette dernière portion de δN_2, qui en dépend, rentrât dans la classe des termes que nous avons traités comme négligeables, et que la constance de N_2 se trouvât assurée dans les limites d'exactitude que le reste de notre calcul atteint. Cette excessive restriction de l'intervalle h_1 est rigidement réalisée dans les objectifs achromatiques fabriqués par le célèbre opticien Fraunhoffer, et dans ceux qu'on a construits d'après ses plans. On n'y donne jamais à h_1 que la très-petite valeur qui est indispensable pour qu'il ne se forme pas d'anneaux colorés dans la lame d'air, interposée entre les

deux lentilles; et j'aurai plus loin encore l'occasion de montrer combien il importe de ne pas s'écarter de cette condition.

L'intervalle h_1 étant ainsi rendu insensible, ou seulement très-petit de l'ordre des épaisseurs centrales, l'expression totale de N_2 se réduit presque uniquement et généralement à l'unité, puisqu'elle n'en diffère que par des quantités qui sont de l'ordre de ces épaisseurs, divisées par les rayons de courbure postérieurs, ou par la distance focale principale de la seconde lentille. En outre, sa valeur numérique, une fois calculée pour les rayons de moyenne réfrangibilité, ne varie pas sensiblement pour les autres rayons compris dans l'amplitude perceptible du spectre, ou du moins ses variations sont alors d'un ordre de petitesse que nous négligeons ici dans le calcul. Ceci remplit donc déjà la première condition de l'achromatisme du système, laquelle consiste dans la constance de N_2 pour les rayons de toute réfrangibilité. Il faut remarquer que ce dernier résultat dérive uniquement de la petitesse relative des épaisseurs centrales et de l'intervalle h_1, comparativement aux longueurs des distances focales et des rayons de courbure, sans assujettir d'ailleurs les valeurs absolues de ces éléments à aucune limitation définie.

35. Passons à la seconde condition d'achromatisme, qui est la constance de P_2. Je simplifie d'abord son expression, en y introduisant N_2. On a, en effet, généralement

$$P_2 = \frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{N_2}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right).$$

Alors, en lui appliquant la caractéristique δ, nous devrons, d'après ce qui précède, traiter ε_1 et N_2 comme constantes. Nous devrons agir de même sur les ε_1 et ε_2 qui entrent dans $\frac{1}{f_1}$ et $\frac{1}{f_2}$. Opérant donc sur ces dernières quantités, comme nous l'avons fait tout à l'heure, il viendra, dans les limites actuelles de nos évaluations,

$$\delta P_2 = \frac{1}{\varepsilon_1}\left[\frac{N_2\,\delta n_1}{(n_1 - 1)f_1} + \frac{\delta n_2}{(n_2 - 1)f_2}\right].$$

Tous les termes du second membre étant divisés par f_1 ou par f_2, il faut, pour rester dans les limites de notre calcul actuel, négliger dans leurs coefficients les quantités qui seraient déjà très-petites du premier ordre, ce qui borne ε_1 et N_2 à l'unité. Il faut, par le même motif, opérer des réductions pareilles dans f_1 et f_2, ce qui les ramène à représenter les distances focales principales des deux lentilles, considérées idéalement comme sans épaisseur. Enfin, quoique ces quantités ainsi interprétées varient avec la réfrangibilité des rayons lumineux auxquels on les applique, il faut n'employer ici en dénominateur que leurs valeurs moyennes, puisque les numérateurs δn_1, δn_2 sont déjà de l'ordre de petitesse auquel on a voulu se borner. Faisant donc ces simplifications, puis égalant à zéro l'expression de δP_2, la condition de son anéantissement sera

$$(1) \qquad 0 = \frac{\delta n_1}{(n_1 - 1) f_1} + \frac{\delta n_2}{(n_2 - 1) f_2}.$$

Ceci détermine une relation qu'il faudra établir entre les distances focales moyennes f_1, f_2 des deux lentilles, pour que la valeur de P_2, propre aux rayons de moyenne réfrangibilité, s'applique aussi à ceux dont l'indice de réfraction a une valeur différente, correspondante aux variations positives ou négatives, δn_1, δn_2. Cette condition peut toujours être remplie pour un rayon donné, en choisissant les distances focales moyennes, f_1, f_2, de manière que l'équation (1) soit satisfaite. Mais elle ne peut l'être *simultanément* pour toute l'étendue du spectre, que dans le cas où ces variations auraient toujours entre elles un rapport constant dans les deux lentilles, ce que l'expérience seule peut apprendre. Admettons donc pour un moment ce cas favorable, et supposons l'équation (1) satisfaite ainsi pour toutes les espèces de rayons, par un choix convenable de f_1 et de f_2 relativement aux rayons moyens.

36. Si l'on se reporte maintenant à l'expression générale de $\frac{1}{\Delta_{,} - H}$, que nous avons rappelée page 35, on voit que N_2 et P, étant rendus constants pour toutes les réfrangibilités, $\Delta_{,} - H$

le sera aussi, pour toute distance donnée Δ des points lumineux. De sorte qu'en lui appliquant la caractéristique δ, on aura

$$\delta \Delta_f = \delta H.$$

Il ne restera donc plus qu'à rendre H constant pour que Δ_f le soit aussi, ce qui complétera toutes les conditions du parfait achromatisme, conformément aux considérations générales rappelées plus haut. Mais si δH ne pouvait être rendu nul, Δ_f varierait d'une quantité correspondante pour les rayons de diverse réfrangibilité; de sorte que les pinceaux de couleurs diverses, émanés d'un même point rayonnant, formeraient leurs foyers propres, à d'inégales distances de la lentille postérieure.

Or, c'est ce qui a lieu inévitablement lorsqu'on s'astreint, avec une complète rigueur, aux deux conditions précédentes relatives à N_2 et à P_2. Car δH ne peut être rendu isolément nul par aucune combinaison praticable. Pour en avoir la preuve, reprenons, page 35, l'expression générale de H, en y substituant pour Q_2 sa valeur H_1 ou $\frac{e_1}{n_1} + \varepsilon_1 h_1$. On a ainsi

$$H = \frac{e_2}{n_2 \varepsilon_2} + \frac{e_1}{n_1 \varepsilon_2 N_2} + \frac{\varepsilon_1 h_1}{\varepsilon_2 N_2};$$

et, puisque nous avons fait h_1 nul, elle se réduit à

$$H = \frac{e_2}{n_2 \varepsilon_2} + \frac{e_1}{n_1 \varepsilon_2 N_2}.$$

D'après le mode de construction généralement adopté pour nos lentilles, il y a dans cette expression une partie principale, beaucoup plus grande que tout le reste. C'est celle qu'on obtient en négligeant dans ε_2 et N_2 les quantités très-petites du premier ordre, ce qui réduit leurs valeurs à l'unité. L'expression de cette partie principale est donc

$$H = \frac{e_2}{n_2} + \frac{e_1}{n_1}.$$

Il est, en effet, évident que si l'on substituait pour ε_2 et N_2 leurs

valeurs complètes, puis qu'on développât le résultat en une série ordonnée suivant les puissances des petites quantités qui accompagnent l'unité dans ces valeurs, le premier terme du développement serait précisément celui que nous conservons ici ; et les termes ultérieurs seraient comparativement du même ordre de petitesse que les puissances successives des quantités suivant lesquelles le développement aurait eu lieu.

En appliquant la caractéristique δ à cette expression réduite de H, elle donne

$$\delta H = -\frac{e_2\,\delta n_2}{n_2^2} - \frac{e_1\,\delta n_1}{n_1^2}.$$

Les variations δn_1, δn_2, sont toujours de même signe entre elles, quand on passe des rayons de réfrangibilité moyenne à d'autres rayons quelconques appartenant comme eux à une même raie du spectre. Les coefficients $\frac{e_2}{n_2^2}$, $\frac{e_1}{n_1^2}$, qui multiplient respectivement ces variations, sont tous deux essentiellement positifs. Les deux produits qui composent δH étant ainsi toujours de même signe entre eux, leur somme ne peut jamais devenir nulle, tant que les épaisseurs centrales des lentilles ne sont pas nulles absolument; et l'unique moyen de l'affaiblir est de faire les lentilles aussi minces que le permet le choix de leurs courbures, sans les rendre trop fragiles, ni trop sujettes aux flexions.

37. Puisque cette partie principale de H, dont nous venons de calculer ici la variation chromatique, ne contient pas les rayons de courbure des lentilles, elle subsisterait donc encore, avec la même valeur, dans le cas où les deux lentilles se réduiraient à deux plaques tout à fait planes, à faces parallèles, et ayant des épaisseurs e_1, e_2, pourvu qu'on les supposât aussi en contact l'une avec l'autre, afin que l'intervalle h_1 se trouvât nul, comme nous l'avons admis. C'est, en effet, ce que nous montre la *fig.* 2. Car la droite $A_1\,A_2\,X$ étant l'axe commun normal aux deux plaques, et celles-ci étant supposées contiguës extérieurement à un même milieu, qui sera, si l'on veut, l'air ambiant, suivons-y la marche d'un rayon incident SA_1, d'une réfrangibilité fixe, qui

formerait d'abord avec l'axe un angle quelconque X, compris dans les limites de petitesse que suppose notre approximation. Ses inclinaisons successives X_1, X_2, X_3, seront évidemment données par les formules suivantes :

$$\sin X_1 = \frac{1}{n_1} \sin X,$$

$$\sin X_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin X_1 = \frac{1}{n_2} \sin X,$$

$$\sin X_3 = n_2 \sin X_2 = \sin X.$$

Cela veut dire que le rayon entrera dans la seconde plaque, comme s'il y avait pénétré directement, et qu'il en sortira parallèle à sa direction primitive d'incidence. Dans ce trajet, son ordonnée d'incidence en I_1 sur la seconde plaque sera $e_1 \operatorname{tang} X_1$, et son ordonnée finale d'émergence en I_2 sera $e_1 \operatorname{tang} X_1 + e_2 \operatorname{tang} X_2$. Mais, à cause de la petitesse supposée de l'angle X, et de ses dérivés X_1, X_2, on pourra, dans les limites de notre approximation, remplacer les tangentes de ces angles par leurs sinus, qui n'en diffèrent que dans les termes du troisième ordre. L'expression de l'ordonnée d'émergence $A'_2 I_2$ ainsi transformée, deviendra donc $e_1 \sin X_1 + e_2 \sin X_2$, ou $\left(\frac{e_1}{n_1} + \frac{e_2}{n_2}\right) \sin X$, que l'on pourra, entre les mêmes limites, remplacer par $\left(\frac{e_1}{n_1} + \frac{e_2}{n_2}\right) \operatorname{tang} X$. Maintenant, si l'on veut connaître le point H, où le rayon émergent, virtuellement prolongé en arrière, va couper l'axe central, on aura la distance HA'_2, en divisant l'ordonnée d'émergence $A'_2 I_2$ par $\operatorname{tang} X_3$, c'est-à-dire par $\operatorname{tang} X$. Il en résultera donc

$$H = \frac{e_1}{n_1} + \frac{e_2}{n_2},$$

comme notre approximation générale nous l'avait donné. En outre, puisque l'angle d'incidence X n'entre pas dans cette expression de H, on voit qu'elle sera commune à tous les rayons de même nature qui feront leur incidence en A_1 sur l'axe central sous divers angles, pourvu que leur inclinaison sur cet axe soit

assez petite pour que l'on puisse employer indifféremment dans les calculs son sinus ou sa tangente, sans sortir des limites d'approximation que nous nous sommes fixées. Ainsi, entre ces limites, le point H sera le foyer de tous les rayons émergents qui ont fait leur incidence en A_1, avec les mêmes indices de réfrangibilité n_1, n_2.

L'expression précédente de H représente généralement la partie de cet élément spécifique qui est indépendante des courbures, dans l'assemblage réel de deux lentilles en contact par leur centre de figure. L'influence des termes qui dépendent des courbures modifie sans doute alors quelque peu cette valeur; mais ils ne peuvent jamais la détruire, à cause de leur petitesse relative, comparativement aux termes qui la composent, lesquels n'ont pas, comme eux, de dénominateur qui les affaiblit.

La variation chromatique de H ne pouvant donc être détruite dans ces systèmes, conjointement avec les deux autres dispositions d'achromatisme que nous y avons introduites, elle se transporte tout entière à Δ_j; de sorte que les pinceaux de diverses couleurs émanés d'un même point rayonnant, ont leurs foyers dispersés parallèlement à l'axe central sur une étendue égale à la différence des valeurs extrêmes de H pour les divers rayons du spectre. Or, ce serait là un défaut capital pour un objectif. Car les rayons partis de ces divers foyers ne devant pas être reçus immédiatement dans l'œil, mais dans un système oculaire dont la première surface en est toujours très-proche, leur inégalité de distance à cette surface produirait dans les foyers définitifs une dispersion énorme qu'il faut nécessairement éviter, dût-on pour cela sacrifier quelque autre condition, dans l'accomplissement de laquelle un léger défaut de rigueur serait plus facilement tolérable; ou même qui deviendrait tout à fait indifférente pour le but spécial de l'application des oculaires, auquel l'objectif est destiné.

38. A cet effet, il nous sera utile d'examiner, et même de réaliser numériquement dans un cas extrême, les conséquences physiques de cette variation de H, pour un objectif composé de deux lentilles assujetties aux deux conditions de compensation achromatique que nous avons établies, et dans laquelle consé-

quemment la valeur de δH n'étant pas nulle, se reporte tout entière sur Δ_f. Tel est l'objet de la *fig.* 3.

Par simplification, les faibles courbures des surfaces sont dissimulées, et les profils de celles-ci sont tracés comme rectilignes. Mais on a considérablement exagéré les épaisseurs centrales pour pouvoir marquer distinctement les positions des points oculaires, propres aux rayons incidents de diverses réfrangibilités. H_r représente ce point, pour les rayons de réfrangibilité moyenne correspondants à la limite du vert et du bleu ; en sorte que $H_r A'_2$ est la valeur de H pour ces rayons. Elle est figurée antérieure à la dernière surface du système, parce que la grandeur de f_2, et des rayons de courbure, comparativement aux épaisseurs, dans les instruments réels, fait que les termes de H qui sont divisés par ces quantités, sont très-petits comparativement à ceux qui en sont exempts. De sorte qu'en se bornant à ceux-ci, la portion principale de la valeur H est, comme nous l'avons trouvé tout à l'heure,

$$H = \frac{e_1}{n_1} + \frac{e_2}{n_2};$$

d'où l'on voit qu'elle est toujours positive, et d'autant moindre que l'indice de réfraction des rayons considérés est plus fort, comme le confirme notre expression de δH. D'après cela, le point oculaire propre aux rayons violets est représenté en H_v, plus près de la dernière surface; et celui des rayons rouges en H_r, antérieurement plus loin que H_r.

Le demi-diamètre des anneaux oculaires propres à ces mêmes rayons est égal au demi-diamètre efficace $A_1 L_1$ de la première surface, divisé par N_2, tome Ier, page 436. Ici N_2 étant rendu constant pour les rayons de diverses réfrangibilités, ces anneaux sont tous d'ouverture égale, et on les a figurés comme tels.

Maintenant, pour chaque distance donnée Δ des points rayonnants, au devant de la première lentille, Δ_f — H est maintenue constante lorsque la réfrangibilité varie; et, en même temps, les ordonnées latérales du foyer y_f, z_f, restent aussi constantes, puisqu'on a rendu constants les coefficients N_2 et P_2, qui, seuls, entrent dans leurs expressions. Les cônes émergents, formés par

tous les pinceaux de couleurs diverses, émanés d'un même point rayonnant, ont donc leurs sommets dispersés parallèlement à l'axe central, de manière que le plan focal qui contient chacun d'eux se trouve à la même distance Δ_f — H de l'anneau oculaire qui lui est propre; comme aussi chacun de ces sommets se trouve à une même distance de l'axe central. Mais les bases des cônes sont toutes d'égale grandeur dans l'anneau oculaire qui leur appartient.

On a représenté, dans la figure, l'application de ces propriétés à un faisceau de rayons incidents qui serait parallèle à l'axe central du système, supposé convergent. Alors les foyers principaux F_r, F_v, F_u, sont dispersés sur cet axe même à des distances de la dernière surface croissantes avec la réfrangibilité; et chaque cône focal se dirige des anneaux oculaires vers ces points en rayons respectivement parallèles.

39. Cette dispersion des foyers F étant égale à celle des points oculaires H, peut s'apprécier dans sa partie principale, d'après les expressions approchées de H et de δH, que nous avons formées tout à l'heure. Pour fixer les idées sur son étendue, je la calculerai pour un cas extrême de son application pratique.

Je suppose, conformément à l'usage ordinaire, que la première lentille soit faite avec l'espèce de verre communément appelée *crown-glass*, la seconde avec l'espèce plus réfringente et plus dispersive appelée *flint-glass*; les indices de réfraction pour les raies B, F, V du spectre ayant les valeurs suivantes, que j'emprunte à Fraunhoffer.

	Raie B dans la fin du rouge. n_r.	Raie F. Limite du vert et du bleu de Newton. n_v.	Raie H dans la fin du violet. n_u.
Crown-glass..... ..	1,525832	1,536052	1,546566
Flint-glass.....	1,627749	1,648260	1,671062

J'admets enfin que l'on doive construire avec ces verres un grand objectif astronomique, dans lequel l'épaisseur central e_1 du crown antérieur soit de 20 millimètres, et celle du flint postérieur de 18.

Si l'on introduit ces données dans l'expression approchée

$$H = \frac{e_1}{n_1} + \frac{e_2}{n_2},$$

en y combinant ensemble les indices de réfraction propres à une même raie, on obtient les résultats suivants :

Pour les rayons émergents, répondant à la raie B du rouge. $H_r = 24^{mm},16583$
à la raie F limite du vert et du bleu.. $H_v = 23^{mm},94100$
à la raie H du violet. $H_u = 23^{mm},70351$

De là on tire, par différence,

$$H_r = H_v - 0^{mm},22483, \qquad H_u = H_v - 0^{mm},23749.$$

La dispersion des points oculaires autour de H_v s'opère donc dans le sens que j'ai annoncé; et en supposant, comme nous le faisons, que les deux coefficients N_2, P_2 soient rendus sensiblement constants pour toutes les réfrangibilités, cette disposition se transporte dans le même sens, avec les mêmes valeurs, aux foyers principaux F_r, F_v, F_u. Ici son étendue totale, depuis F_r jusqu'à F_u, comprendrait $0^{mm},46232$, c'est-à-dire près d'un demi-millimètre. Mais tous les éléments de cette évaluation sont portés à l'extrême, tant pour les épaisseurs centrales des deux lentilles que pour l'amplitude de réfrangibilité du spectre visible, laquelle ne pourrait être telle que s'il était formé par la lumière solaire directe. Ceci n'a jamais lieu dans l'usage des instruments d'astronomie, surtout quand ils sont pourvus de très-grands objectifs, comme serait celui auquel pourraient appartenir les épaisseurs supposées dans notre calcul. Toutefois la dispersion longitudinale des foyers F_r, F_u, y deviendrait intolérable après l'application des oculaires, si on ne la détruisait pas.

40. Or c'est à quoi la généralité des opticiens n'arrive, pour les grands appareils, qu'à force d'essais et de rectifications, où ils ne sont guidés que par le plus ou moins de succès de chaque épreuve,

ce qui leur demande beaucoup de temps, de dépense et de travail. Car les calculs préparatoires sur lesquels ils fondent leurs premières déterminations, doivent toujours, et inévitablement, les conduire au résultat défavorable que nous venons de signaler. On le verra par l'exposé même de la marche qu'ils suivent pour obtenir ces déterminations préliminaires. Elle nous servira en effet comme à eux, mais seulement pour obtenir des éléments approchés de calcul, que nous rectifierons par une correction rigoureuse avant de les réaliser par l'exécution.

Les grandeurs des verres dont on dispose étant données, on sait à peu près, par la pratique, la longueur de la distance focale principale que l'on pourra convenablement donner à l'objectif composé qui en résultera. Soit F cette longueur. On doit aussi connaître, par des épreuves antérieures, ou par des expériences immédiates, les indices de réfrangibilité n_1, n_2 de ces deux espèces de verre, pour les rayons lumineux de réfrangibilité moyenne, ainsi que les variations δn_1, δn_2 de ces indices dans l'étendue du spectre sensible. Lorsqu'on détermine expérimentalement ces variations, depuis la raie moyenne du spectre, jusqu'à une autre raie, leur rapport, $\frac{\delta n_2}{\delta n_1}$, n'offre jamais une exacte constance dans toute l'amplitude de la dispersion, à moins que les matières comparées ne soient absolument identiques. On en voit la preuve dans les nombres mêmes que je viens de rapporter. D'après cela l'équation (1) du § 33 ne peut jamais être satisfaite simultanément pour toutes les réfrangibilités; ce qui oblige à calculer les distances focales moyennes f_1, f_2 pour une seule valeur particulière de ce rapport, que l'on choisit de manière à laisser subsister les défauts de compensation achromatique les moins intolérables; et l'on y parvient commodément, ainsi que sûrement, par le genre d'épreuve expliqué au tome III de mon *Traité de Physique*, pages 497 et suivantes. Ces données étant obtenues, on opère d'abord, dans une première approximation, comme si les épaisseurs centrales des deux lentilles devaient être tout à fait insensibles. Cette limitation étant introduite dans les équations générales rapportées au commencement de cette section, § 32, page 35,

conjointement avec la condition de h_1 nul, que je suppose toujours conservée, il en résulte

$$\epsilon_1 = 1; \quad \epsilon_2 = 1, \quad N_2 = 1; \quad P_2 = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}; \quad Q_2 = 0;$$

et, par suite,

$$H = 0.$$

En outre, selon ce qui a été démontré page 10, f_1, f_2 représentent alors les distances focales principales des deux lentilles supposées infiniment minces. Or, dans ce même cas, si l'on fait Δ infini, pour que Δ_f devienne la distance focale principale F, on trouve que H étant nul, F a pour valeur $\frac{1}{N_2 P_2}$, laquelle se réduit à $\frac{1}{P_2}$, puisque N_2 est 1. Prenant donc cette expression de F, et y joignant l'équation (1), page 42, laquelle maintient P_2 constant lorsque la réfrangibilité varie, on a, entre f_1 et f_2 seuls, ces deux relations :

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}; \qquad \frac{\delta n_1}{(n_1 - 1) f_1} + \frac{\delta n_2}{(n_2 - 1) f_2} = 0.$$

De là on déduit les valeurs approchées qu'il faudra donner aux quantités f_1, f_2, réputées distances focales principales des deux lentilles, pour que l'objectif, composé de leur ensemble, soit achromatique avec la distance focale principale F, sinon dans toute l'étendue réelle du spectre, du moins à l'égard des rayons moyens, et de ceux pour lesquels les variations δn_1, δn_2 sont calculées. Car ici H étant rendu nul, par la nullité d'épaisseur attribuée aux deux lentilles, ainsi que par le contact central qu'on établit entre elles, la dispersion longitudinale des foyers disparaît, ou est censée disparaître par cette condition.

41. Faisons, pour abréger,

$$\mu = \frac{\left(\frac{\delta n_2}{n_2 - 1}\right)}{\left(\frac{\delta n_1}{n_1 - 1}\right)} = \frac{(n_1 - 1)}{(n_2 - 1)} \frac{\delta n_2}{\delta n_1};$$

μ sera ce qu'on appelle le *rapport de dispersion*. Il est toujours

de signe positif, parce que les indices de réfraction n_1, n_2, surpassent toujours 1; et, en prenant leurs variations, pour une même espèce de rayons lumineux, à partir de leurs valeurs respectives pour les rayons moyens du spectre, δn_1 et δn_2 sont toujours de même signe. Mais sa valeur numérique est plus grande que 1, si la seconde lentille est faite du verre le plus réfringent, qui est aussi habituellement le plus dispersif; et, au contraire, elle est moindre que 1, si cette seconde lentille est faite du verre le moins réfringent, qui est aussi habituellement le moins dispersif C'est ce que l'on peut constater, par exemple, pour le crown-glass et pour le flint-glass, en calculant les valeurs des fractions $\frac{\delta n_1}{n_1 - 1}$, $\frac{\delta n_2}{n_2 - 1}$, autour de la raie moyenne F, d'après les nombres assignés plus haut à ces deux espèces de verre. Car si l'on applique l'indice n_2 au flint, et que l'on prenne les variations depuis la raie moyenne F jusqu'à la raie B située dans le rouge, on aura

$$\delta n_1 = -0,010220, \qquad \delta n_2 = -0,020511;$$
$$n_1 - 1 = 0,536052, \qquad n_2 - 1 = 0,648260.$$

De là on tire

$$\frac{\delta n_1}{n_1 - 1} = -0,019065, \qquad \frac{\delta n_2}{n_2 - 1} = -0,031640;$$

et enfin

$$\mu = 1,65956.$$

La valeur de μ serait un peu plus forte, si l'on eût pris les variations depuis la raie moyenne F, jusqu'à la raie H située dans le violet. Car on la trouverait ainsi égale à 1,79334. C'est une conséquence de la variabilité du rapport $\frac{\delta n_2}{\delta n_1}$. Mais, comme je l'ai dit, on ne se règle pas rigoureusement sur ces dispersions extrêmes. On emploie, pour l'ordinaire, une valeur de μ qui convient à une amplitude beaucoup moindre du spectre; et on la détermine expérimentalement de manière qu'elle embrasse surtout l'ensemble des rayons hétérogènes qui seront le plus sensibles

pour l'œil dans l'état habituel d'intensité, ainsi que de composition, de la lumière sur laquelle l'objectif doit agir.

μ étant introduit dans nos deux équations, entre f_1, f_2 et F, on en tire

$$f_1 = \frac{(\mu - 1)}{\mu} F, \qquad f_2 = -(\mu - 1) F.$$

L'objectif, pour avoir un emploi réel, doit être convergent, ce qui suppose F essentiellement négatif dans notre notation. Alors le signe de f_1 et de f_2, c'est-à-dire le caractère convergent ou divergent de chaque lentille, est déterminé par le seul signe de $\mu - 1$. Mais leurs actions propres doivent toujours être de sens opposé.

Veut-on que la seconde lentille soit faite de flint, qui est l'espèce des deux verres la plus dispersive? μ surpassera 1, et ainsi $\mu - 1$ sera positif. Alors f_1 sera négatif comme F, et f_2 positif. C'est-à-dire que la lentille antérieure de crown devra être convergente, la seconde de flint divergente, selon les proportions exprimées dans les formules, pour que l'achromatisme demandé ait lieu. En outre, $\mu - 1$ étant alors plus grand que $\frac{\mu - 1}{\mu}$, la distance focale f_2 de la lentille de flint sera plus longue, abstraction faite de son signe, que la distance focale f_1 de la lentille de crown. C'est cette dernière condition, jointe au signe de F, qui détermine la convergence de l'objectif total.

Veut-on, au contraire, que le crown soit postérieur? Comme il est le moins dispersif, μ deviendra moindre que 1. Alors, F étant toujours donné négatif, f_1 sera positif et f_2 négatif. La lentille antérieure de flint sera divergente, la seconde de crown convergente, et celle-ci d'un foyer plus court que l'autre, comme précédemment.

42. Les valeurs approchées des distances focales f_1, f_2, étant ainsi connues, ou supposées l'être, pour la distance focale totale F, il en résulte seulement une relation entre les rayons de courbure antérieur et postérieur de chaque lentille. Elle ne suffirait donc pas pour les déterminer tous deux. Mais on la complète par les relations que la pratique indique comme les plus avantageuses pour

que les rayons incidents qui pénètrent l'objectif par ses bords, et qui y subissent ainsi les plus fortes réfractions, viennent se réunir sensiblement aux mêmes foyers que les plus voisins de l'axe central auxquels seuls notre approximation actuelle s'applique, ou est censée s'appliquer, après les restrictions précédentes. De très grands géomètres, et en particulier Euler, ont cherché des formules analytiques qui assurassent cette concordance entre les foyers des bords et du centre, lorsque les incidences des rayons lumineux sur les surfaces réfringentes, ainsi que leurs inclinaisons sur l'axe central, ne peuvent plus être supposées tellement petites, qu'il suffise d'avoir égard à la première puissance de ces quantités. Mais alors le calcul algébrique de la route des rayons se complique tellement, qu'on ne peut plus en manifester les conséquences littérales que pour des situations très-restreintes des points rayonnants ; et encore en y introduisant plusieurs autres limitations relatives aux épaisseurs ainsi qu'aux intervalles des lentilles, dont on ne peut pas apprécier précisément la portée. Cela est facile à comprendre quand on a suivi la série des précautions que nous avons dû prendre, pour employer rigoureusement toutes ces données dans notre première approximation. Aussi les formules analytiques, tronquées par ces nécessités de simplification, ont-elles fourni bien peu de combinaisons de courbures que la pratique ait confirmées, même parmi celles qu'elles avaient indiquées comme les plus favorables; et c'est seulement par des multitudes d'essais, dirigés d'après quelques considérations géométriques très-simples, que les opticiens sont parvenus, de notre temps, à étendre les ouvertures efficaces des verres, comparativement à leurs distances focales, dans les grands instruments astronomiques, au point où nous les voyons aujourd'hui. On pourrait même présumer avec assez de vraisemblance que les bords de leurs grands objectifs ne sont pas la continuation exacte des surfaces sphériques sur lesquelles les parties centrales sont travaillées; et cette déformation, qui s'opère dans le travail même, est peut-être une des causes qui contribuent à réunir accidentellement, d'une manière plus parfaite, les foyers des bords et des centres, pour des ouvertures de grande dimension. Cette remarque n'avait pas échappé à notre excellent opti-

cien M. Cauchoix, et c'est en partie par l'usage qu'il en a su faire qu'il a réussi à construire les plus grands objectifs astronomiques jusqu'à présent connus.

43. Toutefois, il est manifeste que les déterminations préliminaires, effectuées comme je viens de le dire, doivent donner d'abord aux artistes des objectifs où les foyers de pinceaux de diverses couleurs sont dispersés longitudinalement; puisque la valeur de H, d'où cette dispersion résulte, et qu'ils supposent nulle dans leur calcul, ne l'est pas en réalité. Aussi trouvent-ils toujours que les premiers résultats obtenus ainsi, même en prenant tous les soins possibles pour exécuter fidèlement les courbures calculées, sont loin d'être immédiatement admissibles. Ils s'en aperçoivent par l'expérience même, en appliquant à l'objectif les oculaires qui doivent s'y adapter, et constatant les imperfections de netteté, comme d'achromatisme, des images qu'il donne, tant par son centre que par ses bords. Lorsqu'ils ont reconnu la nature et le sens de ces premiers défauts, ils tâchent de les faire disparaître soit en modifiant la courbure d'une des surfaces du système, soit en construisant, avec la moins rare des deux espèces de verre, plusieurs lentilles auxiliaires, souvent en grand nombre, sur des courbes tant soit peu différentes de la première, jusqu'à ce qu'ils arrivent enfin à obtenir un système qui les satisfasse par ses effets.

44. Or ces essais, pénibles et dispendieux, peuvent être en partie prévenus par le calcul, en se guidant sur la notion exacte du résultat qu'on veut leur faire produire. D'après la discussion dans laquelle nous venons d'entrer, ce résultat doit être d'empêcher la dispersion de la distance focale Δf pour les diverses réfrangibilités, sans cependant introduire une dispersion latérale des foyers provenant de la même cause; sauf à tolérer pour cela, s'il le faut, quelques légères inégalités dans les valeurs correspondantes du coefficient N_2, dont la composition analytique est telle qu'il ne peut jamais différer de l'unité que de quantités excessivement petites, lorsque les rayons de courbure, et les distances focales des lentilles, ont des valeurs très-grandes comparativement à leurs épaisseurs e_1, e_2, ainsi qu'à leur intervalle central h_1, conditions que nous conviendrons toujours de maintenir très-sévèrement.

45. Cela posé, je reprends l'expression exacte de Δ_f, qui, dans notre système de deux lentilles, est, d'après les équations de la page 35,

$$\Delta_f = H + \frac{1}{N_2\left(P_2 + \frac{N_2}{\Delta}\right)}.$$

Ne voulant pas me jeter dans des généralités inutiles, je bornerai cette expression au cas d'application spéciale que doit avoir l'instrument que l'on veut former. L'objectif doit-il servir à la confection d'une lunette destinée à observer des objets très-distants? c'est pour le cas de Δ infini qu'il faut la préparer et y prévenir les variations chromatiques de Δ_f. Doit-il, au contraire, être employé comme système objectif d'un microscope composé? alors, quand on l'emploiera, Δ sera toujours très-petit, et toujours très-peu différent de la distance focale réciproque exprimée par $-\frac{N_2}{P_2}$, tome Ier, page 455. Car c'est toujours très-peu au delà du foyer réciproque de l'objectif microscopique, que l'on amène l'objet dont il doit donner une image agrandie. C'est donc alors pour la supposition de cette très-petite différence que Δ_f doit être maintenu constant. Ayant ici spécialement en vue les instruments d'astronomie, je m'attacherai au premier cas, qui servira de guide pour le second. Faisant donc Δ infini, Δ_f devient la distance focale principale du système, que je désigne par F; et je reprends aussi, dans la page 35, les coordonnées latérales y_r, z_r du foyer principal, que nous désirons ne pas disperser, en les spécialisant pour le même cas, comme nous l'avons fait tome Ier, page 451. J'ai ainsi

$$F = H + \frac{1}{N_2 P_2}, \qquad y_r = -\frac{1}{P_2}\cos Y, \qquad z_r = \frac{1}{P_2}\cos Z,$$

expressions dans lesquelles les angles Y, Z caractérisent la direction primitive du faisceau incident.

46 Je forme alors la variation complète de F par la caractéristique δ, et j'ai

$$\delta F = \delta H - \frac{\delta N_2}{N_2^2 P_2} - \frac{\delta P_2}{N_2 P_2^2},$$

ou, en remplaçant P_2 par sa valeur tirée de l'équation primitive,

$$\delta F = \delta H - \frac{(F-H)}{N_2}\delta N_2 - N_2 (F-H)^2 \delta P_2.$$

Les coordonnées latérales y_r, z_r, ne contiennent d'autre élément variable que P_2. Si nous voulons qu'elles restent constantes quelle que soit la réfrangibilité, il est indispensablement nécessaire que P_2 soit nul isolément. Alors notre équation relative à δF se décompose dans les deux suivantes :

$$\delta F = \delta H - \frac{(F-H)}{N_2}\delta N_2, \qquad \delta P_2 = 0.$$

Nous savons déjà que nous pouvons satisfaire à la seconde, sinon dans toute l'étendue du spectre, du moins pour une certaine valeur de dispersion moyenne, par l'établissement d'un rapport convenable entre les distances focales principales des deux lentilles. Seulement, on va voir tout à l'heure qu'il faudra le calculer plus exactement que nous ne l'avions fait d'abord. Il ne reste donc qu'à examiner la nature des termes qui composent maintenant l'expression réduite de δF, pour voir si l'on pourra les amener à s'entre-détruire mutuellement, quand on y introduira le rapport moyen de compensation adopté. Mais, avant d'entrer dans ce détail, je ferai deux remarques importantes.

47. Supposons que nous ayons réussi à rendre δF et δP_2 séparément nuls, comme nous en avons le dessein; et, quoique cela ne puisse avoir lieu, à la rigueur, que pour un seul rapport de compensation, spécialement choisi, admettons, afin de faciliter les raisonnements, que la portion de la dispersion qui n'est pas complétement détruite dans le reste du spectre, se trouve du moins si affaiblie que l'on puisse la négliger. δF étant ainsi nul en général, tous les rayons de réfrangibilité diverse qui composent chaque faisceau incident admissible se réuniront en un même point focal, situé à la distance F de la dernière surface de l'objectif ainsi composé. Mais chacun des cônes réfractés, qui concourent à ce point, aura pour base un anneau oculaire particulier appartenant à sa réfrangibilité spéciale, et situé dans le plan oculaire qui lui est propre;

de sorte que ces bases seront généralement inégales et inégalement distantes du sommet commun. En effet, soit λ_1 le demi-diamètre d'ouverture efficace de la surface d'incidence. Le demi-diamètre de chaque anneau oculaire sera exprimé par $\frac{\lambda_1}{N_2}$, où N_2 n'est pas rendu exactement constant; et le plan de cet anneau passera par le point oculaire H qui n'est pas constant non plus : de sorte qu'il se trouvera, analytiquement, à la distance F — H du sommet du cône réfracté qui lui correspond. Maintenant, appliquons ces résultats à un faisceau incident parallèle à l'axe central. Son point focal sera sur cet axe même. Alors les génératrices de chaque cône réfracté, partant des bords de son anneau propre, et convergeant au foyer commun, leur inclinaison sur l'axe central aura pour tangente trigonométrique $\frac{\lambda_1}{N_2 (F - H)}$. Or, l'expression de F pour des faisceaux donne précisément $\frac{f}{N_2 (F - H)}$ égal à P_2. Donc, si nous parvenons à rendre P_2 constant pour les rayons de toute réfrangibilité, cette inclinaison sera constante aussi; et, ayant déjà rendu F commun, tous les cônes réfractés dérivés du faisceau incident seront en coïncidence complète, tant pour leur sommet que pour la direction de leurs arêtes génératrices, parce que les diamètres inégaux de leurs bases se maintiendront proportionnels à leurs distances au foyer commun. La coïncidence aura encore lieu, par la même raison, pour les rayons intérieurs de ces cônes réfractés qui dérivent d'un même rayon incident; et elle existera aussi dans les bornes de notre approximation pour les faisceaux incidents obliques, dont l'inclinaison sur l'axe central sera extrêmement petite. Le système objectif ainsi préparé aura donc toutes les qualités de concentration requises pour qu'on puisse appliquer à ses foyers un système oculaire, sans satisfaire à la constance de H que nous ne pouvons lui donner.

Mais ces avantages ne peuvent exister que par la constance de F, ainsi que de P, pour tous les rayons de réfrangibilité quelconque; et les plus légères inexactitudes sur cette dernière condition y portent de fortes atteintes, parce que les valeurs de δP_2

qui ne seraient pas absolument nulles se reportent dans δF, où elles sont considérablement agrandies par le facteur $-N_2 (F-H)^2$. C'est pourquoi, en formant l'expression de δF, il faudra toujours y comprendre, au moins tacitement, les portions additionnelles qui pourraient ainsi provenir d'une destruction imparfaite de δP_2.

48. Ces notions étant données, je passe à la formation successive des termes qui composent δF, et je commence par δH. Pour avoir celui-ci, je cherche d'abord la portion principale et la plus influente de H, en ne supposant plus l'intervalle central h_1 absolument nul, mais seulement très-petit, du même ordre que les épaisseurs centrales des lentilles assemblées. Cette portion principale se composera des termes de H, qui ne sont point divisés par les rayons des courbures, ou par la distance focale f_2. Pour l'obtenir il faut prendre l'expression générale de H, formée page 35; la traiter comme nous l'avons fait page 43, puis, la réduisant aux seuls termes indiqués, elle devient

$$H = \frac{e_1}{n_1} + \frac{e_2}{n_2} + h_1,$$

ce qui donne

$$\delta H = -\frac{e_1}{n_1^2}\,\delta n_1 - \frac{e_2}{n_2^2}\,\delta n_2,$$

comme nous l'avons trouvé précédemment, page 44. Ici l'on voit que l'intervalle central h_1, lorsqu'il est très-petit, comme nous le supposons, s'ajoute à la valeur absolue de H, sans influer sensiblement sur ses variations chromatiques. C'est aussi ce que l'on pourrait vérifier avec facilité sur le cas même des plaques planes traitées plus haut. Quant aux autres termes de δH qui pourraient s'ajouter à ceux que nous venons de séparer, ils seraient nécessairement très-faibles par rapport à eux, dans tous les modes de construction employés réellement, parce que les épaisseurs e_1, e_2, ainsi que l'intervalle h_1, n'y entrent que multipliés par les diverses puissances de leurs rapports aux rayons de courbure des surfaces, rapports toujours maintenus très-petits. La destruction de ces premiers termes, joints à ceux du même ordre qui s'y associent dans δF, est donc la plus importante à opérer; et, en effet, l'ex-

périence, ainsi que le calcul, montrent que dans les dimensions usitées des appareils, lorsqu'ils sont anéantis, les autres ne produisent plus de résultats qui puissent être sensibles aux épreuves les plus délicates.

49. Je passe maintenant à la formation de δN_2. En l'effectuant d'abord pour notre premier calcul approximatif, page 38, § 34, nous n'avons pas trouvé dans N_2 de termes variables qui n'eussent pour diviseurs les rayons de courbure ou les distances focales des lentilles; et c'est ce qui nous a permis de négliger leurs variations chromatiques, au moins dans une première évaluation. Mais ici tous ces termes de δN_2 se trouvent multipliés dans δF par le facteur $F - H$ qui est de l'ordre de leurs dénominateurs; ce qui les rend comparables à ceux de H que nous venons de mettre en évidence. Il faut donc former l'expression de δN_2 en conservant ces termes, afin de voir si, après avoir été multipliés par $F - H$, ils pourront détruire ceux que δH contient.

Or l'expression complète de N_2 est, d'après la page 35,

$$N_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \frac{H_1}{f_2},$$

où l'on a

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{(n_1 - 1)}{n_1} \frac{e_1}{r'_1}, \qquad \varepsilon_2 = 1 - \frac{(n_2 - 1)}{n_2} \frac{e_2}{r'_2},$$

$$\frac{1}{f_2} = (n_2 - 1)\left(\frac{\varepsilon_2}{r_2} - \frac{1}{r'_2}\right), \qquad H_1 = \frac{e_1}{n_1} + \varepsilon_1 h_1.$$

Je me donne comme condition que l'intervalle central h_1, s'il n'est pas absolument nul, sera au plus de l'ordre des épaisseurs e_1, e_2. Alors tous les termes qui accompagnent l'unité dans N seront très-petits du premier ordre de notre approximation, et il faudra ne pas dépasser cet ordre dans le calcul de δN_2, puisque ces termes sont les seuls qui, multipliés par $F - H$ ou par F, puissent devenir comparables à ceux que δH contient.

Je forme donc d'abord l'expression générale de δN_2, qui est

$$\delta N_2 = \varepsilon_2 \delta \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \delta \varepsilon_2 + \frac{\delta H_1}{f_2} + H_1 \delta\left(\frac{1}{f_2}\right);$$

et j'y joins les suivantes, formées également sans rien négliger :

$$\delta t_1 = -\frac{e_1}{r'_1}\frac{\delta n_1}{n_1^2}; \qquad \delta t_2 = -\frac{e_2}{r'_2}\frac{\delta n_2}{n_2^2};$$

$$\delta\left(\frac{1}{f_2}\right) = \frac{\delta n_2}{(n_2-1)f_2} - \frac{e_2}{r_2 r'_2}\frac{(n_2-1)}{n_2^2}\delta n_2;$$

$$\delta H_1 = -e_1\frac{\delta n_1}{n_1^2} - \frac{e_1 h_1}{r'_1}\frac{\delta n_1}{n_1^2}.$$

Je fais alors les substitutions indiquées, en ne conservant que les produits où les coefficients de δn_1, δn_2, sont du premier ordre, et j'ai

$$\delta N_2 = -\left(\frac{e_1}{r'_1}+\frac{e_1}{f_1}\right)\frac{\delta n_1}{n_1^2} + \left[\frac{e_1}{n_1(n_1-1)f_2} - \frac{e_2}{n_2^2 r'_2} + \frac{h_1}{(n_2-1)f_2}\right]\delta n_2.$$

80. En portant cette valeur dans δF, page 57, il faudra la multiplier par $-\left(\frac{F-H}{N_2}\right)$, ou $-F\frac{\left(1-\frac{H}{F}\right)}{N_2}$. Mais comme δN_2 est déjà composé entièrement de termes du premier ordre, on devra négliger leurs analogues dans ce multiplicateur, ce qui le réduit à $-F$. Le produit étant alors introduit dans δF conjointement avec δH, on a

$$\delta F = e_1\left[\left(\frac{F}{r'_1}+\frac{F}{f_1}-1\right)\frac{\delta n_1}{n_1^2} - \frac{F}{f_1}\cdot\frac{\delta n_1}{n_1(n_1-1)}\right] + e_2\left(\frac{F}{r'_2}-1\right)\frac{\delta n_2}{n_2^2} - h_1\frac{F}{f_2}\cdot\frac{\delta n_2}{n_2-1}.$$

Cette expression s'appliquera conjointement avec la condition de compensation achromatique qui rend δP_2 nul. Or déjà, dans la première approximation, cette condition a exigé qu'on fît, page 53,

$$f_2 = (1-\mu)F,$$

μ étant le rapport de compensation, tiré de δn_1 et de δn_2 par la relation suivante :

$$\frac{\delta n_2}{n_2-1} = \mu\frac{\delta n_1}{n_1-1}.$$

Maintenant, si nous voulons assurer la constance de P_2 jusque dans les quantités du second ordre, l'expression plus exacte de f_2

en F qui en résultera, coïncidera toujours avec la précédente dans les termes du premier. On pourra donc employer celle-ci pour éliminer f_2 de δF; et l'on pourra aussi y exprimer δn_2 en δn_1, à l'aide de l'équation en μ. Ces opérations changent d'abord le terme

$$-\frac{F}{f_2}\frac{\delta n_2}{n_2(n_2-1)} \quad \text{en} \quad \frac{-\mu n_1}{(1-\mu)(n_1-1)}\frac{\delta n_1}{n_1^2}.$$

Alors, en le réunissant aux autres, qui multiplient e_1, et achevant les substitutions précitées, il vient finalement

$$\delta F = \frac{e_1}{n_1^2}\left[\frac{F}{r'_1}+\frac{\mu}{(\mu-1)(n_1-1)}\right]\delta n_1+\frac{e_2\mu(n_2-1)}{n_2^2(n_1-1)}\left(\frac{F}{r'_2}-1\right)\delta n_1+\frac{h_1\mu}{(\mu-1)(n_1-1)}\delta n_1.$$

Cette expression peut encore être simplifiée. En effet, dans la première approximation, la nécessité de la compensation achromatique a exigé, page 53, que l'on fît

$$\frac{1}{f_1} = \frac{\mu}{(\mu-1)F};$$

et l'on avait alors, dans ce même ordre d'approximation,

$$(n_1-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r'_1}\right) = \frac{1}{f_1};$$

par conséquent

$$\frac{F}{r'_1} = \frac{F}{r_1} - \frac{\mu}{(\mu-1)(n_1-1)}.$$

Cette valeur de $\frac{F}{r'_1}$ étant substituée dans δF, en contracte le premier terme, et donne

$$\delta F = \frac{e_1 F}{r_1}\cdot\frac{\delta n_1}{n_1^2}+\frac{e_2\mu(n_2-1)}{n_2^2(n_1-1)}\left(\frac{F}{r'_2}-1\right)\delta n_1+\frac{h_1\mu}{(\mu-1)(n_1-1)}\delta n_1.$$

D'après la remarque faite, page 59, § 47, il faudra joindre éventuellement au second membre un terme de la forme $-N_2(F-H)^2\delta P_2$, pour y comprendre la portion de δP_2 qui ne serait pas séparément détruite; mais je me borne ici à la mentionner.

51. En discutant les conditions qui peuvent rende nulle cette expression de δF, il est inutile d'avoir égard au signe propre de

δn_1, puisqu'il est commun à tous ses termes. Je le considère donc comme positif. Maintenant, il faut décider si l'on veut que la lentille de crown soit antérieure, et celle de flint postérieure, ou inversement. Car le jeu des termes qui composent δF est très-différent dans ces deux cas. Je me bornerai ici à considérer le premier, qui est aujourd'hui le seul que l'on réalise; et il suffira comme exemple d'application.

La lentille postérieure étant alors la plus dispersive, $\mu - 1$ est positif. Le coefficient de h_1 est donc positif aussi; et comme l'intervalle central h_1 doit toujours être employé avec le signe positif, pour réaliser l'ordre physique d'action que l'on attribue aux deux verres, son effet sur δF sera toujours positif, dans cette combinaison.

Passant au terme unique, qui est dû à l'épaisseur e_1 de la lentille antérieure, on voit qu'il est réciproque au rayon de courbure r_1 de sa première surface. Son pouvoir s'affaiblit donc à mesure que cette première surface s'aplatit; et il deviendrait tout à fait nul si elle était plane. En effet, si elle l'était, les rayons lumineux incidents qui seraient parallèles à l'axe central, la rencontreraient perpendiculairement. Ils traverseraient donc alors toute l'épaisseur du premier verre, quelque grande qu'elle pût être, sans se dévier; de sorte que l'influence de cette épaisseur sur eux serait rigoureusement nulle. Quant aux faisceaux obliques, elle serait seulement rendue très-petite, et négligeable dans les circonstances que nous considérons. Car, supposant, comme nous le faisons, qu'ils sont très-peu inclinés sur l'axe central, et que l'épaisseur e_1 est très-petite, les rayons lumineux qui les composent parviendraient à la seconde surface du verre, dans la même direction que si l'épaisseur e_1 était nulle, et aux mêmes points d'incidence, aux quantités du second ordre près.

C'est sans doute d'après un sentiment de ce résultat, donné par l'expérience, que les opticiens les plus habiles dans leur art ont pris maintenant l'usage de faire la première surface du crown sinon tout à fait plane, au moins d'une courbure bien plus longue que la seconde surface, lorsque la lentille de crown est antérieure, comme nous le supposons ici.

Discutons maintenant l'influence de l'épaisseur e_2 qui appartient au flint supposé postérieur. Le coefficient qui le multiplie hors des parenthèses est toujours positif. Mais le facteur compris dans les parenthèses peut varier de signe selon la valeur que l'on donne à r'_2; et il devient nul quand $r'_2 = +$ F, c'est-à-dire quand la surface postérieure du flint est égale à la distance focale principale de l'objectif, et de même signe qu'elle, ce qui rend ici cette surface concave vers le foyer principal. En effet, cette disposition ayant lieu, lorsqu'un faisceau de rayons incidents parallèle à l'axe central va converger vers ce foyer après les réfractions, tous les rayons émergents sortent du flint perpendiculairement à sa seconde surface, de sorte que son épaisseur, quelque grande qu'elle puisse être, n'a plus aucune influence sur eux; de même que celle du crown n'en avait pas sur le faisceau incident quand elle était plane. Et pareillement aussi, quand l'épaisseur e_2 de flint est très-petite, ce résultat s'étend aux faisceaux très-peu obliques sur l'axe central, aux quantités que du second ordre près.

Dans notre première approximation, la condition d'achromatisme a exigé que l'on fît, page 53,

$$\frac{1}{f_2} = (n_2 - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r'_2}\right) = \frac{1}{(1-\mu)F}.$$

Si l'on suppose $r'_2 = F$, on en tirera

$$r_2 = -\frac{(\mu - 1)(n_2 - 1)}{1 - (\mu - 1)(n_2 - 1)}\,F.$$

On pourrait donc concevoir un objectif où les influences des épaisseurs centrales seraient anéanties pour les deux lentilles. Alors les rayons de courbure de ses quatre surfaces se trouveront déterminés par cette condition, jointe à celle de l'achromatisme, et à la longueur F assignée pour la distance focale principale. On aurait ainsi le système de construction suivant :

Lentille antérieure de crown,

$$r_1 = \text{infini}, \qquad r'_1 = -\frac{(n_1 - 1)(\mu - 1)}{\mu}.F;$$

lentille postérieure de flint,

$$r_2 = -\frac{(\mu-1)(n_2-1)}{1-(\mu-1)(n_1-1)}F; \qquad r'_2 = F.$$

De là on tire

$$\frac{r_2}{r'_1} = \frac{(n_2-1)}{(n_1-1)}\frac{\mu}{[1-(\mu-1)(n_2-1)]}.$$

La lentille postérieure étant faite de la matière la plus réfringente et aussi la plus dispersive, n_2 surpasse n_1, et μ surpasse 1. Les deux rapports, dont le produit forme le second membre, sont donc l'un et l'autre plus grands que 1; de sorte que r_2 est plus grand que r'_1, et de même signe. Alors la seconde surface convexe de crown peut être mise en contact central avec la première surface concave du flint, ce qui permet de faire h_1 nul, comme il est nécessaire pour que δF s'évanouisse quand les deux termes dépendants des épaisseurs sont nuls séparément. Un objectif ainsi construit présenterait la forme indiquée *fig.* 4. Mais on va voir qu'il aurait des inconvénients graves.

Car d'abord il ne serait qu'imparfaitement achromatique. En effet, pour qu'il le fût exactement, il faudrait que δP_2 pût être rendu nul, jusque dans les quantités du second ordre de petitesse, puisque de telles quantités laissées dans δP_2, non-seulement altèrent l'achromatisme latéral, mais surtout se reportent agrandies dans δF, où elles sont multipliées par $(F-H)^2$. Or, les rayons des quatre surfaces étant ici déterminés complétement d'après les conditions adoptées, on ne pourrait plus disposer d'aucun d'eux, pour y faire les très-petites corrections qu'exige l'anéantissement exact de δP_2.

En second lieu, ces déterminations étant faites sans tenir aucun compte de l'aberration de sphéricité, il n'y a aucune vraisemblance qu'elles se trouvassent propres à l'affaiblir autant qu'il est nécessaire. En effet, si l'on attribuait à un tel objectif l'amplitude d'ouverture que la pratique permet habituellement d'admettre pour la distance focale F, et que l'on calculât rigoureusement la marche des rayons lumineux de réfrangibilité moyenne qui passent par ses bords, comme je montrerai bientôt à le faire,

on trouverait que ces rayons seraient beaucoup trop éloignés de converger au même foyer que ceux qui passent près de son centre.

Par ces deux motifs, au lieu de déterminer ainsi les rayons de courbure des surfaces, il faut leur laisser au contraire toute l'indétermination que permet la destruction exacte de δP_2, afin d'établir entre eux les relations les plus propres à affaiblir l'aberration de sphéricité dans l'objectif formé des deux lentilles. Après quoi, on réglera les épaisseurs e_1, e_2, ainsi que l'intervalle central h_1, de manière à achever de détruire complétement δF.

Je donnerai tout à l'heure des exemples numériques de cette application; mais auparavant il faut voir comment on pourra obtenir la destruction exacte, et si rigidement nécessaire, de δP_2.

82. Pour cela, je reprends l'expression complète de P_2, donnée page 35; et, en vertu de sa relation avec N_2, je la présente ainsi:

$$P_2 = \frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{N_2}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right).$$

Puis je substitue dans f_1 et f_2 les valeurs explicites de ε_1 et ε_2; et elles prennent cette forme

$$\frac{1}{f_1} = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r'_1}\right) - \frac{(n_1 - 1)^2}{n_1}\frac{e_1}{r_1 r'_1},$$

$$\frac{1}{f_2} = (n_2 - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r'_2}\right) - \frac{(n_2 - 1)^2}{n_2}\frac{e_2}{r_2 r'_2}.$$

Les épaisseurs e_1, e_2, étant l'une et l'autre supposées très-petites comparativement aux rayons de courbure des lentilles auxquelles elles appartiennent, la partie principale des seconds membres est celle qui en est indépendante. Je l'isole donc, en faisant, pour abréger,

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r'_1} = \frac{1}{R_1}; \qquad \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r'_2} = \frac{1}{R_2};$$

ce qui donne

$$\frac{1}{f_1} = \frac{(n_1 - 1)}{R_1} - \frac{(n_1 - 1)^2}{n_1}\frac{e_1}{r_1 r'_1}; \qquad \frac{1}{f_2} = \frac{(n_2 - 1)}{R_2} - \frac{(n_2 - 1)^2}{n_2}\frac{e_2}{r_2 r'_2};$$

et par suite

$$P_2 = \frac{N_2(n_1-1)}{\varepsilon_1}\cdot\frac{1}{R_1} + \frac{(n_2-1)}{\varepsilon_1}\frac{1}{R_2} - \frac{N_2(n_1-1)^2}{n_1\varepsilon_1}\frac{e_1}{r_1r_1'} - \frac{(n_2-1)^2}{n_2\varepsilon_1}\frac{e_2}{r_2r_2'}.$$

Appliquons maintenant la caractéristique δ aux divers termes de cette expression qui peuvent varier avec la réfrangibilité, sans la restreindre d'abord à indiquer des variations infiniment petites ; la condition exacte de la constance de P_2 sera

$$0 = \frac{1}{R_1}\delta\left[\frac{N_2(n_1-1)}{\varepsilon_1}\right] + \frac{1}{R_2}\delta\left(\frac{n_2-1}{\varepsilon_1}\right) - \frac{e_1}{r_1r_1'}\delta\left[\frac{N_2(n_1-1)^2}{n_1\varepsilon_1}\right] - \frac{e_2}{r_2r_2'}\delta\cdot\left[\frac{(n_2-1)^2}{n_2\varepsilon_1}\right],$$

il ne reste plus qu'à voir comment on pourra réaliser numériquement cette équation, en laissant à la caractéristique δ la généralité que je viens de lui attribuer.

Pour cela, je suppose qu'on ait commencé par effectuer l'approximation habituelle, où l'on considère les lentilles comme sans épaisseur. J'admets donc qu'en se guidant sur les indications de la pratique et du calcul, on ait déterminé, *pour ce cas*, les rayons antérieurs ainsi que postérieurs de chaque lentille, de manière qu'elles se compensent achromatiquement dans ce premier ordre d'approximation; et que l'aberration de sphéricité produite par leur ensemble, soit aussi rendue insensible ou très-faible, pour un faisceau incident parallèle à l'axe central. Ces déterminations ne seront encore qu'approximatives, à cause des épaisseurs négligées. Mais en y joignant la connaissance des plaques de verre que l'on veut employer, cela suffira pour évaluer, avec très-peu d'erreur, les épaisseurs e_1, e_2, les rapports $\frac{e_1}{r_1r_1'}$, $\frac{e_2}{r_2r_2'}$, et les termes analogues de N_2 ainsi que de ε_1, où les rayons de courbure servent de dénominateurs, soit aux épaisseurs, soit à l'intervalle h_1, supposé comme elles très-petit.

Alors on donnera successivement aux indices de réfraction n_1, n_2, les valeurs moyennes et extrêmes, que l'on veut embrasser dans la compensation chromatique, et l'on en déduira les valeurs correspondantes de tous les coefficients qui sont affectés de la

caractéristique δ, dans notre équation. Les différences respectives de ces résultats pour chaque coefficient, seront les quantités mêmes que la caractéristique désigne. Elles pourront ainsi être toutes calculées numériquement, sauf les termes qui dépendent de l'intervalle central h_1 qui reste arbitraire, parce que nous ne connaissons rien de sa valeur, si ce n'est qu'elle doit être essentiellement positive, et très-petite de l'ordre des épaisseurs. Alors les fonctions R_1, R_2 étant seules considérées comme inconnues dans l'équation de condition ici posée, on en tirerait la relation qu'il faut définitivement établir entre elles pour satisfaire exactement à la compensation chromatique que l'on a choisie.

Par exemple, considérons le premier de ces coefficients. D'après l'expression générale de N_2, donnée p. 38, il aura la forme suivante:

$$\frac{N_2(n_1-1)}{\varepsilon_1} = (n_1-1)\varepsilon_2 + \frac{e_1}{\varepsilon_1 f_2}\frac{(n_1-1)}{n_1} + \frac{h_1}{f_2}(n_1-1).$$

Alors, en prenant les rayons des courbures, déterminés par la première approximation, on pourra calculer numériquement les deux premiers termes du second membre, ainsi que le coefficient de h_1 pour les deux valeurs des indices de réfraction que la compensation chromatique doit embrasser. La différence de ces résultats sera $\delta\frac{N_2(n_1-1)}{\varepsilon_1}$, où h_1 restera en évidence.

33. Pour achever de rendre tout à fait sensible la nature ainsi que l'emploi pratique de ces rectifications, supposons que l'on veuille les pousser seulement un degré plus loin que dans le premier calcul approximatif, en considérant d'ailleurs la caractéristique δ comme signe de variations infiniment petites, ainsi que nous l'avions fait primitivement. Alors, dans les deux derniers termes de l'équation précédente, il suffira de remplacer ε_1 par l'unité, et $\frac{1}{f_2}$ par $\frac{n_2-1}{R_2}$, à cause des facteurs e_1 et h_1 qui les multiplient. Mettant donc seulement dans le premier terme, pour ε_1, sa valeur exacte, on aura

$$\frac{N_2(n_1-1)}{\varepsilon_1} = n_1-1-\frac{(n_1-1)(n_2-1)}{n_2}\frac{e_2}{r_2'} + \frac{(n_1-1)(n_2-1)}{n_1}\frac{e_1}{R_2} + (n_1-1)(n_2-1)\frac{h}{R}$$

et il ne restera plus qu'à appliquer immédiatement à chaque terme la caractéristique δ considérée comme signe des différences infiniment petites δn_1, δn_2.

Dans ce même ordre d'approximation, le second coefficient de P_2, qui est $\frac{n_2 - 1}{\varepsilon_1}$, deviendra

$$n_2 - 1 + \frac{(n_2 - 1)(n_2 - 1)}{n_1} \frac{e_1}{r'_1};$$

enfin, on pourra faire $N_2 = 1$ et $\varepsilon_1 = 1$ dans les deux derniers termes de P_2, où les épaisseurs e_1, e_2 entrent déjà explicitement comme multiplicateurs.

Si l'on effectue ainsi les calculs, dans la supposition des différences infiniment petites, en faisant, comme ci-dessus,

$$\mu = \frac{(n_1 - 1)\,\delta n_2}{(n_2 - 1)\,\delta n_1},$$

l'expression de δP_2, divisée par le facteur commun δn_1, prendra la forme suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\delta P_2}{\delta n_1} = {} & \frac{1}{R_1}\left[1 - \frac{(n_2-1)(\mu+n_2)}{n_2^2}\frac{e_2}{r'_2} + \frac{(n_2-1)(\mu n_1+1)}{n_1^2}\frac{e_1}{R_2} + (n_2-1)(\mu+1)\frac{h_1}{R_2}\right] \\ & + \frac{1}{R_2}\left[\mu\frac{(n_2-1)}{(n_1-1)} + \frac{(n_2-1)(\mu n_1+1)}{n_1^2}\frac{e_1}{r'_1}\right] \\ & - \frac{(n_1^2-1)}{n_1^2}\frac{e_1}{r_1 r'_1} - \frac{\mu(n_2^2-1)(n_2-1)}{n_2^2(n_1-1)}\frac{e_2}{r_2 r'_2}.\end{aligned}$$

On y voit maintenant l'influence que les épaisseurs e_1, e_2, ainsi que l'intervalle central h_1, exercent sur l'achromatisme latéral. Les deux termes indépendants de ces quantités sont les seuls auxquels on a égard dans l'approximation ordinaire. Car nous-mêmes, lorsque nous l'avons effectuée page 53, pour la distance focale supposée F, en négligeant les épaisseurs e_1, e_2, nous avions trouvé qu'il fallait faire

$$\frac{1}{f_1} = \frac{(n_1 - 1)}{R_1} = \frac{\mu}{(\mu - 1)F}; \quad \frac{1}{f_2} = \frac{(n_2 - 1)}{R_2} = -\frac{1}{(\mu - 1)F}.$$

Ceci, étant substitué dans l'équation actuelle, ferait disparaître les deux termes indépendants des épaisseurs et de l'intervalle h_1, mais laisse subsister tous ceux qui dépendent de ces quantités.

Sans sortir de notre nouvelle approximation, nous pouvons, dans ces derniers termes, employer les premières valeurs de R_1 et de R_2 que je viens de rappeler. Alors l'équation prend cette forme

$$\begin{aligned}\frac{\delta P_2}{\delta n_2} = {} & \frac{1}{R_1} + \frac{\mu(n_2-1)}{(n_1-1)}\frac{1}{R_2} - \frac{e_1}{n_1^2 F^2}\left[\frac{\mu(\mu n_1+1)}{(n_1-1)(\mu-1)^2} + \frac{(\mu n_1+1)}{(\mu-1)}\frac{F}{r'_1} + (n_1^2-1)\frac{F^2}{r_1 r'_1}\right] \\ & - \frac{\mu(n_2-1)\,e_2}{(n_1-1)n_2^2 F r'_2}\cdot\left[\frac{\mu+n_2}{\mu-1} + (n_2^2-1)\frac{F}{r_2}\right] \\ & - \frac{\mu(\mu+1)}{(n_2-1)(\mu-1)^2}\cdot\frac{h_1}{F^2};\end{aligned}$$

mais le coefficient de e_1 peut être simplifié, et ramené à une forme analogue à celui de e_2. En effet, si l'on reprend l'expression de $\frac{(n_1-1)}{R_1}$ en F employée dans la première approximation, et que l'on y mette pour $\frac{1}{R_1}$ sa valeur explicite, elle devient

$$(n_1-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r'_1}\right) = \frac{\mu}{(\mu-1)F},$$

ce qui donne

$$\frac{F}{r'_1} = \frac{F}{r_1} - \frac{\mu}{(n_1-1)(\mu-1)}.$$

On peut substituer cette valeur dans le coefficient de e_1, qui est déjà divisé par F^2. Or, en le faisant, et bornant la substitution, au second terme seul, qui ne contient que le rayon r_1, le terme indépendant des rayons de courbure disparaît, et $\frac{F}{r_1}$ devient un facteur commun des deux autres. On a ainsi

$$\begin{aligned}\frac{\delta P_2}{\delta n_1} = {} & \frac{1}{R_1} + \frac{\mu(n_2-1)}{(n_1-1)}\frac{1}{R_2} - \frac{e_1}{n_1^2 F r_1}\left[\frac{(\mu n_1+1)}{\mu-1} + (n_1^2-1)\frac{F}{r'_1}\right] \\ & - \frac{\mu(n_2-1)\,e_2}{(n_1-1)\,n_2^2 F r'_2}\left[\frac{\mu+n_2}{\mu-1} + (n_2^2-1)\frac{F}{r_2}\right] \\ & - \frac{\mu(\mu+1)}{(n_1-1)(\mu-1)^2}\cdot\frac{h_1}{F^2}.\end{aligned}$$

Enfin, je fais subir à cette expression un dernier changement, qui consiste à remplacer dans le second membre un des facteurs $\frac{1}{F}$

par sa valeur en $\frac{1}{R_2}$ de la première approximation, valeur qui est $-\frac{(n_2-1)(\mu-1)}{R_2}$. Cela ne sort point des limites que nous nous sommes prescrites, puisque la substitution ne s'applique qu'à des termes qui sont déjà, par eux-mêmes, du second ordre de petitesse. Mais alors tous les termes du second membre, qui ont pour diviseur R_2, acquièrent à leur numérateur le facteur commun $n_2 - 1$, qui permet de les réunir; et en multipliant, ensuite, les deux membres de l'équation par $n_1 - 1$, elle prend définitivement cette forme

$$(n_1-1)\frac{\delta P_2}{\delta n_1}=\frac{(n_1-1)}{R_1}+\frac{(n_2-1)}{R_2}\left\{\begin{array}{l}\mu+\frac{(n_1-1)}{n_1^2}\frac{e_1}{r_1}\left[\mu n_1+1+(n_1^2-1)(\mu-1)\frac{F}{r_1'}\right]\\ +\frac{(n_2-1)\mu}{n_2^2}\frac{e_2}{r_2'}\left[\mu+n_2+(n_2^2-1)(\mu-1)\frac{F}{r_2}\right]\\ +\frac{\mu(\mu+1)}{(\mu-1)}\frac{h_1}{F}\end{array}\right\}.$$

84. Pour se rendre un compte exact de cette expression, il faut se rappeler que μ est un nombre immédiatement donné par les expériences de dispersion, et que l'on s'en est servi, dans la première approximation, p.53, pour établir entre les fonctions $\frac{n_1-1}{R_1}$, $\frac{n_2-1}{R_2}$, une relation telle que les deux premiers termes de δP_2 se détruiraient d'eux-mêmes si elle était définitivement conservée. Maintenant, par un calcul plus exact, nous voyons que δP_2 contient d'autres termes que cette relation ne ferait pas évanouir, et dont il faut assurer aussi la destruction. Il est vrai que, dans tous les systèmes d'objectifs habituellement réalisés, ces termes sont toujours très-petits comparativement aux précédents, et c'est ce qui nous a permis de les évaluer ici avec simplicité, en y employant les premières expressions de R_1 et de R_2, comme devant être très-peu différentes des véritables. Supposant donc qu'en effet nous eussions calculé les quatre rayons de courbure de notre objectif avec la première condition approchée d'achromatisme, nous devrions ici introduire ces valeurs dans les termes additionnels qui dépendent de e_1, de e_2 et de h_1. Puis, leur somme étant évaluée en nombres

et ajoutée à μ, il en résulterait le véritable rapport de dispersion μ', qu'il faudrait employer pour établir entre R_1 et R_2 une relation telle que δP_2 fût complétement nul, et que l'achromatisme latéral eût lieu.

Or, cette nouvelle approximation sera d'autant plus exacte et d'autant plus sûre, qu'elle s'écartera moins de la première. Car si, par exemple, les premières valeurs des rayons de courbure se trouvaient telles que les termes ajoutés ici à μ fussent nuls d'eux-mêmes, il n'y aurait rien du tout à changer à ces premières valeurs pour assurer la constance de P_2. Il est donc essentiel d'examiner les caractères analytiques qui leur donneraient une propriété aussi importante. Et, si les courbures résultantes de cette condition ne se trouvent pas être les plus convenables pour affaiblir les aberrations de sphéricité, ce qui serait, en effet, un si grand hasard, il faudra, parmi celles qui possèdent ce dernier avantage, choisir les combinaisons qui s'en écartent le moins, et les employer par préférence à tous les autres. Car alors les termes ajoutés ici à μ seront certainement les plus faibles possibles; et le μ' qu'il faudra employer dans le calcul définitif, différant excessivement peu de μ, toutes les conditions qui légitiment les deux approximations seront complétement satisfaites.

55. Considérons d'abord le terme qui dépend de h_1, en supposant toujours que μ surpasse 1, c'est-à-dire que la lentille postérieure est la plus dispersive. Nous voyons que son coefficient numérique $\frac{\mu(\mu+1)}{(\mu-1)}$ sera positif; et comme h_1 est positif par lui-même, tandis que la distance focale F est négative, puisque l'objectif total doit être convergent, on voit que le terme total qui dépend de h_1 sera négatif dans tous les systèmes où le crown sera antérieur et le flint postérieur, ainsi que nous l'avons admis. L'influence de ce terme est fortifiée par le coefficient numérique qui l'affecte, et dont la valeur approche de 7 pour les matières les plus habituellement employées. Aussi, dans les objectifs où les deux lentilles, en contact par leurs bords, laissent entre elles un intervalle central sensible, on remarque que l'achromatisme est fortement influencé quand on modifie les courbures des surfaces intérieures, ce qui change en même temps l'intervalle h_1.

56. Examinons maintenant les termes qui dépendent des épaisseurs e_1, e_2. Chacune de ces quantités s'y trouve multipliée par deux facteurs littéraux, dont l'un $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r'_2}$ est précisément réciproque au rayon de courbure *extérieur* de la lentille à laquelle l'épaisseur appartient. On rendrait donc ces deux termes individuellement nuls, en faisant ces rayons infinis, c'est-à-dire la première et la quatrième surface exactement planes. Mais une telle combinaison, qui ferait porter toute la courbure des lentilles sur les surfaces intérieures, exigerait qu'on limitât considérablement leurs ouvertures pour que les aberrations de sphéricité y fussent insensibles, parce qu'elles s'accroissent rapidement avec la grandeur des angles d'incidence, que l'on cherche par ce motif à répartir moins inégalement. Toutefois, dans le choix des combinaisons qui peuvent ainsi les affaiblir, il est évident qu'on devra préférer celles qui donnent aux rayons extrêmes les plus grandes longueurs; et c'est aussi ce que l'on a soin de faire aujourd'hui presque généralement.

57. On améliorerait encore les résultats précédents, si ces grands rayons *extérieurs* pouvaient être associés à des *intérieurs* dont les longueurs fussent telles que l'autre facteur, qui multiplie chaque épaisseur, s'en trouvât très-affaibli, ou anéanti. Car alors les petites inexactitudes que l'on pourrait commettre dans l'exécution de ces courbures, ainsi choisies, ne donneraient que des valeurs très-petites aux termes que nous considérons; de sorte que l'achromatisme, théoriquement établi en les supposant nuls, n'en serait pas sensiblement altéré. Pour savoir si une telle association est possible, déterminons les rayons intérieurs par la condition même que chacun de ces facteurs devienne individuellement nul. Il en résultera

$$\frac{F}{r'_1} = -\frac{(\mu n_1 + 1)}{(n_1^2 - 1)(\mu - 1)}; \qquad \frac{F}{r_2} = -\frac{(\mu + n_2)}{(n_2^2 - 1)(\mu - 1)}.$$

Comme F doit être négatif, on voit que ces conditions donneront r'_1 et r_2, tous deux positifs; c'est-à-dire que les surfaces intérieures devront être toutes deux concaves vers les objets. En

divisant la première de ces équations, par la seconde, membre à membre, il vient

$$\frac{r_2}{r'_1} = \frac{(n_2^2 - 1)(\mu n_1 + 1)}{(n_1^2 - 1)\ (\mu + n_2)}:$$

avec les matières habituellement employées à la confection des objectifs achromatiques, le second membre surpasse toujours 1; c'est-à-dire que la surface antérieure du flint se trouve plus aplatie que la surface postérieure du crown. Toutes deux étant d'ailleurs concaves vers les objets, nous pouvons les mettre en contact central, ce qui nous permet de faire h_1 nul. Alors tous les termes qui s'ajoutent à μ étant évanouis, la constance de P_2 exige que l'on fasse

$$(1) \qquad 0 = \frac{n_1 - 1}{R_1} + \frac{\mu(n_2 - 1)}{R_2},$$

précisément comme dans la première approximation.

53. Maintenant cette relation doit être combinée avec l'expression exacte de δF, page 62, où l'on tient compte des épaisseurs e_1, e_2, ainsi que de l'intervalle h_1, sans rien négliger. Mais cette rigueur ne serait nécessaire que si l'on voulait absolument donner à l'objectif la distance focale fixe F que l'on avait assignée d'abord, ce qui n'est jamais exigé pour les applications, où l'on peut toujours se contenter de toute autre distance focale F′ très-peu différente. Or, prenons cet F′ *idéal* tel que l'on ait *rigoureusement*

$$(2) \qquad \frac{n_1 - 1}{R_1} + \frac{n_2 - 2}{R_2} = \frac{1}{F},$$

F étant la même longueur que nous avions d'abord employée comme distance focale dans la première approximation. Alors la distance focale vraie F′ résultante de cette nouvelle supposition différera seulement de F, par des quantités de l'ordre des épaisseurs, et de l'intervalle h_1; en sorte qu'elle satisfera toujours suffisamment aux conditions de longueur absolue que l'on se proposait d'obtenir avec F. Maintenant, si nous avions effectué, pour ce cas spécial, le développement de δP_2, il aurait été le même en F′ que nous l'avons trouvé

ici en F; et de plus, on aurait pu y remplacer F′ par F, sans sortir des bornes de notre approximation. Admettant donc que nous ayons opéré ainsi, l'équation (1) en μ devra se combiner avec la dernière relation (2) entre R_1 et R_2 que nous venons de poser, précisément comme nous l'avions fait dans notre première approximation, où nous avions négligé les épaisseurs. De sorte qu'en mettant pour R_1 et R_2 leurs valeurs explicites conventionnellement établies page 66, il en résultera de même

$$-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r'_1}\right)=\frac{\mu}{(\mu-1)F}; \qquad (n_2-1)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r'_2}\right)=-\frac{1}{(\mu-1)F};$$

d'où l'on tire

$$\frac{F}{r_1}=\frac{F}{r'_1}+\frac{\mu}{(\mu-1)(n_1-1)}; \qquad \frac{F}{r'_2}=\frac{F}{r_2}+\frac{1}{(\mu-1)(n_2-1)}.$$

Alors, en combinant ces deux équations, avec les expressions de $\frac{F}{r'_2}$ et de $\frac{F}{r_2}$ que nous venons de former, page 73, § 87, on obtiendra les valeurs des quatre rayons de courbure de notre objectif, dans lequel la constance chromatique de P_2 sera si exactement assurée; et ces valeurs seront telles qu'il suit :

$$\text{own antérieur } r_1=+\ (n_1^2-1)\,F, \qquad r'_1=-\frac{(n_1^2-1)(\mu-1)F}{(\mu n_1+1)};$$

$$\text{nt postérieur } r_2=-\frac{(n_2^2-1)(\mu-1)}{\mu+n_2}F, \qquad r'_2=-\ (n_2^2-1)F.$$

Pour connaître leur influence sur la dispersion longitudinale des foyers, je les substitue dans l'expression générale de δF, page 62, après y avoir fait h_1 nul, ainsi que δP_2; puis j'écris $\delta F'$ au lieu de δF, et il vient

$$\delta F'=+\frac{e_1}{n_1^2(n_1^2-1)}\delta n_1-\frac{e_2\mu}{(n_1-1)(n_2+1)}\delta n_1.$$

Les coefficients de e_1 et de e_2 étant de signes contraires dans cette expression, les épaisseurs pourront toujours être prises dans un rapport tel que les termes qui y correspondent s'entre-détruisent; et alors l'achromatisme longitudinal sera parfait comme le latéral,

dans les limites de notre approximation. Avec les matières habituellement en usage, l'épaisseur centrale du crown devrait être entre trois et quatre fois celle du flint.

89. Ces expressions des rayons de courbure devant toujours servir comme de types dont il faudra se rapprocher autant que le permettra l'atténuation nécessaire des aberrations de sphéricité, je les réduirai en nombres pour les mêmes éléments de réfraction et de dispersion, qui ont été employés dans la construction d'un objectif de Fraunhoffer que je prendrai tout à l'heure pour exemple. Ces éléments étaient tels que l'exprime le tableau suivant :

	INDICES DE RÉFRACTION	
	du crown.	du flint.
Pour les rayons de réfrangibilité moyenne.....	$n_1 = 1,5300$	$n_2 = 1,634694$
Pour les rayons rouges.....	$n_1 = 1,5210$	$n_2 = 1,616707$
Ce qui donne.....	$\delta n_1 = -0,009$	$\delta n_2 = -0,017787$
Et par suite... $\mu = 1,650853$		

Avec ces éléments, les expressions précédentes des quatre rayons de courbure, qui établissent l'achromatisme latéral de la manière la plus stable, acquièrent les valeurs suivantes :

crown antérieur $r_1 = +1,34090.F,$
$r'_1 = -0,24696.F;$
flint postérieur $r_2 = -0,33115.F,$
$r'_2 = -1,67157.F,$

et la dispersion longitudinale des foyers, en supposant h_1 nul, est

$$\delta F' = (+0,318582.e_1 - 1,18232.e_2)\delta n_1;$$

de sorte que pour la détruire complétement, il faut prendre

$$e_1 = 3,71120.e_2,$$

ce qui rentre dans les relations d'épaisseur annoncées plus haut.

F est la longueur de distance focale que l'on se propose d'obtenir, et la vraie valeur résultante F′, calculée rigoureusement avec les rayons exprimés en F, ainsi qu'avec les épaisseurs admises, en sera toujours très-peu différente. Le double objectif ainsi construit aurait la forme représentée *fig.* 5.

60. On voit, par ces nombres, qu'un tel système réunit, comme nous l'avions souhaité, les deux avantages de donner aux surfaces extérieures des rayons de courbure d'une grande longueur, en les associant à des intérieurs dont les valeurs propres suffiraient pour opérer l'achromatisme latéral, de sorte que ces deux circonstances se réunissent pour l'assurer. Si donc on pouvait trouver des courbures qui, en se rapprochant de celles-ci, pussent suffisamment affaiblir les aberrations de sphéricité, dans les dimensions d'ouverture habituellement données aux grands objectifs, elles auraient un caractère de *stabilité achromatique* qui devrait les faire préférer à toutes les autres.

61. Or, c'est là précisément ce que l'on trouve dans un système de courbures qui a été *exécuté* par Fraunhoffer, et que l'on a depuis reproduit fréquemment avec succès, en n'y apportant que de très-légères modifications. Les indices de réfraction et de dispersion étaient les mêmes que j'ai employés tout à l'heure; et tous les autres éléments du double objectif, exprimés dans un même système d'unités, avec des signes conformes à notre notation, étaient tels qu'il suit :

$$\text{crown antérieur} \left\{ \begin{array}{l} r_1 = -\ 1794,2490 \\ r'_1 = +\ 714,4946 \end{array} \right\} e_1 = 10,72;$$

$$\text{flint postérieur} \left\{ \begin{array}{l} r_2 = +\ 728,1631 \\ r'_2 = +\ 2611,8960 \end{array} \right\} e_2 = 8,45;$$

demi-diamètre d'ouverture antérieur $\lambda_1 = 81,4308$.

Le sens de toutes les courbures est le même auquel nous avons été tout à l'heure conduit. Pour établir la comparaison plus immédiatement, j'ai calculé sur ces éléments la valeur *exacte* de la distance focale principale F, pour les rayons de réfrangibilité moyenne, en appliquant notre formule générale de la page 56, sans y rien négliger; et j'ai trouvé ainsi, dans le même système d'unités,

$$F = -\ 2442,2128.$$

J'ai alors exprimé tous les éléments de l'objectif, en parties de cette distance focale prise pour unité de longueur; et j'ai obtenu les expressions suivantes :

$$\text{crown antérieur} \begin{cases} r_1 = +0{,}7347120.F \\ r'_1 = -0{,}2925724.F \end{cases} \quad e_1 = -0{,}00438964 2.F;$$

$$\text{flint postérieur} \begin{cases} r_2 = -0{,}2981695.F \\ r'_2 = -1{,}069523.\ F \end{cases} \quad e_2 = -0{,}00346011 8.F;$$

la demi-ouverture antérieure $\lambda_1 = -0{,}0333441.F$.

Cette demi-ouverture est presque exactement $\frac{1}{30}$ de la distance focale; en la divisant par le rayon de courbure antérieur, on voit qu'un rayon lumineux parallèle à l'axe central y rencontrerait la première surface sous un angle d'incidence égal à $2° 36' 4'' \frac{1}{2}$. La forme du double objectif construit sur ces nombres est représentée *fig.* 6, en donnant à F la même valeur que dans les *fig.* 4 et 5.

Les courbures extérieures de Fraunhoffer sont d'un rayon moins grand que les nôtres, mais de même sens. Par une conséquence nécessaire pour l'achromatisme dans un tel système, son rayon postérieur du crown est plus long que notre r'_1, et son antérieur du flint plus court que notre r_2. Mais ils offrent la particularité d'être très-peu différents entre eux; à ce point que la séparation des deux surfaces est insensible, ou à peine sensible pour l'échelle de longueur employée dans la figure. On doit donc présumer que Fraunhoffer aura considéré cette circonstance comme favorable à l'affaiblissement de l'aberration de sphéricité dont nous n'avions tenu aucun compte. Cette conjecture est en effet confirmée par le calcul, du moins quand on l'éprouve par les formules d'Euler, où l'on néglige les épaisseurs centrales des lentilles : c'est ce que je prouverai dans un moment. Je montrerai, alors, comment, dans cette limite d'approximation, on peut trouver, par un calcul direct, les systèmes de courbures qui éteignent cette aberration, en approchant le plus possible de conserver les conditions d'achromatisme stable que nous venons d'établir.

62. Puisque les courbures adoptées par Fraunhoffer diffèrent de celles qui détruiraient immédiatement les termes additifs à μ

dans l'expression de δP_2, il faut, si son objectif est achromatique dans le sens longitudinal, que les deux quantités $\frac{n_1-1}{R_1}$, $\frac{n_2-1}{R_2}$. y aient été calculées avec un rapport de dispersion μ' différent de μ que nous avons vu être 1,650853. Or, en effet, si l'on évalue ces deux quantités dans cet objectif, d'après les valeurs assignées aux éléments qu'elles contiennent, et qu'on pose ensuite, comme on doit le faire,

$$\frac{(n_1-1)}{R_1} + \mu' \frac{(n_2-1)}{R_2} = 0,$$

on trouve

$$\mu' = 1,650390;$$

cette valeur est sensiblement moindre que μ, et elle en diffère dans le sens convenable pour l'anéantissement de δP_2 dans la constitution donnée du système; mais elle est encore un peu trop forte, comme on va le voir.

Pour le prouver, je calcule exactement les termes qui s'ajoutent à μ dans l'expression de δP_2, en y introduisant les valeurs des éléments assignés au système, et je trouve ainsi d'abord

$$(n_1-1)\frac{\delta P_2}{\delta n_1} = \frac{(n_1-1)}{R_1} + \frac{(n_2-1)}{R_2}\left(\mu + 0,1672554\frac{e_1}{F} + 0,1332817\frac{e_2}{F} + 6,723746\frac{h_1}{F}\right).$$

Ici μ est le rapport de dispersion primitif, immédiatement conclu des expériences prismatiques, et qui nous est donné égal à 1,650853. Les deux premiers termes qui s'y ajoutent dépendent des épaisseurs, et l'on voit qu'ils seront négatifs comme F. Le troisième terme, dépendant de h_1, montre l'influence de l'intervalle central, qui est fortifiée par la grandeur de son coefficient numérique. Mais, dans le système de Fraunhoffer, les deux lentilles sont supposées si rapprochées du contact, que h_1 est insensible; de sorte que nous devons traiter ce dernier terme comme nul. Mettant donc pour $\frac{e_1}{F}$, $\frac{e_2}{F}$, leurs valeurs numériques dans les deux autres, puis les soustrayant de μ qui nous est donné, on a

$$(n_1-1)\frac{\delta P_2}{\delta n_1} = \frac{(n_1-1)}{R_1} + \frac{(n_2-1)}{R_2}\ 1,64965769.$$

D'après cela, pour rendre δP_2 exactement nul, il aurait fallu établir entre les fonctions R_1, R_2, la relation nécessaire pour anéantir le second membre, c'est-à-dire prendre

$$\mu' = 1,649657 69,$$

au lieu que Fraunhoffer a fait

$$\mu' = 1,650390.$$

La petite différence que nous trouvons, n'avait-elle sur l'achromatisme latéral qu'une influence négligeable? On ne saurait l'affirmer. Mais on pourrait croire que Fraunhoffer n'avait pas théoriquement égard à cette condition, que, vraisemblablement, il ne connaissait pas. Car l'erreur laissée ici dans δP_2 est précisément telle, que, en se combinant avec les autres éléments de δF, elle rend cette dernière variation sensiblement nulle, et complète ainsi l'achromatisme longitudinal auquel Fraunhoffer avait certainement égard.

63. En effet, puisqu'il a établi, entre R_1 et R_2, la relation

$$0 = \frac{(n_1 - 1)}{R_1} + \frac{(n_2 - 1)}{R_2} 1,650390,$$

introduisons-la dans notre expression de δP_2 pour en faire disparaître R_1; et comme $\mu = 1,650853$, il restera, en conservant h_1,

$$(n_1 - 1)\frac{\delta P_2}{\delta n_1} = \frac{(n_2 - 1)}{R_2}\left(0,000463 + 0,1672554\,\frac{e_1}{F} + 0,1332817\cdot\frac{e_2}{F} + 6,723746\cdot\frac{h_1}{F}\right),$$

ou, en multipliant le terme purement numérique par $-2442,2128$, qui est la valeur négative de F, et mettant F en facteur commun,

$$(n_2 - 1)\frac{\delta P_2}{\delta n_1} = \frac{(n_2 - 1)}{FR_2}\left(-1,130744 + 0,1672554\,e_1 + 0,1332817\,e_2 + 6,723746\,h_1\right).$$

Maintenant, dans le second membre, on peut remplacer R_2 par sa valeur en F, qui, dans la première approximation, ainsi qu'on l'a vu page 69, est, ou a dû être

$$\frac{n_2 - 1}{R_2} = -\frac{1}{(\mu - 1)F}.$$

Je fais donc cette substitution; et, en mettant pour $n_1 - 1$ et $\mu - 1$

leurs valeurs numériques, j'ai

$$= -\frac{1}{F^2}\left(-3,277975 + 0,484865.e_1 + 0,386378.e_2 + 19,49183.h_1\right).$$

D'après ce qui a été démontré à la fin du § 50, page 62, cette expression de δP_2 se transporte dans δF en prenant le facteur $-N_2(F-H)^2$, lequel, à cause de l'ordre des quantités qui composent le second membre, peut se réduire à $-F^2$, ce qui fait disparaître ce même terme du dénominateur. Or, si l'on réduit en nombres les autres termes de $\frac{\delta F}{\delta n_1}$, sous la forme analytique que nous leur avons donnée page 62, la valeur complète de ce rapport se trouve être

$$\frac{\delta F}{\delta n_1} = +0,581457.e_1 - 1,431436.e_2 + 4,785746.h_1 - F^2\frac{\delta P_2}{\delta n_1}.$$

Ainsi, en mettant pour le dernier terme sa valeur précédente, il vient

$$\frac{\delta F}{\delta n_1} = -3,277975 + 1,066322.e_1 - 1,045058.e_2 + 24,277576.h_1.$$

On voit que les deux termes dépendants des épaisseurs sont de signe contraire entre eux. On peut remarquer aussi la grande influence du terme qui dépend de l'intervalle h_1. Ici, dans les conditions adoptées par Fraunhoffer, ce terme est nul. Mettant donc, pour les épaisseurs e_1, e_2, leurs valeurs absolues 10,72 et 8,45, exprimées dans l'espèce d'unités qu'il a choisies, et que nous avons ici conservées dans l'évaluation de F, on trouve

$$\frac{F}{\delta n_1} = -0,676755.$$

Or on a, par les données primitives sur la dispersion du crown,

$$\delta n_1 = -0,009.$$

Il en résulte donc définitivement

$$\delta F = +0,0060908;$$

et comme la valeur de F, exprimée dans la même espèce d'unités linéaires, est

$$F = -2442,2128,$$

on voit que la valeur de δF est insensible comparativement à la valeur totale de F ; de sorte que l'aberration longitudinale de réfrangibilité est exactement corrigée par le choix des courbures et des épaisseurs.

Les relations trouvées plus haut, page 75, pour établir *un achromatisme stable,* se rapprochant extrêmement de celles de Fraunhoffer que l'expérience a si bien confirmées, il reste à voir comment on pourra les concilier en général avec les conditions analytiques qui détruisent, ou du moins affaiblissent, les aberrations de sphéricité de l'objectif complexe. Tel est l'objet des paragraphes suivants.

De l'aberration de sphéricité, et des meilleurs moyens à employer pour la détruire simultanément avec l'aberration chromatique dans les objectifs astronomiques composés de deux lentilles en contact central.

64. Lorsqu'un pinceau conique de rayons lumineux homogènes rencontre un système de surfaces sphériques réfringentes ou réfléchissantes, disposées consécutivement sur un même axe central, sous les conditions restreintes de direction, d'amplitude, et d'incidences, que nous avons jusqu'ici admises et qui ont été spécifiées dans le tome Ier, page 375, l'action des surfaces le transforme en un autre pinceau pareillement conique, d'un angle plus ou moins ouvert, dont le sommet constitue le foyer, réel ou virtuel, du pinceau incident. Alors chaque point rayonnant compris dans les conditions d'admissibilité, ayant pour image finale un point unique, les objets lumineux composés de tels points produisent aussi des images nettes et définies, que l'œil, placé à une distance convenable, peut regarder et percevoir distinctement. Mais cette pureté d'effets n'est qu'approximative, et résulte essentiellement des restrictions que nous avons fixées. A mesure que le pinceau incident devient plus incliné sur l'axe central des surfaces, ou que celles-ci offrent une plus grande ouverture d'inci-

dence aux rayons qui le composent, la direction finale de ces rayons n'est plus dirigée coniquement vers un même point; et chaque centre de rayonnement donnant ainsi une image dilatée, celles qui proviennent de points voisins empiètent les uns sur les autres, de sorte que les images des objets deviennent confuses. C'est en cela que consiste l'*aberration de sphéricité*.

Afin de l'étudier utilement pour les applications aux instruments optiques, il faut la restreindre au cas où les inclinaisons des rayons lumineux sur l'axe central, ainsi que l'amplitude d'ouverture des surfaces, sortiraient seulement quelque peu des limites auxquelles nous les avions bornées dans nos premiers calculs. Car ce faible degré d'extension ne pouvant opérer qu'une dispersion pareillement très-faible dans les foyers donnés par les diverses portions des surfaces successives, on pourra essayer d'en combiner le sens et la grandeur, de telle sorte que ces dispersions se compensent dans la formation du foyer final.

65. Les formules que nous avons établies, tome Ier, page 366, se prêtent à cette recherche de la manière la plus générale; et quoique je ne puisse pas entrer ici dans les détails qu'elle exigerait, je vais du moins indiquer la marche qu'il faudrait suivre si l'on voulait l'effectuer. Dans la première application que nous en avons faite, page 375, § 27, nous y avons considéré, comme des quantités très-petites, les inclinaisons successives X, X_1, X_2,... du rayon lumineux sur l'axe central, ainsi que les angles ξ, ξ_1, ξ_2, formés avec ce même axe par les rayons de courbure menés aux points d'incidence successifs. Il faut encore leur conserver cette idée de limitation. Mais alors nous la supposions telle qu'on pouvait borner les développements à la première puissance de ces quantités, au lieu que maintenant il faudra les pousser jusqu'à la puissance immédiatement subséquente. Par exemple, pour obtenir les équations approchées (1) de la page 379, lesquelles expriment l'action de la première surface du système, nous avons négligé, dans les équations complètes de la page 366, les produits $\frac{x_1}{r_1}\sin^2\frac{1}{2}V$; $\frac{y_1}{r_1}\sin^2\frac{1}{2}V'$; $\frac{z_1}{r_1}\sin^2\frac{1}{2}V$; $\frac{z_1}{r_1}\sin^2\frac{1}{2}V'$. Ici il faudra les conserver. Mais, à cause

de la petitesse de leurs premiers facteurs, on pourra y remplacer $\sin^2 \frac{1}{2} V$, $\sin^2 \frac{1}{2} V'$, par leurs valeurs appréciées seulement jusque dans les limites de la première approximation. Cela change d'abord ces carrés en $\frac{1}{4}\sin^2 V$, $\frac{1}{4}\sin^2 V'$; ou $\frac{1}{4}\sin^2 V$, $\frac{1}{4}\frac{u^2}{u_1^2}\sin^2 V$. De sorte que les deux dernières équations (1), de la page 366, étant ainsi limitées, deviennent

$$u_1 \cos Y_1 = u \cos Y + (u_1 - u)\frac{y_1}{r_1} + \frac{y_1}{2r_1}\frac{u(u_1 - u)}{u_1}\sin^2 V;$$

$$u_1 \cos Z_1 = u \cos Z + (u_1 - u)\frac{z_1}{r_1} + \frac{z_1}{2r_1}\frac{u(u_1 - u)}{u_1}\sin^2 V.$$

Maintenant $\sin^2 V$ n'a plus besoin d'être évalué que jusque dans les quantités du second ordre. Or on le déduit de $\cos^2 V$ en élevant au carré les deux membres de la première des équations (3), page 366; chassant de là $\frac{(x_1 - a)}{r_1}$ par l'équation de la sphère, et $\cos X$ par la relation des trois cosinus, puis bornant les résultats au degré d'approximation prescrit. On trouve ainsi finalement :

$$\sin^2 V = \left(\cos Y - \frac{y_1}{r_1}\right)^2 + \left(\cos Z - \frac{z_1}{r_1}\right)^2;$$

alors la substitution de cette valeur dans les équations précédentes donne

$$u_1 \cos Y_1 = u \cos Y + \frac{y_1}{r_1}(u_1 - u) + \frac{y_1}{2r_1}\frac{u(u_1 - u)}{u_1}\left[\left(\cos Y - \frac{y_1}{r_1}\right)^2 + \left(\cos Z - \frac{z_1}{r_1}\right.\right.$$

$$u_1 \cos Z_1 = u \cos Z + \frac{z_1}{r_1}(u_1 - u) + \frac{z_1}{2r_1}\frac{u(u_1 - u)}{u_1}\left[\left(\cos Y - \frac{y_1}{r_1}\right)^2 + \left(\cos Z - \frac{z_1}{r_1}\right.\right.$$

Maintenant, si les angles Y, Z, doivent appartenir à un rayon lumineux, émané d'un point dont les coordonnées sont a, b, c, on n'aura plus simplement, comme dans la première approximation, page 398,

$$\cos Y = \frac{(y_1 - b)}{\Delta}; \qquad \cos Z = \frac{(z_1 - c)}{\Delta}$$

en faisant $\Delta = a_1 + r_1 - a$,

en sorte que Δ soit la différence d'abscisse entre le centre de figure de la surface d'incidence et le point rayonnant. Il faudra recourir aux valeurs exactes de cos Y et cos Z de la page 391; les développer jusqu'à la seconde puissance de tang X, et substituer pour tang² X son expression exacte, page 388. On aura ainsi d'abord

$$\cos Y = \frac{y_1 - b}{x_1 - a} - \frac{1}{2}\frac{(y_1 - b)}{x_1 - a}\left[\frac{(y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2}{(x_1 - a)^2}\right],$$

$$\cos Z = \frac{z_1 - c}{x_1 - a} - \frac{1}{2}\frac{(z_1 - c)}{x_1 - a}\left[\frac{(y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2}{(x_1 - a)^2}\right].$$

Maintenant $x_1 - a_1$ est donné en y_1 et z_1 par l'équation de la sphère; et, en développant sa valeur comme dans la page 394, puis l'arrêtant aux termes du second ordre, on trouve

$$x_1 = a_1 + r_1 - \frac{1}{2r_1}(y_1^2 + z_1^2);$$

conséquemment

$$x_1 - a = \Delta\left[1 - \frac{1}{2r_1\Delta}(y_1^2 + z_1^2)\right] \text{ et } \frac{1}{x_1 - a} = \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{2r_1\Delta^2}(y_1^2 + z_1^2);$$

$\frac{1}{x_1 - a}$ ne diffère ainsi de $\frac{1}{\Delta}$ que dans les quantités du second ordre. On peut donc le remplacer par $\frac{1}{\Delta}$ dans les derniers termes de cos Y et cos Z qui sont déjà du troisième; mais pour les premiers il faut prendre sa valeur complète. En réunissant les résultats de ces substitutions, il vient en définitive

$$\cos Y = \frac{(y_1 - b)}{\Delta} + \frac{1}{2}\frac{(y_1 - b)}{\Delta}\left[\frac{y_1^2 + z_1^2}{\Delta r_1} - \left(\frac{y_1 - b}{\Delta}\right)^2 - \left(\frac{z_1 - c}{\Delta}\right)^2\right],$$

$$\cos Z = \frac{(z_1 - c)}{\Delta} + \frac{1}{2}\frac{(z_1 - c)}{\Delta}\left[\frac{y_1^2 + z_1^2}{\Delta r_1} - \left(\frac{y_1 - b}{\Delta}\right)^2 - \left(\frac{z_1 - c}{\Delta}\right)^2\right].$$

Enfin, les équations courantes du rayon qui a subi l'action de la surface, étant, d'après la page 388,

$$y - y_1 = (x - x_1)\frac{\cos Y_1}{\cos X_1}, \qquad z - z_1 = (x - x_1)\frac{\cos Z_1}{\cos X_1},$$

on ne pourra plus, comme dans la page 401, y remplacer l'abscisse x_1 du point d'incidence, par l'abscisse $a_1 + r_1$ ou $a + \Delta$ du centre de figure du segment sphérique. Il faudra tenir compte de leur différence, dépendante de la distance du point d'incidence à l'axe central; et en l'évaluant jusque dans les limites de la nouvelle approximation, comme nous venons tout à l'heure de le faire, on aura

$$x_1 = a + \Delta - \tfrac{1}{2} r_1 \left[\left(\frac{y_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{r_1}\right)^2\right].$$

Pareillement, on ne pourra plus remplacer cos X par l'unité, aux dénominateurs des seconds membres des deux projections; il faudra prendre les deux premiers termes du développement de la page 381, qui donnent

$$\frac{1}{\cos X_1} = 1 + \tfrac{1}{2}\sin^2 X_1 = 1 + \tfrac{1}{2}(\cos^2 Y_1 + \cos^2 Z_1),$$

puis on y remplacera $\cos^2 Y_1$, $\cos^2 Z_1$ par leurs valeurs approchées seulement dans les limites de la première approximation, page 379, ce qui donnera

$$\frac{1}{\cos X_1} = 1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{u_1^2}\left[\left\{\cos Y + \frac{y_1}{r_1}\frac{(u_1 - u)}{u}\right\}^2 + \left\{\cos Z + \frac{z_1}{r_1}\frac{(u_1 - u)}{u}\right\}^2\right],$$

ou, si le rayon lumineux considéré part d'un point rayonnant défini,

$$\frac{1}{\cos X_1} = 1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{u_1^2}\left[\left\{\frac{(y_1 - b)}{\Delta} + \frac{y_1}{r_1}\frac{(u_1 - u)}{u}\right\}^2 + \left\{\frac{z_1 - c}{\Delta} + \frac{z_1}{r_1}\frac{(u_1 - u)}{u}\right\}^2\right].$$

On devra donc introduire cette expression, conjointement avec celle de x_1, dans les équations courantes du rayon lumineux. Mais en le faisant il ne faudra conserver que les produits qui ne dépassent pas le troisième ordre de petitesse auquel la nouvelle approximation se borne. On aura ainsi ces équations exactes jusque dans les termes dont il s'agit.

66. On pourra alors répéter sur ces formules plus précises, les mêmes épreuves que nous avons faites sur les premières; et la marche des calculs sera absolument pareille. Ainsi, en faisant

y_1 et z_1 tous deux nuls, on aura les équations particulières du rayon lumineux qui aura percé la surface d'incidence à son centre de figure, et qui proviendra de l'axe géométrique du pinceau incident. En les combinant avec celle de tout autre rayon émané du même point, mais pour lequel y_1 et z_1 ne seront pas nuls, on pourra voir si ces deux rayons se coupent, et si le point d'intersection, au cas qu'il existe, est commun à tous les rayons qui constituent le pinceau incident, comme cela avait lieu dans la première approximation. Or, ici l'on trouve que les résultats sont bien différents. Car, d'abord, le rayon réfracté central est coupé par les seuls rayons excentriques qui étaient primitivement contenus dans la même section centrale que lui; et le manque d'intersection subsiste, pour tous les autres, quelque petit qu'on suppose l'angle $_eX$ formé avec l'axe central par l'axe géométrique du pinceau incident, c'est-à-dire pour peu que le point rayonnant soit situé hors de l'axe central de la surface d'incidence. En outre, dans la section centrale même, le rayon réfracté central est coupé par les rayons excentriques en des points différents, selon la distance des points d'incidence à l'axe central de la surface sphérique. Tout cela a lieu dans la réflexion, comme dans la réfraction, avec les seules variations numériques propres à ces deux cas.

Cette déformation, tant latérale que longitudinale, des pinceaux coniques, qui ont subi l'action d'une seule surface sphérique, doit généralement s'accroître après qu'ils en ont rencontré un plus grand nombre. La complète perfection d'un instrument optique consisterait donc à restituer finalement aux surfaces rayonnantes dérivées d'un même pinceau, le caractère primitif de conicité indispensable pour que chaque point rayonnant fût représenté, dans l'image finale, par un point unique. Mais, d'après ce que je viens de dire, ce caractère qui, dans notre première approximation, se trouvait résulter si simplement des limitations imposées aux inclinaisons des rayons lumineux sur l'axe central, ainsi qu'aux ouvertures des surfaces, ne peut plus, lorsqu'on sort de ces limites, être obtenu, ou même espéré, que comme une conséquence particulière de certaines relations spéciales qu'on établirait entre les éléments de l'appareil optique; et en supposant que de telles rela-

tions fussent pratiquement réalisables, elles seraient excessivement difficiles à découvrir, à cause de la complication des calculs nécessaires pour les mettre en évidence.

67. On aurait sans doute moins de difficultés à vaincre, si l'on se bornait à les chercher pour les seuls rayons lumineux qui sont compris dans la section centrale du pinceau incident; mais cela même n'a pas été fait jusqu'ici. Les géomètres se sont bornés au cas beaucoup plus restreint, où l'on considère un seul pinceau de rayons incidents, parti d'un point situé sur l'axe central même de toutes les surfaces, ce qui met chacun des rayons dans une même section centrale avec cet axe, devenu l'axe géométrique du pinceau incident. Alors, si l'on isole dans la surface d'incidence un cercle dont le demi-diamètre soit $\sqrt{y_1^2 + z_1^2}$, tous les rayons du pinceau qui rencontrent la surface sur le contour de ce cercle vont finalement couper l'axe central en un même point, qui est leur foyer commun. Si l'on désigne par δ_m la distance de ce foyer, en avant du centre de figure de la dernière surface du système, Δ étant la distance du point rayonnant au devant du centre analogue de la surface d'incidence, δ_m sera généralement une fonction de $\sqrt{y_1^2 + z_1^2}$ et de Δ, laquelle devra coïncider avec la distance focale Δ_m donnée par notre première approximation pour le même Δ, lorsque les coordonnées latérales d'incidence y_1, z_1, deviendront suffisamment petites, relativement à Δ, pour que toutes les restrictions exigées par cette approximation soient satisfaites. La différence $\Delta_m - \delta_m$ exprimera donc, dans ce cas, l'*aberration longitudinale de sphéricité*, correspondante au demi-diamètre $\sqrt{y_1^2 + z_1^2}$ du cercle d'incidence. Ainsi la perfection de l'appareil exigera qu'elle devienne nulle pour chaque valeur de cet élément, comprise depuis zéro jusqu'au demi-diamètre λ_1 de la surface d'incidence. Mais comme déjà $\Delta_m - \delta_m$ est nul quand λ_1 est nul, par la nature même de δ_m, on conçoit que si λ_1 est encore restreint dans d'étroites limites, il suffira d'assurer la même condition de nullité dans le cas de la plus grande valeur qu'on veuille attribuer à λ_1, pour qu'elle ait lieu aussi, assez approximativement, dans toutes les valeurs intermédiaires. C'est là l'unique condition que les géomètres soient, jusqu'à présent, par-

venus à exprimer. Elle est certainement indispensable à la bonté des appareils; mais on voit, par la discussion précédente, combien elle est particulière et insuffisante pour assurer l'ensemble des qualités qui seraient nécessaires à leur perfection.

68. Euler, dans sa *Dioptrique*, est parvenu à l'exprimer analytiquement pour un nombre quelconque de lentilles réfringentes, formées de matières semblables ou diverses. Mais ses formules, d'une rare élégance, ne sont d'une application facile, ou même praticable, que lorsqu'on y suppose les épaisseurs des lentilles absolument négligeables. Quoique cette restriction les écarte encore des réalités, je les rapporterai cependant ici pour les cas d'une lentille unique, et de deux lentilles en contact central, parce que les résultats qu'on en tire fournissent au moins des indications générales dont il convient de ne pas beaucoup s'écarter dans l'exécution. Car, lorsque les épaisseurs réelles des lentilles sont maintenues très-petites comparativement à leurs rayons de courbure et aux ouvertures de leurs surfaces, comme on le fait toujours dans la construction des objectifs, elles ne peuvent avoir sur leurs effets absolus qu'une influence proportionnellement du même ordre; et lorsqu'on s'écarte davantage de cette condition de petitesse relative, comme dans les lentilles employées pour les oculaires, il faut du moins connaître les formes qui, ainsi employées, donneront les aberrations les plus faibles; et, en outre, savoir pourquoi l'effet de ces aberrations est moins à craindre. On verra tout cela dans les formules que je vais rapporter, et que j'extrais de la *Dioptrique* d'Euler, tome Ier, pages 37 et 40, en y faisant seulement les modifications de lettres et de signes, nécessaires pour les ramener à notre notation. Après avoir expliqué et montré leur usage, je donnerai le moyen d'apprécier le plus ou moins d'exactitude de leurs résultats, dans chaque système optique qu'on en aurait déduit, en y déterminant par un calcul direct et numérique la marche exacte des rayons lumineux, sans négliger aucun de leurs éléments.

69. Je considère d'abord une lentille unique, sans épaisseur, et un point rayonnant placé au devant d'elle, sur son axe central, à une distance Δ de son centre de figure. Ce point est censé n'émettre

que des rayons lumineux d'une réfrangibilité fixe, dont l'indice de réfraction est n_1, quand ils passent de l'air ambiant dans la substance dont la lentille est formée. Soit alors F_1 la distance focale principale de cette lentille, et Δ_1 sa distance focale spéciale pour la distance Δ du point rayonnant, lorsque les rayons lumineux homogènes émanés de ce point la pénètrent infiniment près de son centre de figure, puis ressortent dans l'air qui l'environne. Les formules de notre première approximation, page 454, étant restreintes au cas où l'épaisseur e_1 est nulle, donneront

$$\frac{1}{F_1} = (n_1 - 1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r'_1}\right) = \frac{n_1 - 1}{R_1}, \qquad \frac{1}{\Delta_1} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{\Delta}.$$

Supposons maintenant que la lentille ait un demi-diamètre d'ouverture λ_1, un peu trop grand pour que les rayons incidents qui la pénètrent par ses bords puissent être admis dans l'approximation précédente. Ceux-ci formeront leur foyer sur l'axe central à une distance δ_1 différente de Δ_1; et $\Delta_1 - \delta_1$ exprimera l'aberration de sphéricité propre à ces rayons extrêmes pour la distance donnée Δ du point rayonnant. Or, en exprimant δ_1 par une série, ordonnée suivant les puissances ascendantes de $\frac{\lambda_1}{F_1}$, le premier terme de ce développement est nécessairement Δ_1 même, et le terme suivant se trouve être proportionnel à $\frac{\lambda_1^2}{F_1}$. Alors si l'on prend λ_1 assez restreint pour que l'évaluation de δ_1 puisse être bornée à ces deux premiers termes, on a, dans ces nouvelles limites d'approximation (*Dioptrique*, page 37),

$$\delta_1 = \Delta_1 - \frac{n_1(4n_1 - 1)}{8(n_1 - 1)^2(n + 2)}\left[\alpha_1 \frac{\Delta_1^2}{F_1^2} - \frac{4(n_1 - 1)^2}{(4n_1 - 1)}\frac{\Delta_1}{\Delta}\right]\frac{\lambda_1^2}{F_1},$$

ou en faisant, pour abréger,

$$\alpha_1 = \frac{n_1(4n_1 - 1)}{8(n_1 - 1)^2(n_1 + 2)}, \qquad \beta_1 = \frac{4(n_1 - 1)^2}{4n_1 - 1},$$

$$\delta_1 = \Delta_1 - \alpha_1\left(\alpha_1 \frac{\Delta_1^2}{F_1^2} - \beta_1 \frac{\Delta_1}{\Delta}\right)\frac{\lambda_1^2}{F_1};$$

ω_1 est un nombre arbitraire, mais essentiellement positif, qui ne peut jamais être inférieur à $+1$. Sa valeur, dans chaque cas, dépend de la constitution de la lentille, ainsi que de la distance Δ, et s'y trouve liée par des formules très-élégantes, où je fais, pour abréger,

$$\frac{4+n_1-2n_1^2}{1(n_1-1)(n_1+2)},\quad B_1=\frac{n_1(2n_1+1)}{2(n_1-1)(n_1+2)},\quad C_1=\frac{n_1\sqrt{4n_1-1}}{2(n_1-1)(n_1+2)}.$$

Ces formules sont

$$\frac{1}{r_1}=-\frac{A_1}{\Delta}+\frac{B_1}{\Delta_1}\pm\frac{C_1\sqrt{\omega_1-1}}{F_1},$$

$$\frac{1}{r'_1}=-\frac{A_1}{\Delta_1}+\frac{B_1}{\Delta}\pm\frac{C_1\sqrt{\omega_1-1}}{F_1}.$$

On voit maintenant pourquoi ω_1 ne doit pas être négatif ou inférieur à $+1$; car ces suppositions rendraient les rayons de courbure r_1 et r'_1 imaginaires. En les excluant, les dernières formules, considérées en elles-mêmes, présentent seulement des expressions générales, et toujours admissibles, des rayons de courbure r_1, r'_1. Car en les remplachant l'une de l'autre, ce qui fait disparaître le terme radical, elles retombe exactement sur l'équation fondamentale, entre Δ, F_1, Δ_1, où ces rayons n'entrent qu'associés. Mais l'introduction de l'indéterminée ω_1 dans leurs expressions individuelles, a l'avantage de manifester ostensiblement leur influence sur l'aberration de sphéricité actuelle. Si l'on suppose d'abord ω_1 égal à 1, puis plus grand que 1, tous les autres éléments de δ_1 restant constants, on voit que l'amplitude de l'aberration de sphericité s'accroît, dans ce second cas, abstraction faite de son signe propre; de sorte que la plus petite valeur de cette amplitude s'obtient quand $\omega_1=1$. Tous ces résultats et toutes ces formules sont d'Euler. Je n'ai fait que les adapter ici à notre notation (*).

(*) Voici la correspondance de notre notation actuelle avec celle d'Euler:

	Notation d'Euler.	Notation actuelle.
Distance du point rayonnant, au devant du centre de courbure de la surface d'incidence.....	$+a$	$+\Delta$
Demi-diamètre d'incidence des rayons lumineux qui en		

70. Si l'on suppose que la surface postérieure de la lentille est plane, r'_1 devient infini ; et, en déduisant ω_1 de cette condition même, on a

$$\omega_1 = 1 + \left(\frac{A_1}{\Delta_1} - \frac{B_1}{\Delta}\right)^2 \frac{F_1^2}{C_1^2},$$

ou, en remplaçant $\frac{1}{\Delta_1}$ par son expression équivalente, tirée de l'équation fondamentale en Δ et F_1,

$$\omega_1 = 1 + \frac{A_1^2}{C_1^2}\left[1 + \frac{(A_1 - B_1)}{A_1}\frac{F_1}{\Delta}\right]^2.$$

Dans les matières vitreuses, généralement employées à la confection

	Notation d'Euler.	Notation actuelle.
émanent	$+x$	$+\lambda_1$
Distance focale *actuelle* des rayons réfractés, sous cette incidence autour de l'axe central ; cette distance étant considérée comme postérieure à la lentille	$+\alpha$	$-A_1$
Distance focale principale de cette lentille pour les incidences infiniment petites et pour l'espèce de rayons lumineux considérés ; cette distance lui étant supposée postérieure	$\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}$	$-\frac{1}{F_1}$
Rayon de courbure de la surface antérieure considérée comme convexe vers le point rayonnant	$+f$	$-r_1$
Rayon de courbure de la surface postérieure, considérée comme concave vers ce même point	$+g$	$+r'_1$.

Les inversions de signe que présentent ces divers éléments dans les deux notations, résultent de ce qu'Euler prend pour type de ses raisonnements les lentilles biconvexes, *actuellement* convergentes ; et nous, les lentilles biconcaves, *actuellement* divergentes. J'ai dû aussi substituer d'autres lettres à celles qu'il emploie pour désigner les coefficients qui sont fonctions de l'indice de réfraction, soit afin de rendre leurs analogies plus manifestes, soit parce que j'avais déjà fait servir les mêmes lettres à d'autres usages. Mais la correspondance de ces élements auxiliaires se reconnaîtra aisément par leur place dans les formules, et par l'identité des quantités qu'ils désignent. On verra bien ainsi, par exemple, que l'indéterminée appelée λ par Euler est celle que j'ai nommée ω_1 ; et les autres termes de ses formules ne seront pas plus difficiles à identifier.

s lentilles, la valeur de n_1 diffère toujours très-peu de 1,55, ur les rayons lumineux de moyenne réfrangibilité. En adoptant tte valeur, on a

$$A_1 = 0,1908; \quad B_1 = 1,6274; \quad C_1 = 0,9051;$$

là on tire

$$\frac{A_1^2}{C_1^2} = +0,0444; \quad \frac{A_1 - B_1}{A_1} = -7,52935.$$

l est évident, d'après ces nombres, que si la distance Δ du point onnant au devant de la lentille, surpasse seulement sept ou t fois la distance focale principale F_1, abstraction faite du signe cette dernière, la quantité qui s'ajoute ici à l'unité pour com- er ω_1 sera très-petite, à cause de la faiblesse du facteur $\frac{A_1^2}{C_1^2}$ qui fecte. Ainsi une lentille à face postérieure plane, employée dans elles circonstances, produira une aberration de sphéricité qui passera seulement de très-peu le minimum possible pour la dis- ce focale principale F_1, et la distance Δ, assignée au point onnant. Il est aisé de s'assurer, par un calcul exactement pa- , qu'on aurait une valeur de ω_1 beaucoup plus grande, consé- mment une aberration bien plus forte avec les mêmes éléments et Δ, si l'on voulait supposer que c'est la face située vers le point onnant qui est plane. Je consigne ici ces deux remarques, parce l'on a coutume de les employer pour décider l'espèce et le sens lentilles qui conviennent le mieux à la confection des diverses es d'oculaires. Mais, à mon avis, on fait, en cela, une appli- on peu exacte de leur signification véritable. Car les pinceaux parviennent aux lentilles oculaires, ayant toujours leur am- ude de radiation préalablement restreinte par l'action du sys- e objectif, chacun d'eux ne couvre jamais qu'une très-petite tion de ces lentilles, au lieu de s'étendre depuis leur centre figure jusqu'à leur bord, comme le supposent les formules ular.

71. Concevons maintenant une seconde lentille, pareillement s épaisseur, placée à la suite de la première, et séparée d'elle

par l'intervalle central h_1. Soit F_2 sa distance focale principale relativement à l'espèce de rayons homogènes dont on suit la marche. Pour celle-ci, en ne considérant que les rayons incidents très-voisins de l'axe central, Δ deviendra $\Delta_1 + h_1$; et en désignant par Δ_2 leur distance focale spéciale après qu'ils ont subi l'action de la lentille, avec l'indice de réfraction n_2, on aura, dans notre notation,

$$\frac{1}{F_2} = (n_2 - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r'_2}\right) = \frac{n_2 - 1}{R_2}, \quad \frac{1}{\Delta_2} = \frac{1}{F_2} + \frac{1}{\Delta_1 + h_1}.$$

Quant aux rayons les plus écartés de l'axe, ils partiront, réellement ou virtuellement, de leur foyer propre, situé à la distance $+\delta_1$ en avant de la première lentille; et, comme on la suppose sans épaisseur, puisqu'ils la perçaient à la distance λ_1 de l'axe central, ils perceront la seconde à une autre distance du même axe qui sera $\lambda_1 \frac{(\delta_1 + h_1)}{\delta_1}$; après quoi ils iront former leur foyer propre à une certaine distance $+\delta_2$, en avant de son centre de figure. Or si, du point d'où ils partent, il émanait des rayons très-voisins de l'axe central, leur distance focale spéciale, que je désigne par $(\Delta)_2$, serait donnée par l'équation

$$\frac{1}{(\Delta)_2} = \frac{1}{F_2} + \frac{1}{\delta_1 + h_1}.$$

On a donc tous les éléments nécessaires pour leur appliquer la formule de l'aberration produite par une seule lentille. Ainsi, en marquant d'un indice de plus les diverses constantes propres à celle que nous considérons, la valeur de δ_2 résultera de ces nouveaux éléments, comme la valeur de δ_1, page 90, résultait des premiers, c'est-à-dire qu'on aura évidemment

$$\delta_2 = (\Delta)_2 - \alpha_2\left[\frac{\omega_2(\Delta)_2^2}{F_2^2} - \frac{\beta_2(\Delta)_2}{(\delta_1 + h_1)}\right]\frac{\lambda_1^2(\delta_1 + h_1)^2}{\delta_1^2 F_2}.$$

Mais la quantité qui s'ajoute ici à $(\Delta)_2$ peut être simplifiée. Car étant elle-même de l'ordre de l'aberration, que l'on suppose assez petite, pour qu'on puisse négliger ses carrés et ses produits, on doit, pour rester dans ce système de calcul, y remplacer $(\Delta)_2$ par Δ_2 et δ_1

par Δ_1; ces quantités ne différant entre elles que par cette même aberration. Il viendra donc ainsi

$$\delta_2 = (\Delta)_2 - \alpha_2\left(\frac{\omega_2\Delta_2^2}{F_2^2} - \frac{\beta_2\Delta_2}{\Delta_1 + h_1}\right)\frac{\lambda_1^2(\Delta_1 + h_1)^2}{\Delta_1^2 F_2^2}.$$

Reste donc à évaluer $(\Delta)_2$ entre des limites pareilles. Or rien n'est plus facile. Car si, de l'équation qui le donne on retranche celle qui donne Δ_2, le terme commun $\frac{1}{F_2}$ disparaît, et l'on a

$$\frac{1}{(\Delta)_2} - \frac{1}{\Delta_2} = \frac{(\Delta_1 - \delta_1)}{(\delta_1 + h_1)(\Delta_1 + h_1)}.$$

$\Delta_1 - \delta_1$ est précisément l'aberration produite par la première lentille pour la distance Δ. Ainsi déjà l'on voit que $(\Delta)_2$ et Δ_2 diffèrent seulement par des quantités de cet ordre. En effet, tirant la valeur de $(\Delta)_2$ en Δ_2, on trouve

$$(\Delta)_2 = \Delta_2 - \frac{(\Delta_1 - \delta_1)\Delta_2^2}{(\delta_1 + h_1)(\Delta_1 + h_1) + (\Delta_1 - \delta_1)\Delta_2}.$$

Alors, pour rester dans les limites de la nouvelle approximation, il faut faire δ_1 égal à Δ_1 dans le dénominateur du terme qui s'ajoute ici à Δ_2, ce qui donnera

$$(\Delta)_2 = \Delta_2 - \frac{(\Delta_1 - \delta_1)\Delta_2^2}{(\Delta_1 + h_1)^2}.$$

Il n'y a donc plus qu'à remplacer $\Delta_1 - \delta_1$ par sa valeur déjà obtenue pour la première lentille; et en substituant le tout dans δ_2, on aura finalement

$$= \lambda_1 - \lambda_1^2\left[\frac{\alpha_1}{F_1}\left(\omega_1\frac{\Delta_1^2}{F_1^2} - \beta_1\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)\frac{\Delta_2^2}{(\Delta_1 + h_1)^2} + \frac{\alpha_2}{F_2}\left(\omega_2\frac{\Delta_2^2}{F_2^2} - \frac{\beta_2\Delta_2}{(\Delta_1 + h_1)}\right)\frac{(\Delta_1 + h_1)^2}{\Delta_1^2}\right].$$

C'est le résultat d'Euler, *Dioptrique*, tome Ier, page 57 : le terme ajouté à Δ_2 exprime l'aberration de sphéricité du système total, dans les circonstances assignées.

Il faut toujours y associer les expressions des quatre rayons de courbure, mises sous la même forme que pour la première len-

tille, lesquelles seront

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{A_1}{\Delta} + \frac{B_1}{\Delta_1} \pm \frac{C_1\sqrt{\omega_1 - 1}}{F_1},$$

$$\frac{1}{r'_1} = -\frac{A_1}{\Delta_1} + \frac{B_1}{\Delta} \pm \frac{C_1\sqrt{\omega_1 - 1}}{F_1},$$

$$\frac{1}{r_2} = -\frac{A_2}{\Delta_1 + h_1} + \frac{B_2}{\Delta_2} \pm \frac{C_2\sqrt{\omega_2 - 1}}{F_2},$$

$$\frac{1}{r'_2} = -\frac{A_2}{\Delta_2} + \frac{B_2}{\Delta_1 + h_1} \pm \frac{C_2\sqrt{\omega_2 - 1}}{F_2},$$

les trois coefficients A_2, B_2, C_2, étant composés en n_2, comme leurs analogues pour la première lentille le sont en n_1, page 91.

72. Lorsque l'on suppose les lentilles en contact, h_1 est nul; et ces formules se simplifient. On a alors

$$\delta_2 = \Delta_2 - \lambda_1^2 \left[\frac{\alpha_1}{F_1}\left(\omega_1 \frac{\Delta_1^2}{F_1^2} - \beta_1 \frac{\Delta_1}{\Delta}\right)\frac{\Delta_2^2}{\Delta_1^2} + \frac{\alpha_2}{F_2}\left(\omega_2 \frac{\Delta_2^2}{F_2^2} - \frac{\beta_2 \Delta_2}{\Delta_1}\right)\right],$$

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{A_1}{\Delta} + \frac{B_1}{\Delta_1} \pm \frac{C_1\sqrt{\omega_1 - 1}}{F_1},$$

$$\frac{1}{r'_1} = -\frac{A_1}{\Delta_1} + \frac{B_1}{\Delta} \pm \frac{C_1\sqrt{\omega_1 - 1}}{F_1},$$

$$\frac{1}{r_2} = -\frac{A_2}{\Delta_1} + \frac{B_2}{\Delta_2} \pm \frac{C_2\sqrt{\omega_2 - 1}}{F_2},$$

$$\frac{1}{r'_2} = -\frac{A_2}{\Delta_2} + \frac{B_2}{\Delta_1} \pm \frac{C_2\sqrt{\omega_2 - 1}}{F_2}.$$

Conservons cette disposition du contact, mais éloignons le point rayonnant à une distance infinie au devant de la première lentille, en le maintenant toujours sur l'axe central; nous aurons réuni les circonstances pour lesquelles les objectifs des lunettes astronomiques doivent être spécialement préparés. Cela simplifiera encore nos formules; car Δ étant infini, les termes divisés par Δ disparaissent; Δ_1 devient F_1, et Δ_2 devient la distance focale principale du système total que je désignerai par F. On aura donc

pour ce cas

$$\delta_2 = F - \lambda_1^2 F \left[\alpha_1 \omega_1 \frac{F}{F_1^3} + \alpha_2 \left(\frac{\omega_2 F}{F_2^3} - \frac{\beta_2}{F_1 F_2} \right) \right],$$

$$\frac{1}{r_1} = + \frac{B_1}{F_1} \pm \frac{C_1 \sqrt{\omega_1 - 1}}{F_1},$$

$$\frac{1}{r'_1} = - \frac{A_1}{F_1} \pm \frac{C_1 \sqrt{\omega_1 - 1}}{F_1},$$

$$\frac{1}{r_2} = - \frac{A_2}{F_1} + \frac{B_2}{F} \pm \frac{C_2 \sqrt{\omega_2 - 1}}{F_2},$$

$$\frac{1}{r'_2} = - \frac{A_2}{F} + \frac{B_2}{F_1} \pm \frac{C_2 \sqrt{\omega_2 - 1}}{F_2};$$

à quoi il faut joindre l'équation de continuité, propre à un tel système, dont les lentilles sont supposées en contact et sans épaisseurs centrales, laquelle est

$$\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{F}.$$

Au reste, cette équation résulterait des expressions mêmes données ici aux rayons des surfaces, comme il est facile de s'en assurer. Car en retranchant la quatrième de la troisième, et multipliant la différence par $n_2 - 1$, on en tire

$$(n_2 - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r'_2}\right) = (n_2 - 1)(A_2 + B_2)\left(\frac{1}{F} - \frac{1}{F_1}\right).$$

Le premier membre est précisément $\frac{n_2 - 1}{R_2}$ ou $\frac{1}{F_2}$, § 71, page 94; et le coefficient numérique du second membre se trouve égal à 1. Ainsi, en passant $\frac{1}{F_1}$ dans le premier membre, on retrouve l'équation de continuité, propre aux circonstances données du système qui vient d'être tout à l'heure indiqué.

73. Si l'on veut que l'aberration de sphéricité soit nulle dans ces circonstances, il faudra égaler à zéro ce qui s'ajoute à F dans l'expression de δ_2. Cela établira entre ω_2 et ω_1, la relation nécessaire pour que les distances focales du centre et des bords de l'objectif

coïncident, dans les limites de l'approximation employée. Tirant donc ω_2 de cette condition, il viendra

$$\omega_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{F_2^3}{F_1^3}\omega_1 + \frac{\beta_2 F_2^2}{F F_1},$$

ou, en restituant pour α_1, α_2, β_2, leurs valeurs explicites en n_1, n_2,

$$\omega_2 = -\alpha_1 \frac{n_1(4n_1-1)(n_2-1)^2(n_2+2)}{n_2(4n_2-1)(n_1-1)^2(n_1+2)}\frac{F_2^3}{F_1^3} + \frac{4(n_2-1)^2}{4n_2-1}\frac{F_2^2}{F F_1}.$$

Jusqu'ici F_1 et F_2 sont seulement astreintes à l'équation de continuité nécessaire pour que la distance focale principale du système total qui en résulte soit égal à F. Mais, dans nos objectifs astronomiques, la condition de l'achromatisme établit entre ces quantités une seconde relation dépendante du rapport de dispersion que nous avons nommé μ; et en combinant celle-ci avec la première, les épaisseurs centrales des lentilles étant supposées insensibles, comme nous l'avons fait pages 74 et 75, il en résulte,

$$F_1 = \frac{(\mu-1)}{\mu}F, \qquad F_2 = -(\mu-1)F.$$

Ce sont donc là les expressions qu'il faut introduire dans la relation précédente de ω_2 à ω_1, pour qu'elle s'adapte à de tels objectifs; et, en le faisant, on a

$$\omega_2 = +\omega_1 \frac{n_1(4n_1-1)(n_2-1)^2(n_2+2)\mu^3}{n_2(4n_2-1)(n_1-1)^2(n_1+2)} + \frac{4(n_2-1)^2(\mu-1)\mu}{4n_2-1}.$$

74. Cette équation liant ω_1 à ω_2, et la condition d'achromatisme déterminant F_1 ainsi que F_2 en F, on voit que si l'on se donne F qui est la distance focale totale du système, une des deux quantités ω_1, ω_2, demeure encore indéterminée, et pourra être prise arbitrairement, sous la seule réserve d'être positive et plus grande que 1. D'où il semblerait résulter que, pour chaque distance focale donnée F, il peut théoriquement exister un nombre infini d'objectifs doubles, qui seraient, à la fois, achromatiques et exempts d'aberration de sphéricité; du moins lorsque leur demi-

diamètre d'ouverture λ_1 sera assez restreint pour que l'expression de cette aberration puisse être bornée à son premier terme, comme nous l'avons fait.

Mais cette liberté indéfinie de choix, que l'expérience dément, tient évidemment aux imperfections de la méthode, qui ne prend pas en considération les faisceaux obliques à l'axe central, et qui, même pour celui qui est parallèle à cet axe, ne tient aucun compte des épaisseurs des deux lentilles. Or ici, comme pour l'achromatisme, on conçoit qu'il peut exister certaines combinaisons de forme où les épaisseurs aient une moindre influence qu'avec d'autres, et qu'il convient par cette raison de préférer, surtout si elles se rapprochent de celles qui ont cet avantage pour l'achromatisme. Il faut donc tâcher de les découvrir.

75. Dans ce dessein, je considère spécialement les rayons de courbure intérieurs r'_1, r_2. J'introduis dans leurs expressions celles de F_1 et de F_2 en F, qui résultent de la condition d'achromatisme; puis, tirant de la première ω_1, de la seconde ω_2, je trouve

$$\omega_1 = 1 + \left[\frac{A_1}{C_1} + \frac{(\mu - 1)}{\mu C_1}\frac{F}{r'_1}\right]^2,$$

$$\omega_2 = 1 + \left[\frac{A_2}{C_2}\mu - \frac{B_2(\mu - 1)}{C_2} + \frac{(\mu - 1)}{C_2}\frac{F}{r_2}\right]^2.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation entre ω_1 et ω_2 qui est linéaire, il en résultera une relation entre $\frac{F}{r'_1}$ et $\frac{F}{r_2}$, où ces quantités n'entreront qu'à la première et à la seconde puissance, sans se mêler l'une avec l'autre. De sorte que si l'on se donne arbitrairement l'une d'elles, l'autre s'en conclura aussitôt par la résolution d'une équation du second degré.

Je suppose cette substitution opérée, et la relation entre les deux inconnues $\frac{F}{r'_1}$, $\frac{F}{r_2}$, établie en nombres. Cela est facile, puisque toutes les quantités qui accompagnent ces deux inconnues sont numériquement calculables d'après les indices de réfraction des deux lentilles pour les rayons de réfrangibilité moyenne, et le coefficient de

dispersion μ. Je commence alors par faire $r'_1 = r_2$, et je cherche les deux valeurs de $\frac{F}{r'_1}$ qui satisfont à cette égalité. Elles seront ou ne seront pas réelles. Si elles le sont, leurs valeurs ainsi connues donneront aussitôt ω_1 et ω_2, qui se trouveront toutes deux positives et plus grandes que 1, comme elles doivent l'être. De sorte qu'on en pourra conclure les rayons de courbure extérieurs r_1, r'_2, d'après leurs expressions en ω_1 et ω_2. Ou bien encore, on pourra obtenir immédiatement ces rayons par les formules établies page 75,

$$\frac{F}{r_1} = \frac{F}{r'_1} + \frac{\mu}{(\mu-1)(n_1-1)}; \qquad \frac{F}{r'_2} = \frac{F}{r_2} + \frac{1}{(\mu-1)(n_2-1)}.$$

Si ce calcul donnait des combinaisons de surfaces évidemment réprouvées par l'expérience, il faudrait les rejeter immédiatement. Par exemple, il faudrait rejeter ainsi toute valeur de $\frac{F}{r'_1}$, qui serait positive. Car F devant être négatif, pour que l'objectif composé soit convergent, si $\frac{F}{r'_1}$ était positif, il s'ensuivrait r'_1 négatif, c'est-à-dire la seconde surface du crown intérieurement concave; disposition contraire à toute pratique, et inverse aussi de celles qui peuvent donner un achromatisme stable, comme nous l'avons reconnu.

76. Ces premières déterminations obtenues, je suppose r'_1 non plus égal à r_2, mais tant soit peu moindre, et toujours de même signe; ces deux conditions étant nécessaires pour que les deux lentilles puissent être placées en contact central, avec la seconde surface du crown convexe vers le flint. Je fais ainsi, par exemple,

$$\frac{F}{r'_1} = \frac{F}{r_2}(1+u),$$

u étant une très-petite quantité positive que je suppose successivement égale à 0,01; 0,02; 0,03, etc., ou à toute autre fraction plus petite encore. Je résous de nouveau l'équation en $\frac{F}{r'_1}$ ou $\frac{F}{r_2}$ pour ces cas divers, en ne m'arrêtant qu'aux racines

qui donnent à ces rapports des valeurs négatives; et, achevant le calcul des rayons de courbure extérieurs r_1, r'_2, j'obtiens ainsi autant de combinaisons de surfaces, ayant leur crown biconvexe, leur aberration de sphéricité nulle ou très-faible pour un faisceau incident parallèle à leur axe, et pouvant être mises en contact central. Je distingue alors, dans leur succession, celles qui se rapprochent des formes que nous avons reconnues les plus propres à assurer l'achromatisme pour toute valeur quelconque des épaisseurs e_1, e_2. Puis, supposant ces combinaisons favorables obtenues avec une suffisante espérance d'approximation, je substitue les rayons de courbure qui en résultent, dans l'expression générale de δF trouvée plus haut, page 62, en y supposant nul l'intervalle h_1 ainsi que δP_2. Alors, parmi les épaisseurs e_1, e_2, que les plaques de verre employées peuvent admettre, je choisis celles qui, rendant δF nul, assurent l'achromatisme longitudinal. Enfin, introduisant tous ces éléments réunis, dans l'expression générale de δP_2, page 71, j'en déduis le vrai coefficient de la dispersion μ', qui doit lier les valeurs de R_1 et de R_2 de manière à anéantir δP_2, en sorte qu'on ait définitivement

$$\frac{(n_1 - 1)}{R_1} + \frac{(n_2 - 1)\mu'}{R_2} = 0.$$

Cette nouvelle valeur μ' différera extrêmement peu de μ, parce que les rayons de courbure qui entrent ici dans la composition de R_1 et de R_2, sont déjà choisis de manière à rendre très-petits, et presque insensibles, les termes dépendants des épaisseurs qui accompagnent μ dans l'expression de δP_2. Néanmoins il conviendra de l'employer conjointement avec les expressions de F_1 et de F_2 en μ', pour calculer de nouveau les valeurs plus exactes des rayons de courbure propres à détruire l'aberration de sphéricité.

On commencera donc par établir, avec cette nouvelle valeur μ', l'équation de condition en ω_1 et ω_2; puis on en chassera ces deux quantités par leurs expressions en $\frac{F}{r'_1}$ et $\frac{F}{r_2}$ évaluées de la même manière; alors on se donnera le rapport $1 + u$ de ces dernières inconnues, tel qu'on l'avait adopté d'après la précédente approxi-

mation; et, de l'équation ainsi particularisée on tirera leurs nouvelles valeurs, desquelles on déduira les rayons extérieurs par les formules de la page 100: la marche du calcul sera exactement la même que dans les premières évaluations, sauf que μ sera changé en μ'.

77. Ces nouveaux rayons de courbure se trouvant ainsi, en général, tant soit peu différents des premiers, ne satisferont plus, il est vrai, en toute rigueur à l'équation qui avait déterminé μ' et anéanti δP_2. Mais cette équation en sera très-peu troublée, parce que la condition même d'après laquelle ils avaient été choisis d'abord rend presque insensibles les termes de δP_2 où ils entrent explicitement hors des symboles R_1, R_2, ici conservés.

Supposons d'abord que l'on veuille s'en tenir aux valeurs ainsi obtenues des quatre rayons de courbure qui anéantissent complétement l'aberration de sphéricité pour l'objectif complexe, dans les limites de l'approximation qu'atteignent les formules d'Euler. On les substituera dans δP_2 pour connaître la petite valeur que cet élément en peut recevoir; puis on introduira ce résultat dans l'expression générale de δF, comme nous l'avons fait page 81, § 63, pour éprouver l'objectif de Fraunhoffer, en y laissant inconnues les épaisseurs e_1, e_2, que l'on déterminera alors de manière à rendre δF exactement nul. Cela rendra l'achromatisme longitudinal exact, avec une aberration de sphéricité nulle. Mais il pourra rester quelque petite erreur sur l'achromatisme latéral, comme dans l'objectif de Fraunhoffer, parce que δP_2 ne sera pas tout à fait anéanti; et il faudra y remédier en restreignant le champ apparent jusqu'à ce que les effets de cette petite valeur de δP_2 se trouvent par l'observation suffisamment faibles.

Toutefois, si l'on jugeait convenable d'atténuer davantage la valeur laissée ainsi à δP_2, on y parviendrait en procédant à une nouvelle détermination du coefficient μ', à laquelle on emploierait les nouveaux rayons de courbure avec les mêmes épaisseurs e_1, e_2, précédemment adoptées. Alors, si la valeur de μ' qui anéantit δP_2 devenait μ'', on recommencerait tout le calcul en la substituant à μ', et l'on adopterait comme définitifs les quatre rayons de courbure qui en résulteraient. Mais on peut douter que cette seconde

approximation soit utile, tant qu'on néglige les épaisseurs centrales dans l'équation qui anéantit l'aberration de sphéricité.

La méthode précédente me paraît avoir l'avantage spécial de ne pas faire reposer la destruction des aberrations sur l'emploi aveugle d'un calcul purement analytique, mais d'y procéder, pour chaque nature donnée des verres que l'on combine, en se guidant sur des considérations physiques d'un effet certain, dont l'expérience a déjà confirmé les bons résultats. Je ne crois donc pas trop présumer en exprimant ici l'espérance qu'en suivant cette voie, pour la construction des grands objectifs à deux lentilles, on arrivera directement aux combinaisons favorables que l'on n'obtient aujourd'hui qu'à force d'essais, ou même à de plus parfaites encore.

78. Pour donner un exemple complet de ce genre de calcul, je vais l'appliquer dans tous ses détails aux données numériques rapportées page 76, lesquelles ont servi d'éléments au double objectif de Fraunhoffer que nous avons analysé, et dont nous avons aussi fait usage pour déterminer les formes les plus propres à la stabilité de l'achromatisme latéral; on aura donc pour ce cas

$$\begin{aligned} n_1 &= 1{,}530000, & \log n_1 &= 0{,}1846914, \\ n_2 &= 1{,}634494, & \log n_2 &= 0{,}2133834, \\ \mu &= 1{,}650853, & \log \mu &= 0{,}2177085. \end{aligned}$$

Je calcule d'abord les coefficients A, B, C de la page 91, ainsi que leurs analogues en n_2 relatifs au flint, et je trouve pour leurs logarithmes tabulaires les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \log A_1 &= \bar{1}{,}3554177, & \log A_2 &= \bar{2}{,}8005164, \\ \log B_1 &= 0{,}2201368, & \log B_2 &= 0{,}1798070, \\ \log C_1 &= \bar{1}{,}9662458, & \log C_2 &= \bar{1}{,}9211573. \end{aligned}$$

Je prends maintenant les expressions de ω_1 et de ω_2, obtenues page 99, en fonction des rayons de courbure intérieurs, et je les mets, pour abréger, sous cette forme

$$\omega_1 = 1 + \left(a_1 + b_1 \frac{F}{r_1}\right)^2, \qquad \omega_2 = 1 + \left(a_2 + b_2 \frac{F}{r_2}\right)^2,$$

et, en y substituant les éléments numériques qui les composent, je trouve

$$a_1 = +\ 0{,}2450033, \qquad \log a_1 = \bar{1}{,}3891719,$$
$$b_1 = +\ 0{,}4261168, \qquad \log b_1 = \bar{1}{,}6295286,$$
$$a_2 = -\ 1{,}0556357, \qquad \log a_2 = 0{,}0235141\ -,$$
$$b_2 = +\ 0{,}7804150, \qquad \log b_2 = \bar{1}{,}8923256.$$

Ces expressions de ω_1 et de ω_2 doivent être introduites dans l'équation de condition obtenue page 98, à la fin du § 73, laquelle exprime la destruction de l'aberration de sphéricité, conjointement avec la conservation de l'achromatisme; pour en abréger l'emploi, je la mets sous cette forme

$$\omega_2 = A\omega_1 + B,$$

et, en effectuant le calcul numérique des coefficients A et B, je trouve

$$A = +\ 5{,}745463, \qquad \log A = 0{,}7593251,$$
$$B = +\ 0{,}312432, \qquad \log B = \bar{1}{,}4947555;$$

j'en chasse alors ω_1 et ω_2 par leurs expressions précédentes; puis, développant les carrés qu'elles renferment et rassemblant les termes analogues, il vient

$$0 = A + B + Aa_1^2 - a_2^2 - 1 + 2Aa_1b_1\left(\frac{F}{r'_1}\right) + Ab_1^2\left(\frac{F}{r'_1}\right)^2$$
$$- 2a_2b_2\left(\frac{F}{r_2}\right) - b_2^2\left(\frac{F}{r_2}\right)^2.$$

Le terme indépendant des rayons de courbure peut se réduire en nombres; je le représente par C, et, en l'effectuant, j'ai

$$C = +\ 4{,}2884090, \qquad \log C = 0{,}6322962;$$

alors, conformément à la marche tracée page 100, je fais

$$\frac{F}{r'_1} = (1 + u)\frac{F}{r_2},$$

u étant une nouvelle indéterminée; et, substituant ceci dans notre

équation, elle devient

$$0 = C + 2[Aa_2b_1(1+u) - a_2b_2]\left(\frac{F}{r_2}\right) + [Ab_1^2(1+u)^2 - b_2^2]\left(\frac{F}{r_2}\right)^2.$$

Quand on aura choisi u arbitrairement, l'équation fera connaître les deux valeurs de $\left(\frac{F}{r_2}\right)$ qui détruisent, pour ce cas, l'aberration de sphéricité; ensuite chacune de ces racines fournira une valeur correspondante de $\frac{F}{r'_2}$, au moyen de son expression en u. Alors on obtiendra les deux autres rayons de courbure par leurs expressions établies page 100, § 75, lesquelles, en réduisant leur terme constant en nombres, deviennent ici

$$\frac{F}{r_1} = \frac{F}{r'_1} + 4,785747, \qquad \frac{F}{r'_2} = \frac{F}{r_2} + 2,421528.$$

79. Conformément à la marche que nous nous sommes prescrite, je fais d'abord $u = 0$, ce qui rend égaux les deux rayons de courbure intérieurs, et met la seconde surface du crown en contact complet avec la première surface du flint. Pour ce cas l'équation devient

$$0 = C + 2(Aa_1b_1 - a_2b_2)\left(\frac{F}{r_2}\right) + (Ab_1^2 - b_2^2)\left(\frac{F}{r_2}\right)^2,$$

où l'on a

$$Aa_1b_1 - a_2b_2 = +1,4236604, \qquad Ab_1^2 - b_2^2 = +0,4341817;$$

C conserve toujours la valeur assignée plus haut. En résolvant l'équation, on trouve pour ses deux racines

$$\frac{F}{r_2} = -2,343830, \quad \text{ou bien :} \quad \frac{F}{r_2} = -4,213980;$$

d'où l'on tire inversement

$$r_2 = -0,426652\,F, \quad \text{ou bien :} \quad r_2 = -0,237305\,F;$$

achevant alors le calcul des autres rayons pour chacune de ces leurs, j'obtiens le tableau suivant :

1re RACINE.	2e RACINE.
$r_1 = +\ 0{,}409514\ F$ $r'_1 = -\ 0{,}426652\ F$ $r_2 = -\ 0{,}426652\ F$ $r'_2 = +\ 12{,}87035\ F$	$r_1 = +\ 1{,}784964\ F$ $r'_1 = -\ 0{,}237305\ F$ $r_2 = -\ 0{,}237305\ F$ $r'_2 = -\ 0{,}557895\ F$
Crown biconvexe, flint biconcave ; face postérieure presque plane.	Crown biconvexe, flint concave-convexe, *fig.* 7.

En comparant ces deux systèmes de rayons à ceux qui ont déterminés, page 76, par la seule considération de l'achromatis stable, on voit que tous deux s'en écartent, mais le second mo que le premier; et ce second système, représenté *fig.* 7, est au celui des deux qui se rapproche le plus des courbures adoptées Fraunhoffer, avec lesquelles il coïncide pour le sens des quatre s faces, comme on le voit en le comparant à la *fig.* 6. Si l'on col l'une à l'autre les deux surfaces internes, pour obtenir une p grande transmission de lumière, il ne serait pas impossible qu'u telle combinaison s'appliquât avec avantage aux lunettes portativ appelées *lunettes de nuit,* dont les astronomes se servent p parcourir le ciel par une inspection rapide, afin d'y saisir les mètes nouvelles dans leur première apparition. Cet essai mériter je crois, d'être tenté.

80. Partant de là pour commencer nos essais ultérieurs, il f donner successivement à u les valeurs positives $+\ 0{,}01$, $+\ 0{,}$ $+\ 0{,}03$, etc., qui ont pour effet de séparer les deux rayons in rieurs r'_1, r_2, en rendant le premier r'_1 plus court que l'autre, com nous voulons qu'il le soit. Mais l'amplitude admissible de ces vale de u est ici fort restreinte, parce qu'elles ne tardent pas à don

pour $\frac{F}{r_2}$ des valeurs imaginaires, d'où résultent des objectifs non réalisables. Si l'on cherche directement la limite positive de u, où s'opère ce passage de la réalité à l'impossibilité, on trouve qu'elle arrive lorsque l'on fait

$$u = +0,0224809.$$

En effet, si l'on adopte cette valeur de u et que l'on réduise en nombres les coefficients de l'équation qui donne $\frac{F}{r_2}$, on trouve

$$Aa_1 b_1 (1 + u) - a_2 b_2 = +1,43714503,$$
$$Ab_1^2 (1 + u)^2 - b_2^2 = +0,4816206 71;$$

le troisième coefficient C reste toujours le même que précédemment. Alors, quand on résout l'équation avec ces nombres, le radical s'évanouit et l'on obtient pour valeur unique

$\frac{F}{r_2} = -2,983970$; d'où résulte $\frac{F}{r'_1} = \frac{F}{r_2}(1+u) = -3,0510525$;

et par suite

$$\frac{F}{r_2} = +1,7346945, \qquad \frac{F}{r'_2} = -0,562442.$$

Prenant donc les réciproques de ces rapports, on a définitivement pour les quatre rayons de l'objectif unique les valeurs suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = +0,5764703\,F \\ r'_1 = -0,3277556\,F \end{array}\right\} \text{crown biconvexe ;}$$

$$\left.\begin{array}{l} r_2 = -0,3351232\,F \\ r'_2 = -1,7779610\,F \end{array}\right\} \text{flint concave-convexe, la face concave pouvant être mise en contact avec la face postérieure du crown.}$$

Ce système de courbures est encore analogue dans son ensemble à celui de Fraunhoffer, page 78. Il est représenté *fig.* 8. En le comparant aux nombres trouvés page 76, on voit que les deux derniers rayons r_2, r'_2, qui appartiennent au flint, se rapprochent extrêmement de ceux qui établissent l'achromatisme latéral avec le plus de stabilité. Les deux premiers r_1, r'_1, qui appartiennent au crown, s'éloignent au contraire un peu plus de cette condition.

Pour apprécier l'effet total de cette combinaison, je lui applique le même calcul que nous avons fait pour l'objectif de Fraunhoffer, page 79, c'est-à-dire que je réduis en nombres les termes qui s'ajoutent au coefficient μ dans l'expression de $(n_1 - 1)\frac{\partial P_2}{\partial n_1}$, formée page 71, et je trouve ainsi :

$$(n_1-1)\frac{\partial P_2}{\partial n_1}=\frac{(n_1-1)}{R_1}+\frac{(n_2-1)}{R_2}\left(\mu+0,338968\frac{e_1}{F}-0,0085643\frac{e_2}{F}+6,7237\right.$$

Si l'on appliquait ici les mêmes rapports $\frac{e_1}{F}$, $\frac{e_2}{F}$ dont Fraunhoffer a fait usage, en supposant de même h_1 nul, la quantité qui s'ajoute à μ serait pareillement négative, mais un peu plus forte, ce qui rendrait μ' plus faible et plus différent de μ. On aurait en effet, ainsi

$$\mu' = 0,649395,$$

et ce serait avec ce nouveau rapport de compensation qu'il faudrait recommencer le calcul des rayons de courbure, si l'on voulait anéantir totalement l'aberration latérale de l'achromatisme.

81. Toutes les valeurs de l'indéterminée positive u, qui sont applicables à notre problème, sont ainsi restreintes entre les deux limites $u = 0$ et $u = +0,0224809$, lorsque les coefficients de réfraction et de dispersion sont tels que nous les avons employés. La valeur particulière de $1 + u$, propre à l'objectif de Fraunhoffer, se conclut du rapport $\frac{r_2}{r'_1}$ qui s'y trouve établi entre les rayons de courbure intérieurs, lequel donne u égal à $\frac{r_2 - r'_1}{r'_1}$. En les calculant ainsi d'après les nombres rapportés page 77, on trouve

$$u = +0,0191303, \qquad \log u = \bar{2},2817220,$$

et en réalisant l'équation du second degré avec cette valeur, il vient

$$Aa_1 b_1 (1+u) - a_2 b_2 = +1,4351353,$$
$$Ab_1^2 (1+u)^2 - b_2^2 = +0,4744843;$$

le terme constant C reste toujours le même que précédemment :

l'équation ainsi particularisée donne ces deux racines

$$\frac{F}{r_2} = -2,692522; \quad \text{ou bien:} \quad \frac{F}{r_2} = -3,356720.$$

La première s'écarterait trop des relations qui rendent l'achromatisme stable; la seconde s'en rapproche davantage, et l'on va voir que c'est celle que Fraunhoffer a prise. En effet, si on l'adopte, on en tire d'abord $\frac{F}{r'_1}$ par sa valeur $(1+u)\frac{F}{r_2}$; et, en achevant le calcul des rapports analogues pour les rayons extérieurs, d'après les relations qui les lient aux intérieurs, on obtient leur système complet comme il suit:

$$\frac{F}{r_1} = +1,3647127, \qquad \frac{F}{r_2} = -3,356720,$$
$$\frac{F}{r'_1} = -3,4209343, \qquad \frac{F}{r'_2} = -0,935192;$$

d'où enfin, par inverse, on déduit les quatre rayons de courbure

$$\begin{aligned} r_1 &= +0,732721\,F, \\ r'_1 &= -0,292318\,F, \\ r_2 &= -0,297910\,F, \\ r'_2 &= -1,069300\,F. \end{aligned}$$

Si l'on compare ces valeurs à celles que nous avons obtenues page 78, d'après les mesures prises sur l'objectif même, on les en trouvera si proches que la différence peut dépendre du degré de précision plus ou moins rigoureux que l'on aura apporté dans l'évaluation des logarithmes en effectuant les calculs qui conduisent à ces résultats. D'après cela, on ne peut douter que Fraunhoffer n'ait déterminé ses quatre rayons par cette marche même, c'est-à-dire en les assujettissant à détruire l'aberration de sphéricité, après avoir établi entre les deux intérieurs le rapport particulier qui donne à u la valeur dont nous avons fait usage. Mais pourquoi a-t-il choisi cette valeur spéciale parmi toutes celles qu'il aurait pu adopter, entre les limites $u = 0$ et $u = +0,0224809$? C'est ce que l'on ne saurait dire, et l'on ne peut pas même affirmer qu'il ait connu la

autour de l'axe central, conformément aux règles ordinaires de la géométrie analytique. On aura une notion exacte de ces conventions, en jetant les yeux sur la *fig.* 9, où les dispositions relatives des angles et des lignes sont indiquées pour deux surfaces consécutives. La droite SI_1s représente le rayon incident, brisé en I_1 par la réfraction; et $S_1I_1s_1$ est le rayon réfracté qui en dérive, lequel est brisé à son tour en I_2.

84. La direction primitive du rayon incident SI_1 doit être donnée par son angle Z et son ordonnée d'incidence z_1. Celle-ci détermine ζ_1, et par suite l'abscisse x_1 du point d'incidence. Car il en résulte évidemment :

$$(1) \qquad z_1 = r_1 \cos\zeta_1 ; \qquad x_1 = a_1 + r_1 - 2r_1 \sin^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}\zeta_1);$$

a_1 étant l'abscisse du centre de la surface dont le rayon de courbure est r_1.

Alors l'angle d'incidence sur cette surface est $Z - \zeta_1$, qui est tout entier connu; et $Z_1 - \zeta_1$ est l'angle de réfraction qui en dérive. Nommant donc u, u_1, les vitesses de la lumière dans les milieux antérieurs et postérieurs à la surface, pour l'espèce de réfrangibilité que l'on attribue au rayon lumineux, on aura

$$(2) \qquad u_1 \sin(Z_1 - \zeta_1) = u \sin(Z - \zeta_1).$$

Cette équation fera connaître $Z_1 - \zeta_1$, et par suite l'angle Z_1 formé avec l'axe des z par le rayon lumineux réfracté.

85. Il faut maintenant conduire ce rayon en ligne droite jusqu'à la surface suivante, séparée de la première par l'intervalle central A_1A_2 ou h_1, et déterminer le point d'incidence intérieure I_2, où il la rencontre. On y parvient par un calcul fort simple. Ayant prolongé idéalement le rayon jusqu'en I_2, je mène à ce point la nouvelle normale C_2I_2 partant du nouveau centre de courbure C_2. Alors l'angle d'incidence sur la seconde surface se trouve exprimé par $Z_1 - \zeta_2$, où ζ_2 est inconnu. Pour obtenir sa valeur, je mène des centres C_1, C_2, les perpendiculaires C_1P_1, C_2P_2 sur le rayon lumineux réfracté $S_1I_1I_2$; et je lui mène aussi de C_1 une parallèle qui rencontre C_2P_2 en Q_2. Il est clair que C_2P_2 sera égal à P_2Q_2 ou C_1P_1, plus C_2Q_2. Or cette longueur totale et ses deux parties composantes sont faciles à évaluer. Car d'abord C_2P_2, pris dans le

riangle $C_2 P_2 I_2$, a pour valeur $r_2 \sin(Z_1 - \zeta_2)$, où ζ_2 seul est inconnu. De même $C_1 P_1$ a pour valeur $r_1 \sin(Z_1 - \zeta_1)$. Enfin, l'angle $C_2 C_1 Q_2$ étant $90^\circ - Z_1$, le côté $C_1 Q_2$ est exprimé par $C_1 C_2 \cos Z_1$. Or, si l'intervalle central $A_1 A_2$ des deux surfaces est représenté par h_1, l'intervalle $C_1 C_2$ compris entre leurs centres de courbure est évidemment $r_1 + h_1 - r_2$, ce qui donne $C_2 Q_2$ égal à $(r_1 - r_2 + h_1) \cos Z_1$.

On aura donc

$$(3) \qquad r_2 \sin(Z_1 - \zeta_2) = r_1 \sin(Z_1 - \zeta_1) + (r_1 - r_2 + h_1) \cos Z_1.$$

Cette équation déterminera $Z_1 - \zeta_2$, et par suite ζ_2, puisque Z_1 et ζ_1 sont connus. Ayant ζ_2, on obtiendra les coordonnées du point d'incidence en I_2, qui seront

$$(4) \qquad z_2 = r_2 \cos \zeta_2, \qquad x_2 = a_2 + r_2 - 2r_2 \sin^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}\zeta_2);$$

a_2 étant l'abscisse du centre de courbure de la seconde surface. Alors si le rayon lumineux passe dans le milieu suivant où la vitesse de ses éléments soit u_2, comme l'antérieur est u_1, on aura

$$(5) \qquad u_2 \sin(Z_2 - \zeta_2) = u_1 \sin(Z_1 - \zeta_2).$$

Ceci déterminera donc Z_2, puisque Z_1 et ζ_2 sont connus précédemment. De là on pourra, comme tout à l'heure, conduire le rayon lumineux jusqu'à une troisième surface qui serait située dans ce même milieu, et séparée de la précédente par l'intervalle central h_2. Car en appliquant ici l'équation (3), on aura de même

$$(6) \qquad r_3 \sin(Z_2 - \zeta_3) = r_2 \sin(Z - \zeta_2) + (r_2 - r_3 + h_2) \cos Z_2;$$

et ζ_3 se trouvant ainsi connu, les coordonnées du nouveau point d'incidence seront

$$(7) \qquad z_3 = r_3 \cos \zeta_3; \qquad x_3 = a_3 + r_3 - 2r_3 \sin^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}\zeta_3),$$

en désignant par a_3 l'abscisse du centre de courbure de la troisième surface.

86. Les équations précédentes peuvent ainsi conduire le rayon lumineux à travers un nombre quelconque de milieux et de surfaces, dans la section centrale où il a été placé primitivement.

Elles sont les plus simples que l'on puisse former pour un calcul successif, et elles ne donneront jamais à évaluer que des sinus de très-petits arcs, auxquels il faudra appliquer le signe positif ou négatif que ces sinus auront eux-mêmes. Si le système que l'on considère est uniquement composé de lentilles réfringentes, plongées dans un même milieu ambiant, les vitesses de rang pair u, u_2, u_4,... seront celles de la lumière dans ce milieu. Elles se trouveront ainsi toutes égales entre elles; et en prenant leur valeur commune pour unité, les vitesses de rang impair u_1, u_3, u_5,..., seront les indices de réfraction n_1, n_2, n_3,... des lentilles consécutives pour l'espèce de réfrangibilité que l'on aura considérée. Alors les intervalles de rang impair h_1, h_3, h_5 seront les épaisseurs e_1, e_2, e_3,... de ces lentilles, et les h_2, h_4, h_6 de rang pair seront les intervalles compris entre leurs surfaces extérieures dans le milieu ambiant. Il faudra donc donner à ces diverses lettres les valeurs des quantités qu'elles représentent dans le calcul successif, à mesure qu'elles se présenteront, ce qui n'offrira aucune difficulté.

87. Quand on aura ainsi conduit le rayon lumineux jusqu'à la dernière surface du système, et qu'on l'en aura fait sortir dans le dernier milieu, on connaîtra ses coordonnées finales d'incidence z_m, x_m, sur cette dernière surface, ainsi que l'angle final d'émergence Z_m qu'il forme avec l'axe des z, après l'avoir traversée. Soit, *fig.* 10, $S_m I_m s_m$ la direction ultérieure que lui assignent ces deux éléments. Si l'on désigne par z, x, ses coordonnées courantes dans le dernier milieu, son équation analytique sera alors

$$(e) \qquad x - x_m = -(z - z_m) \operatorname{tang} Z_m.$$

Supposons maintenant que l'on veuille connaître l'aberration de sphéricité produite par le système sur les rayons lumineux homogènes appartenant à un même *faisceau* incident, composé de rayons parallèles entre eux, et ayant une inclinaison donnée sur l'axe central. Il faudra attribuer au premier angle Z la valeur particulière qui sera commune à tous ces rayons; et il faudra aussi spécifier le demi-diamètre d'ouverture λ_1 que l'on veut donner à la surface antérieure. Ce sera l'ordonnée z_1 du rayon incident qui pénètre cette surface par ses bords; et ainsi l'on pourra, d'après

es éléments, former, comme ci-dessus, l'équation finale (e), pro-re à ce rayon extrême. Alors on recommencera les mêmes calculs, ıvec le même angle initial Z, mais en faisant d'abord z_1 nul, ce ɥui les appliquera au rayon qui a percé la première surface à son centre de figure, et qui formait ainsi l'axe géométrique du faisceau incident. On obtiendra donc de même son équation finale dans le dernier milieu; et en caractérisant par l'indice antérieur c les éléments qui lui sont propres, elle sera

$$(c) \qquad x - {}_c x_m = (z - {}_c z_m) \operatorname{tang} {}_c Z_m.$$

Si l'on combine cette équation (c) avec (e), en y supposant x et z communs, on aura les coordonnées x_e, z_e du point où le rayon émergent excentrique va couper le rayon émergent central. Et si l'on veut définir ce point d'intersection par sa distance *antérieure* Δ_e à la dernière surface, ses coordonnées ainsi transformées deviendront

$$\Delta_e = a_m + r_m - x_e; \qquad z = z_e.$$

88. Pour que ces calculs aient une application réelle et utile, il faut que l'inclinaison primitive du faisceau sur l'axe central, exprimée par $90° - Z$, soit restreinte dans les limites de petitesse qui permettent son admissibilité, quand on le suppose réduit à des rayons très-voisins de son axe géométrique, et qui, par conséquent, percent la surface d'incidence très-près de son centre de figure. Or, ces restrictions indispensables étant supposées, tous les rayons qui y sont compris se coupent finalement en un foyer commun dont les coordonnées peuvent se déterminer directement en fonction des coefficients généraux du système; et, d'après ce qu'on a vu tome Ier, page 443, l'expression de ces coordonnées, mise sous la même forme que les précédentes, pour un faisceau parallèle au plan des xz, est

$$\Delta_r = \frac{R_m}{P_m} u_m, \qquad z_r = -\frac{u}{P_m} \cos Z.$$

Donc, si le système n'a pas d'aberration de sphéricité sensible, pour le demi-diamètre d'ouverture λ_1, il faudra que l'on trouve

$$\Delta_e = \Delta_r \quad \text{et} \quad z_e = z_r.$$

En supposant que ces deux conditions ne soient pas réalisées avec une rigueur absolue, elles devront du moins toujours l'être assez approximativement pour que l'erreur qu'elles présenteront puisse être considérée comme négligeable; et il faudra, au besoin, diminuer la demi-ouverture λ_1 d'incidence, ainsi que l'inclinaison du faisceau sur l'axe central, ou $90° - Z$, jusqu'à ce que cela ait lieu.

89. En admettant, comme nous venons de le faire, que cette inclinaison est réellement restreinte dans les limites d'admissibilité qui permettent de la considérer comme extrêmement petite, on pourrait se dispenser de déterminer les éléments d'émergence de l'axe central, ${}_c x_m$, ${}_c z_m$ et ${}_c Z_m$, par les formules du calcul successif. Car, sous ces restrictions, on les obtiendra directement par les formules finales de notre première approximation, comme nous les avons trouvées tome Ier, page 442; et l'on aura ainsi

$$ {}_c x_m = a_m + r_m; \qquad {}_c z_m = u Q_m \cos Z; \qquad \cos {}_c Z_m = \frac{u}{u_m} N_m \cos Z; $$

dans lesquelles il ne restera plus qu'à mettre pour les deux coefficients généraux, et pour les vitesses extrêmes, les valeurs particulièrement propres au système que l'on voudra considérer.

Si ce système est entièrement composé de lentilles réfringentes, m sera toujours pair et égal à $2i$, i étant le nombre total des lentilles. Si, en outre, celles-ci sont extérieurement en contact avec un même milieu ambiant, ce qui est le cas habituel, il sera avantageux d'employer les formules contractées qui sont propres à un tel mode d'action. Alors les vitesses extrêmes u, u_m deviendront égales entre elles et à l'unité. Il faudra de plus remplacer les coefficients généraux par leurs expressions contractées pour le nombre total i, égal à $\frac{1}{2}m$, conformément aux relations établies page 14 du présent volume. On aura ainsi, d'abord pour les coordonnées du foyer principal du faisceau,

$$ {}_c x_i = \frac{{}_c n_i \, P_i + R_i}{{}_c n_i \, P_i}, \qquad {}_c z_i = \frac{\cos Z}{P_i}; $$

et pour les éléments d'émergence de son axe géométrique,

$$_c x_m = a_i + r'_i; \quad _c z_m = \frac{\left(\frac{e_i}{n_i} N_i + Q_i\right) \cos Z}{z_i}; \quad \cos {}_c Z_m = N_i \cos Z;$$

z_i désignant l'abscisse du centre de la dernière surface réfringente, et r'_i son rayon de courbure, dans notre notation contractée. Ces derniers résultats se déduiraient immédiatement des formules de la page 12, en y faisant z_1 nul, et remarquant que notre $_c z_m$ actuel coïncide alors avec $_c z'_i$.

90. Enfin, si l'on voulait seulement connaître l'aberration de sphéricité du faisceau incident qui est parallèle à l'axe central, le calcul serait encore plus simple. Car, soit $A_m I_m$, *fig.* 10, la section centrale de la dernière surface ayant son centre de courbure en C_m; et représentons par $I_m s_m$ la direction spéciale d'émergence du rayon incident parallèle à l'axe qui a percé la surface d'incidence par ses bords à une distance de cet axe égale à λ_1. En faisant dans nos formules trigonométriques $z_1 = \lambda_1$ et $Z = 90°$, elles s'appliqueront au rayon incident dont il s'agit. On en déduira donc les angles Z_m et ζ_m, qui expriment les circonstances de son émergence finale. Concevons ce rayon émergent prolongé en arrière jusqu'à ce qu'il coupe l'axe central en S_m. Alors, dans le triangle $I_m S_m C_m$, l'angle en S_m sera connu, puisqu'il est $90° - Z_m$. L'angle en I_m sera connu aussi et égal à $Z_m - \zeta_m$. On aura donc par ce triangle

$$S_m C_m = \frac{r_m \sin(Z_m - \zeta_m)}{\cos Z_m}.$$

En ajoutant à cette quantité $C_m A_m$ ou r_m, la somme sera $S_m C_m$, qui est le Δ_e de ce rayon excentrique, puisque l'axe géométrique du faisceau incident coïncide alors avec l'axe central lui-même. On aura ainsi pour ce rayon extrême

$$\Delta_e = r_m + \frac{r_m \sin(Z_m - \zeta_m)}{\cos Z_m}.$$

Ce Δ_e devra être comparé à la distance focale principale F du sys-

tème dont l'expression est

$$F = \frac{R_m}{P_m} u_m, \qquad \text{ou encore} \qquad F = \frac{\frac{e_i}{n_i} P_i + R_i}{\varepsilon_i P_i},$$

dans notre notation contractée. Donc, pour que l'aberration de sphéricité soit nulle, relativement au faisceau parallèle à l'axe, avec le demi-diamètre d'incidence λ_1 admis dans le calcul, il faudra qu'on trouve

$$\Delta_e = F = \frac{\frac{e_i}{n_i} P_i + R_i}{\varepsilon_i P_i};$$

et l'erreur de cette égalité donnera la mesure de l'aberration propre à ce faisceau.

91. Les mêmes formules serviraient encore à vérifier jusqu'à quel degré de précision l'achromatisme serait opéré dans un instrument d'optique donné. Car il suffirait pour cela d'effectuer ces calculs pour un même rayon incident, parallèle ou oblique à l'axe central, en attribuant successivement à ses indices de réfraction les valeurs moyennes et extrêmes qu'elles peuvent prendre dans la série des milieux qui composent le système. Les rayons émergents qui en dériveraient, devraient, si l'achromatisme était exact, percer la dernière surface au même point d'incidence I_m, et en sortir suivant une même direction dans le dernier milieu.

Je ne crois pas que ces épreuves théoriques aient jamais été faites avec la précision et la généralité que les formules précédentes permettent d'y apporter, surtout en les appliquant aux pinceaux obliques à l'axe central, que l'on ne considère pas ordinairement. Il serait cependant essentiel de les appliquer aux appareils optiques employés dans l'astronomie; car leur perfection supposée entre comme élément dans une foule de déterminations d'une excessive délicatesse; et peut-être que le calcul y ferait découvrir des conditions d'exactitude essentielles à remplir, que l'on ne soupçonne pas.

Sur la construction des oculaires, appliqués aux objectifs achromatisés.

92. Lorsque le système objectif d'un appareil dioptrique a été isolément achromatisé par les méthodes précédentes, il faudrait que le système oculaire fût aussi rendu isolément tel, pour que l'appareil total formé de leur ensemble pût satisfaire aux conditions d'un achromatisme complet. Mais il serait infiniment plus difficile de donner aussi complétement cette propriété au système oculaire, à cause de l'intervalle sensible qui sépare ordinairement les lentilles dont il est composé; et cela devient tout à fait impossible lorsqu'elles sont construites avec une même espèce de verre, ce qui est encore le cas habituel. C'est pourquoi l'on se borne alors à les combiner de manière que les foyers de réfrangibilités diverses provenus d'un même point rayonnant se trouvent amenés par le système total sur une même droite dirigée au point oculaire de moyenne réfrangibilité. J'ai exposé, tome Ier, pages 580 et suivantes, la condition analytique qui établit cette propriété pour un système dioptrique quelconque; et, en l'appliquant en particulier aux appareils convergents, j'ai montré avec détail les avantages qu'elle leur donne, ainsi que les imperfections d'achromatisme qu'elle laisse subsister dans leurs effets. Maintenant, lorsque ces appareils sont pourvus d'un système objectif donné, et achromatisé isolément, la condition dont il s'agit ne peut plus être remplie que par une disposition appropriée du système oculaire, et elle doit se reporter tout entière sur les éléments qui le composent. Je vais donc spécialiser ainsi leur application, en la bornant aux appareils dans lesquels le centre de la pupille peut être supposé placé réellement, ou fictivement, au point oculaire moyen; le premier cas ayant lieu lorsque ce point est postérieur à la surface d'émergence, le second lorsqu'il lui est si peu antérieur que la pupille, à cause de son étendue, puisse, en s'appliquant contre la dernière surface, être sensiblement affectée comme si elle coïncidait avec lui, tome Ier, page 590. Ces deux combinaisons sont aujourd'hui les seules usitées dans les lunettes et les télescopes à réflexion qui servent aux observations astronomiques ou terrestres. Les appareils, où le point oculaire

est assez antérieur pour qu'il faille y tenir compte de la position externe de l'œil, ne sont plus employés maintenant que pour former des lunettes de spectacle à oculaire simple, et ce n'est pas ici le lieu de nous en occuper.

93. Devant donc, pour cette recherche, séparer les effets du système oculaire de ceux du système objectif qui est supposé donné, je reprends les équations de la page 506 du tome Ier, qui expriment les coefficients généraux de l'appareil total, en fonction des éléments propres aux deux systèmes partiels qui le composent. Je continue de représenter, comme alors, par h_i l'intervalle central de ces deux systèmes. Mais l'oculaire dioptrique devant être préparé pour le cas habituel où toutes les lentilles qui le composent sont entourées d'un même milieu qui est l'air ambiant, la vitesse antérieure u_i, correspondante à l'intervalle h_i, sera égale à la vitesse finale d'émergence u_m, pour chaque rayon de réfrangibilité fixe. Je supposerai l'instrument total dirigé de manière que ces deux vitesses extrêmes soient positives dans notre notation; et, les prenant pour unité, toutes les vitesses intérieures aux lentilles de l'oculaire se trouveront exprimées par les indices de réfraction qui y correspondent. Quant au système objectif, je n'aurai pas besoin de spécifier sa constitution. J'admettrai seulement qu'il exerce son action dans l'air ambiant, comme l'oculaire. Alors la vitesse antérieure d'incidence u sera toujours égale, en valeur, à u_i et à u_m. Mais elle pourra être de même signe, ou de signe contraire, selon que le système objectif sera, ou ne sera pas complétement dioptrique. Pour éviter ces distinctions qui troubleraient l'uniformité des raisonnements, j'admettrai que les éléments catoptriques de l'objectif, s'il en existe, sont remplacés idéalement par un système équivalent de lentilles réfringentes infiniment minces, et non dispersives, accompagnées d'une inversion convenable de direction des rayons lumineux qui leur parviennent, substitution que nous avons prouvé être toujours possible, tome Ier, page 484. Alors, n'ayant plus à considérer que des objectifs purement dioptriques, agissant dans l'air, la vitesse d'incidence antérieure u devra être prise égale à $+1$, comme ses analogues u_i, u_m; et la distance Δ des objets observés devant correspondre au sens

de cette vitesse, sera toujours positive dans les applications, aussi bien que la constante D qui exprime la distance de l'image finale au devant de l'œil (1).

Reprenant donc les équations de la page 506, qui sont exprimées en coefficients généraux non contractés, j'y introduis les particularités de signes, ainsi que de valeurs, que nous venons d'attribuer aux vitesses u, u_i, u_m; et elles deviennent alors :

$$N = N'N'' + Q'P'' + N'P''h_i, \qquad P = P'N'' + R'P'' + P'P''h_i,$$
$$Q = N'Q'' + Q'R'' + N'R''h_i, \qquad R = P'Q'' + R'R'' + P'R''h_i.$$

De là je tire les deux suivantes, indépendantes de l'intervalle h_i et qui vont nous être fréquemment utiles :

$$(2) \qquad N'P - NP' = P'', \qquad R''N - P''Q = N';$$

il faut y joindre la condition de dispersion rectiligne des foyers. Or, dans un instrument où le centre de la pupille est placé au point oculaire moyen, si l'on prend pour unité la vitesse u, égale à u_m, la condition dont il s'agit est, d'après la page 586,

$$(3) \qquad \left(P + \frac{N}{\Delta}\right)\delta H - \frac{\delta N}{N^2} = 0.$$

Cette équation doit être employée conjointement avec celle qui amène les images finales au devant de l'œil, à la distance D, convenable pour la portée de vue de l'observateur, et que nous avons établie généralement, tome Ier, page 501. Ici, l'œil étant au point oculaire moyen, on a dans cette dernière équation $D' = H$;

---

(1) Le changement de sens opéré ici dans la vitesse u pour la faire coïncider avec les vitesses u_i, u_m, s'applique également au cas où les rayons réfléchis par un miroir concave seraient ramenés vers l'oculaire par l'interposition d'un miroir plan incliné à 45 degrés sur leur axe central, comme dans la construction de télescope imaginée par Newton, et que j'ai indiquée tome Ier, page 349, *fig.* 21. Il faut seulement alors considérer les rayons qui arrivent à l'oculaire comme lui étant directement envoyés par un miroir concave idéal, qui serait l'image réfléchie du miroir réel.

et la vitesse finale d'émergence u_m étant 1, comme la vitesse d'incidence, il reste pour condition de visibilité

$$(4) \qquad P + \frac{N}{\Delta} = \frac{1}{ND}, \qquad \text{d'où} \qquad N + P\Delta = \frac{\Delta}{ND}.$$

D'après les conventions que nous venons d'établir, Δ et D sont tous deux positifs. Cette équation ne pourra donc être satisfaite que si N est de même signe que $N + P\Delta$. Or, d'après la remarque faite page 452 du Ier volume, u étant 1, lorsque $N + P\Delta$ est négatif, l'instrument donne des images renversées des objets; et lorsque $N + P\Delta$ est positif, il donne des images droites. Donc, si l'on veut ici que l'instrument renverse, en formant les images finales antérieurement à l'œil, il faudra faire en sorte que N soit négatif; et si l'on veut qu'il ne renverse pas, il faudra que N soit positif.

Cette expression de $P + \frac{N}{\Delta}$, étant introduite dans l'équation (3), la réduit à la forme très-simple

$$(3)' \qquad \frac{\delta H}{D} - \frac{\delta N}{N} = 0.$$

94. Voilà toutes les conditions générales du problème posées. Il faut maintenant y introduire la particularité que le système objectif est individuellement achromatique pour la distance Δ des objets auxquels l'instrument doit être spécialement appliqué, et déduire de là les conditions auxquelles le système oculaire doit satisfaire.

Pour cela je prends d'abord dans l'équation (4) la valeur de P, et je la substitue dans la première des équations (2). Il en résulte

$$P'' = -N\left(P' + \frac{N'}{\Delta}\right) + \frac{N'}{ND}.$$

Or, si l'on désigne par Δ'_f la distance focale *actuelle* du système objectif, pour la distance Δ des objets, les vitesses u et u_i étant 1, la relation générale de la page 454, étant appliquée à ce système, donne

$$\frac{1}{\Delta'_f - H'} = N'\left(P' + \frac{N'}{\Delta}\right);$$

tirant donc de là $P' + \frac{N'}{\Delta}$, et le substituant dans P'', il vient

$$P'' = -\frac{N}{N'}\left(\frac{1}{\Delta'_f - H'} - \frac{N'^2}{N^2 D}\right).$$

Si la distance D de la vision distincte était infinie, le facteur compris entre les parenthèses se réduirait à $\frac{1}{\Delta'_f - H'}$. Je fais donc en général

$$(5) \qquad \frac{1}{\delta' - H'} = \frac{1}{\Delta'_f - H'} - \frac{N'^2}{N^2 D},$$

ce qui donne pour condition équivalente à l'équation (4)

$$(4)' \qquad P'' = -\frac{N}{N'(\delta' - H')}.$$

δ' est ainsi une quantité auxiliaire qui deviendrait égale à Δ'_f, si l'instrument devait être préparé pour un observateur infiniment presbyte. Dans tous les cas, lorsque le grossissement angulaire N sera un grand nombre, comme cela a lieu habituellement pour les lunettes et les télescopes astronomiques, le terme $\frac{N'^2}{N^2 D}$ sera une fraction très-petite comparativement à $\frac{1}{\Delta'_f - H'}$; et δ' différera très-peu de Δ'_f.

95. Cette expression de P'' étant ainsi appropriée aux conditions de la vision distincte, à travers l'appareil construit avec l'objectif donné, il faut l'introduire dans l'expression générale de N pour en conclure l'intervalle h_i, comme aussi dans la seconde des équations (2) pour en conclure Q, et par suite $\frac{Q}{N}$ ou H de l'instrument total. La première substitution donne

$$h_i = -\frac{Q'}{N'} - \delta' + H' + \frac{N'N''}{N}(\delta' - H').$$

La vitesse u_i étant 1, $\frac{Q'}{N'}$ est précisément l'expression explicite de H′ pour le système objectif. Ces deux termes, de signe contraire, se détruisent donc mutuellement, et il reste

$$h_i = -\delta' + \frac{N'N''}{N}(\delta' - H').$$

Il faudra que cette valeur de h_i soit positive, pour que le système oculaire soit physiquement postérieur au système objectif comme on l'a supposé. Or, δ' différant toujours très-peu de Δ'_f, $-\delta'$ sera nécessairement une quantité positive, parce que le système objectif est toujours convergent. Cela limitera donc l'étendue possible des valeurs négatives que le terme suivant pourrait prendre. Ce résultat est analogue à celui que nous avons obtenu pour un observateur infiniment presbyte, tome Ier, pages 513 et 514. La forme de l'expression de h_i est aussi la même que l'était alors celle de h_0, page 511; et il en résultera une distinction toute pareille des systèmes oculaires en deux classes, les positifs et les négatifs, fondée sur les caractères physiques que nous avons alors développés.

96. Mais il intervient ici une circonstance nouvelle que nous n'avions pas alors à considérer, et contre laquelle il faut maintenant nous prémunir; c'est l'inégale réfrangibilité des rayons émanés de chaque point lumineux et que l'instrument doit recevoir simultanément. Lorsque l'intervalle h_i sera réglé pour une de ces espèces de rayons, de manière que la continuité du système existe pour eux, il faudra qu'il convienne à tous les autres, puisque sa valeur une fois établie fixe la position relative des surfaces qu'il sépare. Or, ce résultat sera singulièrement facilité, si le système objectif est individuellement achromatique, et il serait même presque impossible de l'obtenir autrement. Cela ayant lieu, les quantités N′, H′, Δ'_f, propres au système objectif, qui entrent dans l'expression de h_i, seront constantes pour toutes les réfrangibilités; et cette constance s'étendra aussi à δ', parce que, dans la suite du calcul, on aura soin de rendre N constant sous ce même rapport. Il ne restera donc dans cette expression que N″ de variable quand la réfrangibilité changera. Or, si la constitution

de l'oculaire ne permettait pas d'anéantir complétement la variabilité de N″, ce qui est à la vérité le cas ordinaire, il suffirait que l'on parvînt à la rendre très-petite, pour que l'effet en fût insensible dans h_i, à cause du coefficient N qui l'affecte comme diviseur et qui est ordinairement un grand nombre : c'est ainsi que l'on fait habituellement. Mais on voit que cela serait loin de suffire pour rendre h_i sensiblement constant, si le terme δ' qui s'y trouve sans diviseur était lui-même variable avec la réfrangibilité, comme cela arriverait si la distance focale Δ'_f de l'objectif n'était pas rendue exactement constante pour toutes les espèces de rayons. C'est ce qui m'a fait tant insister plus haut sur les moyens d'établir cette constance avec la plus grande rigueur. Car les petites variations chromatiques dont N′ et H′ pourraient rester individuellement affectés, n'auraient sur h_i qu'une influence incomparablement moindre, tant à cause de leur faiblesse propre que parce qu'elles se trouvent dans le terme de h_i, qui a pour diviseur N.

97. Formons maintenant la quantité H qui détermine la position du point oculaire relativement à la dernière surface du système total. La vitesse d'émergence u_m étant ici égale à la vitesse d'incidence u pour toutes les espèces de rayons, et u ayant été pris pour unité dans les coefficients du système, H est exprimé par $\frac{Q}{N}$. Or la seconde des équations (2) donne

$$H = \frac{Q}{N} = \frac{R''}{P''} - \frac{N'}{NP''}.$$

Dans la condition adoptée que u_m est 1, le terme $\frac{R''}{P''}$ représente la distance focale principale du système oculaire, tome Ier, page 453. Je la désignerai par F″. Remplaçant donc P″ par son expression spéciale (4)′, dans le second terme seulement, on a

$$H = F'' + \frac{N'^2}{N^2}(\delta' - H');$$

il faudra que cette quantité H soit négative pour que le point ocu-

laire du système soit postérieur à la surface d'émergence, et qu'ainsi l'appareil soit réellement convergent. Cette condititition de signe se trouvera toujours remplie lorsque F″ sera négatif, c'est-à-dire lorsque l'oculaire formera par lui-même un système convergent. Car, dans les applications, $\delta' - H'$ est toujours une quantité négative, parce que le système objectif fait toujours converger les pinceaux incidents postérieurement à ses propres surfaces et à son point oculaire propre. Or, le coefficient $\frac{N'^2}{N^2}$ étant un carré, ne change pas son signe. Le second terme de H est donc alors négatif par lui-même; de sorte que, si F″ est aussi négatif, l'expression entière le sera. Tout cela est analogue à ce que nous avons déjà démontré tome Ier, page 521, dans la supposition d'un presbytisme illimité. Ce n'en est que l'extension à une portée de vue quelconque; et si l'on supposait D infini dans les expressions actuelles de h_l et de H, on retomberait sur celles que nous avons trouvées alors.

Si F″ était positif, c'est-à-dire si le système oculaire était divergent par lui-même, H pourrait devenir nul ou même positif. Mais, en supposant que ce dernier cas arrivât, il faudrait, pour la recherche qui nous occupe, que sa valeur positive fût excessivement petite, c'est-à-dire que le point oculaire fût excessivement peu antérieur à la surface d'émergence : ce sera donc là une condition qu'on devra toujours s'astreindre à remplir dans les cas pareils.

98. Examinons maintenant comment cette expression de H s'appliquera aux rayons de diverses réfrangibilités. D'abord, si le système objectif est achromatique par lui-même, et que N soit rendu constant pour toutes les réfrangibilités, comme nous aurons soin de le faire, le terme divisé par N^2 sera aussi constant; et il ne restera de variable que le terme F″ dont les changements chromatiques se reproduiront tout entiers dans H. De tels changements devront donc s'opérer lorsque le système oculaire ne sera pas individuellement achromatique; et alors différentes espèces de rayons transmises par l'appareil entier auront des points oculaires différents. Mais les conséquences de cette dispersion deviendront physique-

ment imperceptibles, si l'on fait seulement la distance focale F″ très-courte pour toutes les espèces de réfrangibilité, surtout si la valeur entière de H est en même temps fort petite. Car alors la pupille se trouvant très-proche de tous les points oculaires définitifs, son étendue permettra aux rayons qui s'y croisent, d'entrer simultanément dans l'œil, et de l'affecter presque comme si tous ces points étaient coïncidents.

99. Jusqu'ici nous n'avons fait aucun usage de l'équation (3) ou (3)′, dans laquelle les variations de la réfrangibilité entrent comme élément. D'après la manière dont nous l'avons établie en général, t. Ier, p. 586, les valeurs de δH et de δN qu'elle renferme doivent être formées sous la seule réserve de la continuité du système optique et de son caractère de convergence, sans égard à la condition de visibilité distincte, laquelle ne doit y être introduite que secondairement, et seulement pour les images de réfrangibilité moyenne, autour desquelles s'opèrent les variations indiquées par la caractéristique δ. Le δH et le δN de cette équation doivent donc être déduites des expressions générales de Q et de N, en appliquant la caractéristique δ à toutes les parties de ces expressions qui varient avec la réfrangibilité; et elles doivent être introduites dans l'équation sans aucune limitation quelconque. Mais, après les y avoir substituées, tous les éléments du système qui se trouveront y entrer explicitement, et qui affecteront comme coefficients les variations des indices de réfraction, devront être pris avec les valeurs propres à la réfrangibilité moyenne. L'équation (3) ainsi formée, et limitée, devra être ensuite employée conjointement avec les deux qui établissent la continuité du système, et la visibilité distincte des images finales, pour la réfrangibilité moyenne seulement. On pourra alors la combiner avec les expressions de h_i et de H, formées tout à l'heure, en les supposant appliquées aux rayons de moyenne réfrangibilité.

100. Il y aura donc, en tout, trois conditions auxquelles chaque système dioptrique achromatisé seulement par l'équation (3)′ devra satisfaire. Ainsi, en multipliant suffisamment ses éléments constitutifs, c'est-à-dire les lentilles et les intervalles indéterminés qui les séparent, un certain nombre de ces éléments pourra rester complétement arbitraire. De sorte qu'ils se trouveront facultativement dis

ponibles, pour donner au système des propriétés spéciales, par exemple une certaine longueur de distance focale, une certaine force de grossissement, ou quelque autre modification totale, soit pour son usage, soit pour y affaiblir les aberrations de sphéricité.

101. En nous bornant ici aux applications réelles, nous devons d'abord considérer comme donné le système objectif, ainsi que la distance Δ à laquelle l'instrument sera spécialement appliqué; les quantités N', H' et Δ'_f, propres à ce système, dans son application actuelle, seront donc déjà invariablement déterminées pour toutes les espèces de rayons lumineux; et même δ' le sera aussi à très-peu près, puisqu'il différera toujours extrêmement peu de Δ'_f. Il nous restera donc pour arbitraires, la valeur de N, l'intervalle h_i, et tous les éléments constituants du système oculaire. Mais ces indéterminées seront liées ensemble, d'abord par l'équation de continuité qui lie N et h_i, puis par l'équation (4) qui amène les images à la distance donnée D de la vision distincte; et enfin par l'équation (3)' qui dispose tous les foyers de chaque point rayonnant sur une même droite dirigée au point oculaire moyen. Il faudra en outre que les arrangements adoptés donnent à h_i une valeur positive, et que celle de H en résulte généralement négative; ou que, si elle se trouve positive, elle soit excessivement restreinte.

102. L'accomplissement *rigoureux* de toutes ces conditions entraînerait des calculs analytiques inextricables. Mais il devient très-facile d'y satisfaire, lorsque l'on suppose le système objectif complétement achromatique, formé par des lentilles en contact central, et que l'on attribue à ces lentilles aussi bien qu'à celles du système oculaire, des épaisseurs assez petites pour pouvoir être négligées comparativement à leurs distances focales principales, ou à leurs rayons de courbure postérieurs. J'admettrai ces restrictions dans ce qui va suivre. Il est vrai qu'elles s'écartent toujours des réalités; mais, outre qu'on a soin de s'en rapprocher autant que possible dans l'exécution pratique, on n'emploie les résultats numériques qui s'en déduisent que pour déterminer les éléments fixes du système oculaire, c'est-à-dire les distances focales des lentilles dont on veut le composer, et que l'on règle ainsi de manière à en faire résulter le grossissement total N

ue l'on désire à peu près obtenir. Ces distances étant ainsi con-
ues, on choisit les rayons de courbure qui peuvent les reproduire
vec les plus faibles aberrations de sphéricité, dans la situation
ue chaque lentille occupera relativement aux foyers intérieurs
éels ou virtuels, où concourront les rayons des pinceaux qu'elle
oit recevoir et transmettre, foyers que l'on peut toujours con-
aître par la marche des rayons à travers les lentilles précédentes.
orsque tous les verres du système oculaire sont exécutés sur ces
onnées, on les dispose entre eux, et relativement au système ob-
ctif, aux intervalles que le calcul prescrit. Mais les montures qui
s contiennent alors leur laissent une certaine liberté de mouve-
ent longitudinal, qui permet encore de les rapprocher ou de les
oigner tant soit peu les uns des autres. On considère alors ces in-
rvalles, ainsi que le grossissement calculé N, comme des élé-
ents encore arbitraires, mais pourtant déjà peu différents des
éritables; ou du moins, assez peu différents pour qu'en faisant va-
er les intervalles seuls, on puisse obtenir des images suffisam-
ent achromatiques et placées à la distance convenable de l'œil,
ns s'écarter beaucoup du grossissement angulaire que l'on
ésirait obtenir. Quand les verres de l'oculaire sont amenés expéri-
entalement à ce point, on les fixe invariablement dans la mon-
re qui les porte, pour qu'ils gardent toujours la distance rela-
ve qui a été trouvée ainsi la plus favorable. Mais on conserve à
ur ensemble la liberté de mouvement nécessaire pour que chaque
bservateur puisse l'amener à la juste distance de l'objectif que la
ortée de sa vue exige. Alors on mesure le grossissement N qui
sulte de ces positions définitives par quelqu'un des procédés que
ous avons décrits tome Ier, pages 437 et 471. Cette rectification
périmentale des intervalles a donc pour but et pour effet d'a-
ever de remplir, par des opérations physiques, les conditions
alytiques exprimées par les équations qu'on n'a pu résoudre exac-
ment. Peut-être la rendrait-on encore plus parfaite si, après l'avoir
ectuée dans l'atelier de l'artiste, on conservait *toujours* aux len-
les de l'oculaire une très-petite liberté de mouvement relatif, dont
aque observateur pourrait profiter pour adapter le mieux possible
système total aux conditions exigées par la portée particulière

de sa vision. Il résulte évidemment de cet exposé que, pour la complète perfection des effets, chaque système oculaire doit être réglé spécialement sur le système objectif auquel on veut qu'il s'applique. Car si on le transporte à un autre, sans aucune variation dans les intervalles de ses verres, les conditions d'achromatisme du système total ne pourront pas se trouver remplies si exactement, puisque celles qui dépendent des épaisseurs, et même des imperfections de l'objectif, auront changé.

103. Le calcul approximatif, par lequel on prépare le système oculaire, se facilite encore en considérant la variation chromatique δH comme extrêmement petite et négligeable, comparativement à la distance D de la vision distincte, ce qui la fait disparaître de l'équation (3)′, et réduit celle-ci au seul terme

$$\delta N = 0.$$

Analytiquement, cela revient à préparer l'oculaire pour un œil infiniment presbyte, ce qui n'a jamais lieu à la rigueur. Mais, outre qu'on rectifie postérieurement cette supposition par l'ajustement expérimental des verres de l'oculaire, elle n'est pas en elle-même fort inexacte, lorsqu'on rend δN nul, et que le système objectif est isolément achromatisé. En effet, ces deux conditions étant remplies, le terme $\frac{N'^2(\delta' - H')}{N^2}$, qui entre dans l'expression de H donnée tout à l'heure, devient constant, quelle que soit la réfrangibilité. De sorte que la variation δH se réduit alors à $\delta F''$, c'est-à-dire à la seule variation qu'éprouve la distance focale principale propre du système oculaire pour les réfrangibilités diverses, ainsi que nous l'avons déjà remarqué. Or, comme on fait toujours cette distance focale très-courte, soit qu'on la rende positive ou négative, ses variations chromatiques sont aussi très-petites comparativement à D, ce qui justifie la suppression du terme $\frac{\delta H}{D}$ dans l'équation (3)′, surtout en ne voulant ici en faire qu'une application approximative et préparatoire. Enfin l'ouverture sensible de la pupille contribue encore à rendre ces petites variations négligea-

bles, ainsi que nous l'avons remarqué déjà. Car, lorsque le centre de cet organe est placé tout près du point oculaire moyen, ou dans ce point même, comme nous le supposons, les points analogues, propres aux diverses réfrangibilités, s'en trouvent assez proches pour que les axes des pinceaux dirigés vers ces points entrent dans l'œil comme s'ils le perçaient aussi à son centre. Tout cela, joint à la rectification définitive de l'oculaire par l'expérience, permet bien de le préparer comme si δH était nul ou insensible comparativement à D. Des praticiens habiles ont même considéré ces petites aberrations, propres au système oculaire, comme pouvant n'être pas inutiles pour achever de compenser celles qui resteraient encore dans le système objectif; mais ce serait là, à ce qu'il me semble, un moyen de rectification bien périlleux.

104. La nullité des épaisseurs centrales des lentilles, ou du moins la supposition qu'elles sont négligeables, simplifie considérablement les expressions contractées des coefficients généraux N, P, Q, R, comme nous l'avons remarqué, page 17, quand nous les avons formés. En effet, par cette limitation, les quantités auxiliaires que nous avons nommées ε_i se réduisent toutes à l'unité; celles que nous avons nommées H_i deviennent égales à l'intervalle h_i qui suit chaque lentille dont le rang est i; enfin la quantité f_i, propre à chaque lentille, représente alors sa distance focale principale, dont l'expression en fonction des rayons de courbure devient alors

$$\frac{1}{f_i} = (n_i - 1)\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r'_i}\right);$$

de sorte qu'en y faisant varier l'indice de réfraction par la caractéristique δ, elle donne

$$\delta\left(\frac{1}{f_i}\right) = \frac{\delta n_i}{(n_i - 1) f_i} \quad \text{et} \quad \delta f_i = -\frac{f_i}{(n_i - 1)}\,\delta n_i.$$

Nous avons déjà employé ces simplifications dans nos premiers calculs sur l'achromatisme des objectifs, page 39, quand nous les considérions comme composés de lentilles dont l'épaisseur centrale était insensible. On voit que, pour chaque lentille, la variation

chromatique *absolue* δf_i est d'autant moindre que la distance focale f_i est plus courte, comme je l'avais annoncé.

Ici, en adoptant la même supposition pour le calcul préparatoire des oculaires, nous y ajouterons que les lentilles qui composent le système objectif, quel que soit leur nombre, sont toutes en contact central entre elles. Cette nouvelle condition étant introduite avec la précédente dans les expressions des coefficients généraux de ce système, leur donne les valeurs suivantes :

$$N' = 1; \qquad P' = \frac{1}{F'}; \qquad Q' = 0; \qquad R' = 1.$$

F' représente la distance focale principale de l'objectif ainsi constitué; et, d'après les circonstances assignées ici à sa formation, l'on a

$$\frac{1}{F'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} + \frac{1}{f'_3} \ldots \text{ etc.};$$

f'_1, f'_2, f'_3, étant les distances focales principales des lentilles infiniment minces qui le composent par leur contact.

Or, en formant le coefficient angulaire N du système total, en fonction des éléments propres au système objectif et au système oculaire, considérés isolément, nous avons eu pour son expression générale, page 121 :

$$N = N'N'' + Q'P'' + N'P''h_i.$$

La limitation précédente du système objectif donnera donc ici

$$(1) \qquad N = N'' + P''h_i.$$

C'est avec cette expression simplifiée qu'il faut former δN, en appliquant à son second membre la caractéristique δ, pour laquelle l'intervalle h_i des deux systèmes est une quantité invariable. Égalant donc cette variation à zéro, pour satisfaire à l'équation (3)', réduite à son dernier terme, comme nous en sommes convenus, on aura, pour condition unique,

$$(3) \qquad 0 = \delta N'' + h_i \delta P''.$$

Quand les variations que cette équation renferme seront formées

conformément à la composition que l'on veut attribuer au système oculaire, il ne restera plus qu'à la combiner avec la condition de continuité du système total établie par l'expression précédente de N, et avec la condition de visibilité distincte établie par l'équation (4)', qui donne généralement

$$(4) \qquad P'' = -\frac{N}{N'(\delta' - H')};$$

mais ici, par la supposition des épaisseurs nulles, N' est 1, comme on l'a vu tout à l'heure; et Q' étant nul par la même cause, H' est nul aussi comme ayant pour valeur $\frac{Q'}{N'}$. Enfin la grandeur infinie attribuée à D rend δ' égal à Δ'_f, c'est-à-dire à la distance focale du système objectif pour la distance Δ. Employant donc simplement la lettre Δ' pour représenter désormais cette distance focale, l'équation (4), modifiée par toutes ces considérations, se réduit à la forme très-simple

$$(4) \qquad P'' = -\frac{N}{\Delta'};$$

sur quoi il faut se souvenir qu'après avoir appliqué la caractéristique δ pour former l'équation (3), tous les éléments du système qu'elle se trouvera contenir, de même que ceux qui entrent dans l'expression de N et dans l'équation (4), devront être calculés avec les valeurs propres à la réfrangibilité moyenne.

105. D'après la marche ainsi assignée au calcul, on voit que la dispersion rectiligne des foyers exprimée par l'équation (3) résultera uniquement de la constitution du système oculaire, sans que celle du système objectif y entre en aucune manière. De sorte que, pour l'établissement de cette propriété, il semblerait indifférent que le système objectif soit ou ne soit pas individuellement achromatique. Mais cela n'est ainsi qu'en apparence. Car l'intervalle h_i entre dans l'équation (3), sous la condition tacite de satisfaire à la continuité de la transmission pour chaque espèce de rayon lumineux que l'on considère; et il ne peut convenir ainsi à toutes les espèces de rayons que si l'objectif a été individuellement achroma-

tisé. C'est donc sous cette réserve qu'il peut leur être censé commun dans l'équation (3), et y être supposé constant pour la caractéristique δ comme nous l'avons fait. Dès lors, dans les limitations que notre calcul admet, la dispersion rectiligne des foyers ne doit plus dépendre ultérieurement que de la constitution de l'oculaire. En effet, considérons, *fig.* 11, un pinceau de lumière naturelle émané d'un point rayonnant S, compris dans le cône antérieur d'admissibilité $V'A_1V'$; en sorte que l'axe géométrique de ce pinceau qui perce la surface d'incidence à son centre de figure A_1, soit lui-même compris dans les limites d'admissibilité, ce qui est une condition préalable de nos calculs. Cet axe géométrique SA_1 sera commun à tous les pinceaux hétérogènes qui composent le pinceau incident total; et, après qu'ils auront traversé le système objectif, chacun d'eux formera son foyer propre sur la direction ultérieure que cet axe aura prise, selon la réfrangibilité particulière qu'on lui attribue. Or, puisque nous supposons toutes les lentilles de l'objectif en contact central, et sans épaisseur sensible, tous ces axes émergents coïncideront sur la direction de l'axe incident SA_1 prolongé, parce que toutes les surfaces réfringentes seront parallèles et coïncidentes, dans leur centre de figure A_1, où il les rencontre. La transmission de ce rayon central sera ainsi la même dans tous les systèmes objectifs infiniment minces, soit qu'on les ait ou qu'on ne les ait pas achromatisés pour les autres rayons incidents; et les pinceaux hétérogènes émanés d'un même point rayonnant admissible auront toujours leurs foyers dispersés sur son prolongement rectiligne. Mais, si l'objectif est individuellement achromatique, il réunira tous ces foyers en un point unique f sur l'axe du pinceau prolongé; et alors leur dispersion ultérieure sur une même droite, dirigée au point oculaire moyen de l'instrument total, dépendra uniquement de la constitution du système oculaire qui les recevra. Si on le fait seulement tel que δN soit nul, les axes géométriques hétérogènes qui appartiennent à un même pinceau incident se dirigeront finalement à leurs points oculaires propres suivant des directions parallèles entre elles, comme la figure l'indique. Mais ajoutons-y que la dispersion δH de ces points, autour de leur position moyenne H_1, soit très-petite com-

parativement à la distance D où se forme définitivement le foyer de moyenne réfrangibilité, et qu'en outre les autres foyers soient situés à des distances peu différentes de D, à compter de leurs points oculaires propres; alors toutes les droites visuelles sur lesquelles ils se trouvent pourront être évidemment considérées comme coïncidentes, et dirigées au point oculaire moyen de l'appareil : tel est le but et le résultat de notre approximation.

106. L'achromatisme individuel du système objectif a précisément pour effet de resserrer ainsi l'amplitude de cette dispersion des foyers définitifs dans le sens longitudinal. Pour en avoir la preuve, nommons Δ_f la distance focale totale du système total pour la distance Δ des objets auxquels il doit être spécialement appliqué. On aura généralement :

$$\frac{1}{\Delta_f - H} = NP + \frac{N^2}{\Delta}.$$

La variation de Δ_f, pour les diverses réfrangibilités, s'obtiendra en appliquant aux deux membres de cette équation la caractéristique δ; sur quoi il faut remarquer que Δ est constant par lui-même pour cette caractéristique, et que N est rendu tel par l'équation (3). Traitant donc ces deux quantités comme invariables, il viendra

$$\frac{\delta\Delta_f - \delta H}{(\Delta_f - H)^2} = -N\delta P;$$

conséquemment

$$\delta\Delta_f = \delta H - N(\Delta_f - H)^2\delta P.$$

Or les équations de continuité du système total étant combinées entre elles, page 121, nous ont donné généralement

$$P = \frac{P'' + NP'}{N'}.$$

Mais ici la nullité d'épaisseur attribuée au système objectif rend N' égal à 1, et par suite P' devient égal à $\frac{1}{F'}$, en désignant par F' la distance focale principale de ce système pour une réfran-

gibilité quelconque. Il en résulte donc

$$P = P'' + \frac{N}{F'},$$

ce qui étant varié, dans la condition de δN nul, donne

$$\delta P = \delta P'' - \frac{N \delta F'}{F'^2},$$

et par suite

$$\delta \Delta_f = \delta H - N(\Delta_f - H)^2 \delta P'' + \frac{N^2}{F'^2}(\Delta_f - H)^2 \delta F'.$$

$\Delta_f - H$ doit être égal à D quand l'instrument s'emploie, puisque, dans notre recherche actuelle, le centre de la pupille est placé réellement ou fictivement au point oculaire moyen. On aura donc:

$$\frac{\delta \Delta_f}{D} = \frac{\delta H}{D} - N D \delta P'' + \frac{N^2 D}{F'^2} \delta F'.$$

Ceci exprime en général la dispersion longitudinale des foyers dans l'appareil total, quand le système objectif est seulement supposé sans épaisseur sensible. Maintenant, lorsque ce système n'est pas individuellement achromatisé, le terme qui dépend de $\delta F'$ subsistera, et d'autant plus considérable qu'il se trouve multiplié par le carré du grossissement total N qui est souvent un très-grand nombre. Il sera donc très-avantageux, pour cela seul, d'anéantir ce terme en rendant $\delta F'$ nul, c'est-à-dire en achromatisant l'objectif. Alors il ne restera de sensible que le terme précédent, qui contient la variation $\delta P''$ propre à l'oculaire, et se trouve avoir seulement pour multiplicateur la première puissance de N. Si l'on ne peut achromatiser l'oculaire pour anéantir ce terme, il faudra du moins tâcher qu'il n'opère pas entre les foyers hétérogènes une dispersion longitudinale trop forte pour que l'œil ne puisse pas la tolérer; et on le restreindra dans ces limites, par l'expérience même, en variant les intervalles des lentilles qui le composent, comme aussi en diminuant le grossissement N jusqu'à ce que chaque point rayonnant vu à travers l'appareil offre pour image sensible un simple point.

107. Ayant ainsi fixé toutes les circonstances générales des résultats que nous devons établir, je reprends l'équation simplifiée

$$(3) \qquad o = \delta N'' + h_i \delta P'';$$

et je vais chercher successivement les diverses constitutions d'oculaires qui pourront y satisfaire.

Il est évident d'abord qu'elle serait satisfaite si le système oculaire était achromatique individuellement; parce qu'alors $\delta N''$ et $\delta P''$ seraient l'un et l'autre nuls. Ce résultat était facile à prévoir, car l'équation est préparée dans la supposition que le système objectif est individuellement achromatique. Si l'oculaire l'était aussi, le système total le serait; alors chaque point rayonnant donnerait pour image finale un point unique; et, comme il n'y aurait aussi qu'un point oculaire pour toutes les réfrangibilités, la droite qui le joindrait au foyer commun contiendrait tous les foyers hétérogènes provenant du même pinceau, ainsi que le veut l'équation (3) prise dans sa complète rigueur.

D'après cela, il pourrait sembler naturel d'adapter ainsi des oculaires individuellement achromatiques aux objectifs déjà rendus tels par eux-mêmes. Néanmoins on ne le fait pas habituellement, quoiqu'on l'ait essayé; et, en effet, il est aisé de comprendre par nos formules que de semblables combinaisons ne réaliseraient pas indistinctement les avantages qu'elles sembleraient promettre. Car, en supposant par exemple l'oculaire composé seulement de deux lentilles de différente nature, mises en contact, comme on l'a quelquefois tenté, il serait premièrement impossible de donner à leur ensemble un achromatisme exact, ainsi que nous avons eu occasion de le reconnaître, en composant de pareils systèmes pour les objectifs. Puis, l'oculaire ainsi construit ne laisserait plus de disponible qu'un seul élément arbitraire, savoir l'intervalle h_i, qui se trouverait postérieurement déterminé, pour chaque observateur, par la condition d'amener les images finales à son point de vue propre. Ainsi l'on n'aurait plus aucun moyen de compensation pour détruire ou seulement affaiblir les petits défauts que l'inexactitude des approximations, ou l'imperfection du travail pratique, auraient pu laisser subsister dans le système total.

Voilà probablement pourquoi les opticiens ont abandonné instinctivement ce mode de construction des oculaires, et se sont bornés à les former de deux lentilles de même nature, séparées l'une de l'autre par un certain intervalle qu'on peut encore faire varier dans une petite amplitude de course, après avoir satisfait à l'équation (3), dans la supposition des lentilles infiniment minces. Je vais donc m'attacher d'abord à développer les conséquences d'une telle construction, qui est aujourd'hui exclusivement employée dans les instruments d'astronomie.

108. L'objectif devant être supposé sans épaisseur centrale, dans notre calcul préparatoire, il agit comme ferait une lentille unique infiniment mince et achromatique. J'adapterai donc notre notation générale à ces circonstances, en le remplaçant, dans les calculs, par une telle lentille qui serait la première du système total, et pour laquelle l'indice ordinal i serait conséquemment égal à 1. Alors chacune des lentilles de l'oculaire sera désignée par son rang ordinal à partir de la première lentille fictive. Si donc nous le supposons formé de deux lentilles infiniment minces, séparées l'une de l'autre par un intervalle quelconque h_2, les coefficients non contractés dans tel système, transformés en coefficients contractés, auront des expressions pareilles à celles que nous avons déjà employées, page 35, pour les objectifs à deux lentilles, sauf qu'il faudra y faire les épaisseurs centrales nulles, et augmenter tous les indices d'une unité pour les faire partir de la première lentille idéale du système. On aura donc ainsi

$$N'' = 1 + \frac{h_2}{f_3}; \qquad P'' = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \frac{h_2}{f_2 f_3};$$

$$Q'' = h_2; \qquad R'' = 1 + \frac{h_2}{f_2};$$

ce qui en effet remplit la condition générale

$$N''R'' - P''Q'' = 1.$$

Comme le grossissement angulaire N du système total est un élément que nous conserverons indéterminé, il sera utile de former son expression explicite, qui, étant réduite par les limitations que

nous avons admises, est

$$N = N'' + P''h_1;$$

ou, en substituant pour N″ et P″ leurs valeurs précédentes,

$$N = 1 + \frac{h_1}{f_2} + \frac{(h_1 + h_2)}{f_3} + \frac{h_1 h_2}{f_2 f_3}.$$

On aurait pu la conclure ainsi directement de nos formules générales contractées, en les appliquant à un système composé de trois lentilles infiniment minces, séparées par les intervalles consécutifs h_1, h_2, comme nous l'avons fait dans l'exemple de la page 19.

109. Il faut maintenant appliquer la caractéristique δ à cette expression pour former l'équation (3), ou $\delta N = 0$; et, en le faisant, il faut attribuer à chaque lentille l'indice de réfraction, comme de dispersion, propre à la matière dont elle est faite. Ceci introduirait donc dans les calculs une nouvelle indéterminée qui serait l'inégalité du pouvoir dispersif des deux lentilles. De telles combinaisons n'étant point usitées jusqu'ici, je ne les considérerai pas; mais on verra facilement la marche qu'il faudrait donner au calcul pour les réaliser, quand j'aurai développé le cas usuel où les deux lentilles sont de même nature.

Cela ayant lieu, tous les termes de δN prennent un facteur commun qui est $\frac{\delta n_i}{n_i - 1}$. Comme il ne peut être nul, puisque tous les verres possibles sont dispersifs, il faut, pour rendre δN nul, égaler à zéro la somme des termes qui le multiplient. La condition à remplir est alors

$$(3) \qquad 0 = \frac{h_1}{f_2} + \frac{(h_1 + h_2)}{f_3} + \frac{2h_1 h_2}{f_2 f_3};$$

les intervalles h_1, h_2 doivent, par leur essence, être toujours employées avec des valeurs positives. L'équation précédente ne pourrait donc pas être satisfaite si l'on prenait les distances focales f_2, f_3 toutes deux positives, c'est-à-dire si les deux lentilles de l'oculaire étaient divergentes; mais elle peut l'être si f_2 et f_3 sont négatives toutes deux, ou si l'une est positive, l'autre négative, c'est-à-dire si les lentilles de l'oculaire sont convergentes toutes deux, ou si l'une des

deux est convergente, l'autre divergente. Ceci, étant combiné avec l'expression précédente de N, donne

$$(3)' \qquad \frac{h_1 h_2}{f_2 f_3} = 1 - N.$$

Or la condition de continuité du système, établie page 133, exige que l'on fasse

$$(4) \qquad P'' = -\frac{N}{\Delta'};$$

ou, en mettant pour P'' son expression explicite,

$$(4) \qquad \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \frac{h_2}{f_2 f_3} = -\frac{N}{\Delta'};$$

chassant de celle-ci $\frac{h_2}{f_2 f_3}$ par sa valeur $\frac{1-N}{h_1}$, il vient

$$\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \frac{1-N}{h_1} = -\frac{N}{\Delta'}.$$

Comme nous savons que le problème comporte une indétermination, j'introduis dans le calcul une quantité auxiliaire ω, telle qu'on ait

$$(5) \qquad \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} = -\frac{(2N+\omega)}{\Delta'}.$$

Ceci étant substitué dans l'équation précédente, il en résulte

$$h_1 = -\frac{(N-1)}{N+\omega}\Delta';$$

ou, ce qui est la même chose,

$$h_1 = -\Delta' + \frac{(\omega+1)}{N+\omega}\Delta'.$$

$-\Delta'$ est la distance comprise sur l'axe central depuis l'objectif jusqu'à son foyer actuel pour la distance Δ, foyer qui doit lui être postérieur. Le terme qui complète h_1 exprime donc la distance actuelle du premier verre de l'oculaire à ce foyer; de sorte qu'en donnant à l'indéterminée ω des valeurs et des signes convenables,

ression de h_1 se trouve immédiatement préparée pour toutes pèces d'oculaires possibles, tant positifs que négatifs, com- de deux lentilles de même nature.

0. Il faut maintenant obtenir les éléments propres de l'oculaire, à-dire f_2, f_3, et h_2, en fonction de la même indéterminée ω grossissement angulaire N. Pour cela, je mets d'abord l'é- on (3) sous cette forme

$$0 = h_1 \left(\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3}\right) + \left(2 + \frac{f_2}{h_1}\right) \frac{h_1 h_2}{f_2 f_3}.$$

elle se trouve parfaitement disposée pour l'élimination. Car teur $\frac{h_1 h_2}{f_2 f_3}$ peut y être immédiatement remplacé par sa valeur N; et le terme qui contient seulement h_1 peut être aisément mé en fonction de ω et de N, puisque les transformations dentes donnent

$$h_1 \left(\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3}\right) = + \frac{(N-1)(2N+\omega)}{N+\omega}.$$

eut donc tirer de là $\frac{f_2}{h_1}$, puis f_2 seul, en mettant pour h_1 sa r. On trouve ainsi d'abord

$$= - \frac{\omega}{(N+\omega)} h_1; \qquad \text{et ensuite} \qquad f_2 = + \frac{(N-1)\omega}{(N+\omega)^2} \Delta'.$$

nt connu, l'équation (5) donne f_3, et il vient

$$f_3 = - \frac{(N-1)\omega}{N[(2\omega+1)N+\omega^2]} \Delta'.$$

, en substituant ces divers résultats dans $\frac{h_1 h_2}{f_2 f_3}$ qui est égal à N, on en tire h_2, et l'on a ainsi

$$h_2 = - \frac{(N-1)^2 \omega^2}{N(N+\omega)[(2\omega+1)N+\omega^2]} \Delta'.$$

achever de préparer les éléments qui nous deviendront

nécessaires, je forme tout de suite les coefficients Q_2 et Q_3, ou Q de l'instrument total, par leurs expressions explicites pour des lentilles infiniment minces, lesquelles sont

$$Q_2 = h_1, \qquad Q_3 = h_1 + h_2 + \frac{h_1 h_2}{f_2};$$

et, en mettant dans les seconds membres les expressions transformées que nous venons d'obtenir, on trouve

$$Q_2 = -\frac{(N-1)}{(N+\omega)}\Delta', \qquad Q_3 = -\frac{(N-1)(\omega+1)}{[(2\omega+1)N+\omega^2]}\Delta';$$

de là on tire la distance H du point oculaire moyen au devant de la dernière surface de l'instrument, laquelle est ici

$$H = \frac{Q_3}{N}.$$

On en déduit encore les coordonnées efficaces λ_2, λ_3, du rayon à incidence centrale qui borde le champ apparent en formant l'angle ${}_cX$ avec l'axe central du système, puisqu'on a, pour un tel rayon,

$$\lambda_2 = Q_2 \sin {}_cX, \qquad \lambda_3 = Q_3 \sin {}_cX;$$

on obtient aussi ce qu'Euler appelle les *raisons des ouvertures*, correspondantes à ces ordonnées, puisque, en les désignant par π_2, π_3, leur expression est

$$\pi_2 = \frac{\lambda_2}{f_2}, \qquad \pi_3 = \frac{\lambda_3}{f_3};$$

de sorte qu'il ne reste que de simples substitutions à effectuer.

Enfin, si l'on veut connaître la distance focale principale f'' d'une lentille idéale infiniment mince qui serait *équivalente* à l'oculaire complexe, construit avec les éléments qui précèdent, on aura, d'après la page 513 du Ier volume, en faisant $u_m = 1$,

$$f'' = \frac{1}{P''};$$

conséquemment,

$$\frac{1}{f''} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \frac{h_2}{f_2 f_3}; \quad \text{d'où} \quad f'' = -\frac{\Delta'}{N}.$$

Tableau des éléments pr[illegible] un œil infiniment presby[illegible] focale donnée, il rass[illegible] dirigée au point oculaire du [illegible]

Soit F′ la distance focale [illegible]mpris dans l'amplitude conique [illegible]tance focale actuelle Δ′ par la for[illegible]

Alors, en nommant N le gr[illegible]sitif ou négatif, les éléments co[illegible]

Distance de l'objectif à la [illegible]

Distance focale principale [illegible]

Intervalle central entre la [illegible] Δ′; [illegible]

Distance focale principale [illegible]

Distance du point oculaire [illegible]

Ordonnées efficaces du ray[illegible] pour demi-amplitude [illegible]X [illegible]

Sur la 2e lentille oculaire. [illegible]

Raisons des ouvertures, co[illegible]

Pour la 2e lentille oculaire [illegible]

Distance focale principale [illegible] l'oculaire complexe....

La seule condition à l[illegible] deux positifs, Δ′ étant do[illegible]

Tous les éléments de l'o[illegible] bilité. Si l'on forme la so[illegible] d'après la page 30, puisqu[illegible] qui est encore une conséq[illegible] centre de figure de la pren[illegible] résultats. Si l'on fait les [illegible] respectivement $(n_2-1)f_2$, [illegible] qui bordent le champ, soi[illegible] moitié. Ainsi leur étend[illegible] dont les lentilles sont fai[illegible]

111. Pour faire bien saisir l'ensemble de ces résultats, je les ai réunis dans le tableau placé en regard de cette page. On y voit ainsi, d'un seul coup d'œil, tous les éléments préparatoires d'un oculaire achromatique quelconque, composé de deux lentilles de même nature, et susceptible d'être appliqué à tous les systèmes d'objectifs achromatiques de peu d'épaisseur, dont la distance focale actuelle est postérieure à leurs surfaces; ce qui comprend les lunettes, les télescopes à réflexion, et les microscopes composés.

112. Nous avons remarqué, page 29, que pour pouvoir admettre les rayons lumineux dans les lentilles oculaires, avec des incidences aussi grandes que celles qu'on leur permet, il faut que chaque pinceau qui arrive à leurs surfaces n'en couvre jamais qu'une très-petite portion. Ceci, appliqué à la première des deux lentilles, exige évidemment qu'elle soit très-proche du foyer propre formé par l'objectif, soit qu'on la place avant ou après ce foyer; et comme la distance $h_1 + \Delta'$, qui l'en sépare, se trouve ici proportionnelle à $1 + \omega$, on voit que cette quantité devra toujours être fort petite, ce qui nécessite la petitesse de l'indéterminée ω elle-même. Cette limitation aura pour effet de restreindre la distance H, du point oculaire à la surface d'émergence, puisqu'elle est pareillement proportionnelle à $1 + \omega$; et c'est là encore une circonstance que nous désirions d'établir.

Or nos formules donnent entre H et h_2 la relation suivante :

$$H = \frac{(1 + \omega)}{\omega^2} \frac{(N + \omega)}{(N - 1)} h_2.$$

Lorsque l'instrument sera posssible avec les valeurs attribuées à ω, l'intervalle h_2 des deux lentilles oculaires devra en résulter positif. En outre, dans tous les systèmes composés de trois lentilles au moins, le grossissement angulaire N que l'on exige est toujours un nombre positif ou négatif, beaucoup plus grand que ± 1, conséquemment plus grand que ω; et par suite, le rapport $\frac{N + \omega}{N + 1}$ est toujours positif. On voit donc que le signe de $1 + \omega$ détermine celui de H. Ainsi $1 + \omega$ étant positif, le point oculaire sera intérieur, ce qui donnera des appareils divergents; et $1 + \omega$ étant

négatif, le point oculaire sera extérieur, ce qui donnera des appareils convergents.

113. Examinons maintenant la nature positive ou négative des oculaires que ces deux combinaisons pourront produire. Elle dépendra du signe que l'on voudra donner à N; et le caractère des oculaires qui en résulteront s'appréciera aisément par l'inspection de notre tableau.

1°. Soit d'abord N négatif; d'après le § 93, page 122, l'instrument renverse. Alors $N + \omega$ est aussi négatif, à cause de la petitesse de ω relativement à N; et comme Δ' est toujours négatif, puisque l'objectif est nécessairement convergent pour la distance actuelle Δ de l'objet, le rapport $\frac{\Delta'}{N + \omega}$ sera positif.

Dans ce cas, si l'on veut un oculaire *négatif*, c'est-à-dire dont le premier verre soit placé *avant* le foyer propre de l'objectif, il faudra que le terme qui s'ajoute à $-\Delta'$ dans l'expression de h_1 devienne négatif. Or, $\frac{\Delta'}{N + \omega}$ étant positif, on ne pourra le rendre tel qu'en faisant $\omega + 1$ négatif, ce qui exige ω négatif. Maintenant Δ' étant essentiellement négatif, et N beaucoup plus grand que ω, le signe de h_2 est déterminé par celui de $(2\omega + 1)N$. Ce signe se trouvera donc positif, comme cela est nécessaire, puisque $2\omega + 1$ sera négatif de même que ω, étant égal à $\omega + \omega + 1$. Ainsi l'instrument sera toujours possible avec une telle combinaison. Les distances focales f_2, f_3 y seront toutes deux négatives, c'est-à-dire que les deux lentilles de l'oculaire seront convergentes. En outre, H y sera toujours négatif, ce qui rend le point oculaire extérieur. Mais on ne pourra pas placer des fils micrométriques dans l'appareil, à cause du caractère négatif de l'oculaire ainsi constitué, tome Ier, page 518.

Veut-on, au contraire, un oculaire *positif*, c'est-à-dire dont le premier verre soit *postérieur* au foyer propre de l'objectif? $\frac{\Delta'}{N + \omega}$ étant positif, puisque l'instrument renverse, il faudra faire $\omega + 1$ positif. Mais, pour avoir ensuite $(2\omega + 1)N$ positif dans h_2, il faudra faire $2\omega + 1$ ou $\omega + \frac{1}{2}$ négatif. Donc, pour obtenir ce second

genre d'oculaire, avec N négatif, ω devra être toujours compris entre $-\frac{1}{2}$ et -1. Les distances focales f_2, f_3 y seront encore toutes deux négatives, comme dans le cas précédent. Mais la valeur de H y sera toujours positive, ce qui rendra le point oculaire intérieur et d'autant plus proche de la dernière surface que $\omega + 1$ sera plus voisin de zéro. On pourra alors placer des fils micrométriques dans le plan focal du système objectif, puique le premier verre de l'oculaire leur sera toujours postérieur.

2°. Soit maintenant N positif, ce qui donnera des images droites des objets. Alors Δ' étant toujours négatif et $N + \omega$ positif, à cause de la petitesse nécessaire de ω relativement à N, le rapport $\frac{\Delta'}{N + \omega}$ sera négatif.

Dans ce cas, si l'on veut un oculaire négatif, il faudra faire $\omega + 1$ positif, et $2\omega + 1$ aussi positif, afin que h_2 le soit. Cela exige que ω ne soit pas fait moindre que $-\frac{1}{2}$. Avec cette restriction, l'instrument sera toujours possible. Les distances focales f_2, f_3 y seront nécessairement de signe contraire entre elles, c'est-à-dire qu'une des deux lentilles de l'oculaire sera convergente, l'autre divergente. H sera toujours positif, et le point oculaire intérieur d'autant plus distant de la surface d'émergence que $\omega + 1$ sera plus grand.

Veut-on, au contraire, un oculaire positif? Il faudra faire $\omega + 1$ négatif, donc ω négatif. Mais il faudra en outre $2\omega + 1$ positif, pour que h_2 le soit. Cette seconde condition est incompatible avec la première; ainsi l'on ne peut pas construire d'instruments qui donnent des images droites, avec une dispersion rectiligne des foyers, et qui aient un oculaire positif, composé de deux lentilles de même matière.

114. Les relations exprimées dans notre tableau donnent généralement

$$H = \frac{(1 + \omega)}{\omega^2} \frac{(N + \omega)}{(N - 1)} h_2;$$

l'intervalle h_2 des deux lentilles oculaires doit toujours être positif

dans notre notation; en outre, la valeur de N, quel que soit son signe, devant toujours surpasser 1 et ω, le rapport $\frac{N+\omega}{N-1}$ sera toujours positif.

Le signe propre de $1+\omega$ décide donc *toujours* celui de H. Ainsi la valeur $\omega = -1$, qui rend cette quantité nulle, établit la transition des appareils convergents aux appareils divergents; il est par conséquent essentiel d'étudier cette limite. Or, pour ce cas, les formules de notre tableau donnent

$$h_1 = -\Delta'; \quad f_2 = -\frac{\Delta'}{N-1}; \qquad h_2 = +\frac{\Delta'}{N}; \quad f_3 = -\frac{\Delta'}{N};$$

$$H = 0; \qquad \lambda_2 = -\Delta' \sin {}_cX; \qquad \lambda_3 = 0;$$

$$\pi_2 = +(N-1)\sin {}_cX; \qquad \pi_3 = 0.$$

h_2 devant être positif, et Δ' étant toujours négatif, il faut que N soit négatif, c'est-à-dire que l'instrument renverse. Alors les deux lentilles ont leurs distances focales négatives et sont toutes deux convergentes. La *fig.* 12 représente la marche que suivent les axes des pinceaux de réfrangibilité moyenne qui bordent le champ apparent sous l'angle d'incidence $\pm {}_cX$, et la *fig.* 13 montre la marche de deux pinceaux incidents de cette même réfrangibilité, l'un central, l'autre excentrique, émanés de points rayonnants situés au devant de l'objectif à la distance Δ pour laquelle l'instrument est calculé. Dans les deux figures, OO est le diamètre de l'anneau oculaire moyen correspondant à l'ouverture L′L′ donnée à l'objectif.

Cette combinaison place la première lentille A_2 de l'oculaire dans l'image même donnée par l'objectif pour la distance actuelle Δ de l'objet, et elle amène le point oculaire de l'instrument au centre de figure A_3 de la seconde lentille. De sorte que, celle-ci étant supposée infiniment mince, l'œil appliqué contre elle percevrait toute l'étendue $\pm {}_cX$ du champ, même quand la pupille serait réduite à un simple point. Mais la coïncidence du premier verre A_2 dans le foyer actuel du système objectif aurait les inconvénients les plus graves. Car d'abord le moindre défaut d'achromatisme longitudinal de ce système amènerait ses foyers hétérogènes, les uns en deçà, les

ıtres au delà de A_2; et comme A_2 se trouve être le foyer princi-ıl de A_3, puisque h_2 égale $-f_3$, ces petites différences de posi-on produiraient une énorme dispersion des foyers hétérogènes éfinitifs sur la ligne visuelle menée de A_3. En outre, le moindre ıome de poussière qui se trouverait accidentellement amené sur la ntille A_2 y intercepterait toute la lumière du pinceau que la sur-ıce entière de l'objectif aurait fait converger vers ce point. Enfin, n ne pourrait pas insérer de fils micrométriques dans l'appareil, uisqu'il faudrait les placer en A_2 même, où la lentille A_2 les dé-angerait quand on enfoncerait l'oculaire pour l'adapter aux diffé-entes portées de la vision.

115. D'après cela, soit qu'on veuille un oculaire négatif ou po-itif, il ne sera praticable qu'en s'écartant de cette coïncidence; et 'un des avantages des systèmes négatifs, c'est de pouvoir sans in-onvénient s'en écarter beaucoup plus que les autres, parce que es valeurs admissibles pour ω y sont moins limitées.

Un autre avantage de ces mêmes systèmes, c'est qu'en y faisant ' négatif, ce qui exige $\omega + 1$ négatif, les deux quantités π_2, π_3 le notre tableau, qui expriment les rapports des ouvertures des leux lentilles, s'y trouvent de même signe entre elles. Et, comme eur somme $(N-1)\sin_c X$ est fixe pour chaque grandeur donnée lu champ et du grossissement N, cette identité de signe permet de endre leurs valeurs individuelles les moindres possible, en les fai-ant égales entre elles, ce qui affaiblit les effets de leurs aberra-ions de sphéricité propres, comme nous l'avons remarqué déjà ages 27 et 30. En appliquant cette condition d'égalité aux expres-ions générales de π_2 et de π_3 rapportées dans notre tableau, elle exige que l'on fasse

$$(\omega + 1)N = -(N + \omega),$$

d'où l'on tire

$$\omega = -\frac{2N}{N+1}; \qquad \text{et} \qquad 1 + \omega = -\frac{N-1}{N+1}.$$

Lorsque le nombre N est considérable relativement à l'unité, comme cela a lieu dans les instruments astronomiques, cette valeur

de ω se réduit sensiblement à -2. C'est aussi celle que les opticiens lui attribuent habituellement dans ce genre d'oculaire dont le premier emploi est dû à Campani, quoiqu'on l'attribue pour l'ordinaire à Huygens. Nous la retrouverons tout à l'heure quand nous spécialiserons nos formules générales pour le cas où N doit être un grand nombre.

116. Mais, sans devancer cette supposition, et afin de montrer seulement la marche des rayons lumineux dans ce genre d'oculaire, quand il est construit de la manière la plus favorable, je vais déterminer tous ses éléments pour la valeur spéciale de ω que nous venons d'obtenir, et qui donne le maximum d'étendue du champ apparent. Il ne faut pour cela que substituer cette expression de ω dans les formules de notre tableau; et il en résulte d'abord

$$h_1 = -\Delta' - \frac{1}{N}\Delta';$$

on a ensuite pour les éléments propres de l'oculaire

$$f_2 = -\frac{2(N+1)}{N(N-1)}\Delta'; \quad h_2 = +\frac{4(N+1)}{N(3N+1)}\Delta'; \quad f_3 = -\frac{2(N+1)}{N(3N+1)}\Delta';$$

et pour les ordonnées qui bordent le champ $\pm_c X$,

$$\lambda_2 = -\frac{(N+1)}{N}\Delta' \sin_c X; \qquad \lambda_3 = -\frac{(N-1)(N+1)}{N(3N+1)}\Delta' \sin_c X.$$

Enfin on trouve

$$H = -\frac{(N^2-1)}{N^2(3N+1)}\Delta'.$$

Δ' étant toujours négatif, h_2 ne peut être positif que si N est négatif. Cette combinaison n'est donc réalisable que pour les instruments qui renversent. La valeur de H y sera toujours négative, comme $1+\omega$. Ainsi le point oculaire de l'instrument total sera ultérieur à sa dernière lentille, conséquemment lui sera extérieur.

N et Δ' étant négatifs, le terme associé à $-\Delta'$ dans l'expres-

sion de h' se trouve négatif. La première lentille A_2 de l'oculaire est donc *antérieure* au foyer actuel de l'objectif, comme le représente la *fig.* 14 construite pour le cas de $N = -6$. Ainsi l'image focale $\Sigma_1 S_1$, immédiatement produite par l'objectif, ne se forme pas réellement. L'oculaire obtenu est du genre négatif, et ne comporte pas de réticule filaire. Comme on suppose les épaisseurs centrales insensibles, le foyer combiné de l'objectif et de la lentille A_2 devra tomber en Δ_2 au foyer réciproque de A_3, puisque l'instrument est préparé pour que les pinceaux incidents sortent sous forme de faisceaux à rayons parallèles. C'est, en effet, ce que ces expressions indiquent : car, négligeant l'épaisseur centrale de la lentille A_2, il n'y a qu'à considérer le foyer virtuel Δ_1 de l'objectif comme un point rayonnant idéal, *analytiquement antérieur* à A_2 de $-\frac{\Delta'}{N}$; alors la distance focale composée $A_2\Delta_2$ ou Δ_2 se trouvera par la formule

$$\frac{1}{\Delta_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{N}{\Delta'}, \quad \text{ce qui donne} \quad \Delta_2 = -\frac{2(N+1)}{N(3N+1)}\Delta' = -\frac{1}{2}h_2.$$

Le signe négatif de cette valeur montre que le foyer composé Δ_2 sera postérieur à la première lentille A_2 de l'oculaire, et tombera au milieu de l'intervalle h_2. Maintenant, dans notre notation uniforme, sa distance en avant de A_3 sera *analytiquement*, $h_2 + \Delta_2$, c'est-à-dire $+\frac{1}{2}h_2$ ou $+\frac{2(N+1)}{N(3N+1)}\Delta'$; ce qui se trouve en effet égal à la distance focale f_3, prise négativement.

147. Il faut maintenant se donner l'angle ${}_cX$ formé avec l'axe de l'appareil par les rayons lumineux à incidence centrale $\Sigma A_1 I_2$, $SA_2 I_2$, qui doivent borner le champ apparent. Cet angle peut être défini par sa valeur angulaire $\pm {}_cX$, ou par l'ordonnée efficace $A_2 I_2 = \lambda_2$ que l'on veut en faire résulter. Ici, pour rendre la figure suffisamment distincte, on a dû lui attribuer une valeur qui serait exagérée dans l'application; et, par le même motif, on a porté l'ouverture totale $L_2 L_2$ jusqu'à 45^{mm}; ce qui, d'après les règles adoptées dans la pratique pour les lentilles planes con-

vexes, suppose le rayon de courbure antérieur r_2 négatif, et de cette même longueur, comme on l'a figuré par la ponctuation. On s'est donné en outre h_2 égal à 50^{mm}, ce qui, avec $N = -6$, suppose $\Delta' = -255^{mm}$, et $f_2 = \frac{5}{21}\Delta'$. Or, négligeant ici les épaisseurs centrales des lentilles, la distance focale f_2 est donnée par la formule générale de la page 131, qui, en faisant $i = 2$, devient (*)

$$\frac{1}{f_2} = (n_2 - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r'_2}\right).$$

Mais, comme la seconde surface de A_2 est plane, r'_2 est infini, et il reste

$$\frac{1}{f_2} = \frac{n_2 - 1}{r_2}, \qquad \text{d'où} \qquad n_2 - 1 = \frac{r_2}{f_2}.$$

Pour que la construction soit possible avec les valeurs $\Delta' = -255^{mm}$ et $r_2 = -45^{mm}$ que nous avons adoptées, en leur associant celle de f_2, qui doit être $\frac{5}{21}\Delta'$, par la constitution de l'oculaire, il faut qu'on ait

$$n_2 - 1 = +\frac{21.45}{5.255} = 0,741176; \text{ conséquemment } n_2 = 1,741176.$$

Ainsi la figure ne peut subsister avec ses dimensions qu'en attribuant aux lentilles de l'oculaire un indice de réfraction aussi considérable. On l'a donc admis idéalement pour la tracer. Alors on a dû faire le diamètre d'ouverture L_3L_3, conséquemment le

(*) Je profite de cette occasion pour corriger une faute typographique dans la formule de la page 131, qui exprime la distance focale principale f_i d'une lentille supposée sans épaisseur centrale, dont le rang est i. Selon notre notation générale, le rayon de courbure antérieur doit être désigné par r_i, et le postérieur par r'_i ; on a inexactement remplacé cette dernière expression par r'_1, ce qui n'offre aucun sens.

rayon r_3 dans la proportion des distances focales f_3, f_2, qui est $\frac{N-1}{3N+1}$ ou $\frac{7}{17}$; on a donc pris r_3 égal aux $\frac{7}{17}$ de -45^{mm}, c'est-à-dire à $-18^{mm}\frac{9}{17}$. Je n'entre dans ces détails que pour faire sentir comment ces éléments sont liés à l'indice de réfraction n_2 qui est propre à la matière dont les deux lentilles de l'oculaire sont confectionnées.

118. Le rayon à incidence centrale A_1I_2 qui doit borner le champ apparent étant ainsi donné par son ordonnée d'incidence A_2I_2 ou $+\lambda_2$ sur la première lentille, on en déduit aussitôt son ordonnée d'incidence λ_3 sur la seconde, laquelle, d'après nos formules, doit être $+\frac{(N-1)}{3N+1}\lambda_2$, conséquemment égale à $\frac{7}{17}\lambda_2$ et de même signe que λ_2. Cela donne donc le point I_3 qui, à cause de l'identité du signe, doit être pris du même côté de l'axe que I_2; et ainsi la route I_2I_3 du rayon entre les deux lentilles se trouve définie. Maintenant, du point I_3, il se rend après son émergence au point oculaire H, qui est donné de position et ultérieur à la dernière lentille. On a donc sa direction finale I_3HA_3 qui forme avec l'axe central l'angle ${}_cX_3$ ou N_cX, lequel devient ici $-6\,{}_cX$ d'après les données que nous avons adoptées. Cet angle est donc placé autour de l'axe en sens contraire de ${}_cX$ dont il dérive, comme en effet la figure le montre.

119. Le rayon central A_1I_2, que nous venons de considérer, est censé parti du point lumineux Σ situé en avant de l'objectif, à la distance Δ, d'où résulte la distance focale actuelle Δ'. Si l'on conçoit un second point rayonnant S qui ait ce même Δ, et dont l'ordonnée AS soit égale à $-A\Sigma$, il engendrera un rayon central SA_1, dont la marche sera symétrique à ΣA_1, en sorte que ses inflexions correspondantes autour de l'axe s'opéreront toujours sous les mêmes inclinaisons.

Considérons la droite $S\Sigma$ tout entière comme une flèche lumineuse comprise dans les limites antérieures d'admissibilité pour l'ouverture totale L_1L_1, attribuée à l'objectif. Si celui-ci existait seul,

il donnerait par réfraction une image $\Sigma_1 S_1$ de cette flèche, laquelle se formerait réellement derrière lui, à la distance $+ \Delta'$ en position renversée, comme la figure le montre. Mais les rayons lumineux étant interceptés par la lentille A_2, avant d'arriver à la distance Δ_1, cette première image ne se forme pas en réalité, et elle est remplacée par une autre de même sens, qui se produit au delà de la seconde lentille à la distance Δ_2 que nous avons calculée. Les limites de celle-ci sont données par la construction même, en tant qu'elle dérive de l'objet $S\Sigma$. Car, pour le point Σ par exemple, son foyer combiné Σ_2 sera au point d'intersection du rayon réfracté central $I_2 I_3$ et de l'ordonnée menée par Δ_2. Or ce foyer Σ_2, étant connu, détermine la marche du pinceau total $I_2 \Sigma_2 I_3$ émané de Σ et composé de la même espèce de rayons. En effet, ce pinceau étant supposé complétement admissible, tous les rayons qui le composent, après avoir traversé l'objectif, se dirigeront d'abord vers le foyer virtuel Σ_1, ce qui détermine leurs points respectifs d'incidence sur la lentille A_2. Mais, en partant de ces points, ils doivent se diriger au foyer réel Σ_2, ce qui donne leurs points respectifs d'incidence sur la lentille A_3; et, comme de là ils doivent sortir tous parallèles au rayon central, leur direction d'émergence est ainsi donnée. Cette direction finale peut encore être obtenue d'une autre manière qui la confirme matériellement. Car si l'on considère, par exemple, les deux rayons incidents extrêmes ΣL_1, qui ont traversé l'objectif par ses bords efficaces, à la distance $\pm \Lambda_1$ de l'axe central, il n'y a qu'à construire en H, autour de l'axe central, l'anneau OO, ayant pour demi-diamètre $\frac{\Lambda_1}{N}$, qui sera ici $- \frac{AL_1}{6}$; et les rayons émergents dérivés de ces rayons extrêmes devront passer ainsi par les bords de l'anneau, comme on voit que cela a réellement lieu.

120. Le foyer réel Σ_2 dérive du pinceau idéal qui aurait pour sommet Σ_1. Si le point Σ_1 était tel que sa radiation fût admissible jusqu'au centre de figure de la lentille A_2, son foyer devrait se former sur la direction du rayon central $\Sigma_1 A_2$, prolongée en ligne droite, puisque la lentille A_2 est supposée infiniment mince. Cette coïncidence se réalise en effet, dans notre construction, assez approximativement pour que l'erreur soit inappréciable avec les dimen-

ions suivant lesquelles la figure est tracée; et le même résultat s'observe dans les mêmes limites, si l'on considère le foyer réel Σ_2 comme pouvant émettre une radiation admissible jusqu'au centre de la lentille A_3.

Mais cette extension d'admissibilité n'est que fictive. Car, d'après la construction même, comme d'après la théorie, chaque pinceau transmis par l'objectif ne parvient jamais aux lentilles oculaires, et ne les traverse qu'avec une épaisseur très-réduite, qui amène toujours tous ses rayons sur des points très-voisins de leurs surfaces; de sorte que la dilatation de leur point focal définitif est due seulement aux petites *différences* des aberrations de sphéricité qu'ils éprouvent, et non pas à la valeur *absolue* de cette aberration telle qu'elle s'exercerait sur des pinceaux qui couvriraient toute la surface de chaque lentille (1). Cette valeur absolue influe donc seulement sur les distances relatives où les foyers des pinceaux d'incidence diverses vont également se former. Elle se manifeste en ce que l'image des objets plans terminés par des bords rectilignes n'est pas parfaitement plane ni terminée par des lignes exactement droites, à moins que des combinaisons favorables de courbures ne lui ôtent ces mouvements. C'est à quoi l'on s'efforce de parvenir par l'emploi des formes que l'expérience a fait connaître comme les plus avantageuses, et enfin en limitant, dans chaque cas, l'ouverture du champ que l'in-

(1) On obtient un avantage analogue pour la dispersion, dans les objectifs achromatiques à deux lentilles, en donnant aux surfaces intérieures du crown et du flint des courbures presque égales, et les mettant presque en contact, comme le faisait Fraunhoffer, et comme nous avons vu que la théorie l'indiquait. Car chaque pinceau dispersé, qui sort de la surface postérieure du crown, s'épanouit d'autant plus avant de rencontrer l'antérieure du flint que celle-ci est plus distante; et plus il s'est ouvert, plus il y a d'inégalité entre les réfractions prismatiques que ses éléments subissent à travers le flint, d'où résultent des inégalités du même ordre entre les aberrations de sphéricité qui les affectent. Par ce motif, la méthode qu'on a proposée, d'opérer la compensation des objectifs par de petites lentilles de flint placées loin du crown, est essentiellement défectueuse; et les effets en deviendraient sans doute intolérables, dans des objectifs de grande dimension auxquels on appliquerait de forts grossissements, ce qui est le seul cas d'application scientifique qui mérite aujourd'hui d'être considéré.

strument embrasse, autant qu'il le faut pour que ses effets ne soient pas trop sensiblement défectueux quand on observe par les bords de l'objectif. Alors, s'il est bien construit, il doit se trouver beaucoup plus parfait suivant l'axe, ce qui est surtout essentiel pour les observations astronomiques, dont les plus délicates s'appliquent à des objets d'un très-petit diamètre angulaire que l'on peut toujours amener sur cette direction.

121. Dans le genre d'oculaire que je viens de décrire, et en général dans tous les oculaires négatifs, on insère un diaphragme entre les deux verres dans le point de l'axe où l'image réelle $\Sigma_2 S_2$ se forme, conséquemment ici, au milieu de l'intervalle $A_2 A_3$; et l'on restreint ainsi cette image aux limites d'amplitude dans lesquelles l'instrument conserve une suffisante netteté.

En effet, l'ordonnée focale $A_2 \Sigma_2$, où l'image se limite, est évidemment égale à $\frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3)$, ce qui donne pour son expression générale

$$-\frac{2(N+1)}{(3N+1)}\Delta' \sin {}_cX.$$

Alors, N et Δ' étant assignés, si l'on attribue à l'angle ${}_cX$ une certaine valeur limite, le demi-diamètre de l'image sera défini par cette expression, et ce sera le même qu'on devra donner au diaphragme. Réciproquement, celui-ci étant donné, ${}_cX$ en résulte. C'est ce qui se pratique habituellement. Quand l'artiste a fixé le plan de son diaphragme au milieu de l'intervalle $A_1 A_2$, il y perce une ouverture centrale, d'abord très-petite, qu'il agrandit par degrés, jusqu'à la limite à laquelle la vision cesserait d'être parfaitement nette sur les bords du champ. C'est l'ouverture donnée à ce diaphragme qui limite l'étendue du champ apparent, tous les pinceaux dont le foyer intérieur s'écarte davantage de l'axe étant interceptés par son opacité.

122. Un avantage considérable de la construction précédente, c'est que les proportions d'ouverture efficace π_2 et π_3 des deux lentilles qui composent l'oculaire peuvent être rendues égales entre elles et de même signe, ce qui donne des incidences moindres pour une étendue égale du champ apparent. Cette égalité ne peut plus

être établie dans les oculaires positifs, dont la première lentille A_2 est postérieure à l'image objective, parce que $\omega + 1$ devant être alors positif et N négatif, π_2 et π_3 sont essentiellement de signe contraire entre elles, puisque l'expression générale de leur rapport est $-\frac{(N+\omega)}{N(\omega+1)}$. On ne peut pas même, dans ce cas, rendre leurs valeurs égales sous leurs signes propres, ce qui produirait le plus grand affaiblissement qu'on pût leur donner, comme nous l'avons remarqué, page 30. Car cela donnerait pour condition

$$(\omega + 1) N = N + \omega;$$

conséquemment,

$$(N - 1) \omega = 0;$$

à quoi l'on ne pourrait satisfaire qu'en prenant ω nul, ce qui rendrait nuls f_2, f_3, ainsi que h_2, combinaison qui ne serait pas exécutable.

123. Nous avons trouvé tout à l'heure, page 145, que, pour ce genre d'oculaire, ω doit être compris entre -1 et $-\frac{1}{2}$. La limite -1 n'est pas admissible pratiquement, parce qu'elle mettrait la première lentille A_2 dans le foyer même du système objectif, comme nous l'avons reconnu, page 146. Il faut donc prendre généralement $\omega = -1 + u^2$, u^2 étant une quantité essentiellement positive qui ne doit pas excéder $\frac{1}{2}$.

Pour donner un exemple *numérique* de ce genre d'oculaire, j'ai construit la *fig.* 15, en faisant $u^2 = \frac{1}{4}$. C'est-à-dire que j'ai pris

$$\omega = -\tfrac{3}{4}, \qquad \Delta' = -180^{\text{min}}, \qquad N = -4.$$

De là on tire par nos formules générales

$$\frac{(\omega+1)}{N+\omega}.\Delta' = -\frac{\Delta'}{19}, \qquad h_1 = -\Delta' - \frac{\Delta'}{19};$$

$$f_2 = +\frac{60}{361}.\Delta', \quad h_2 = -\frac{225}{779}.\Delta', \quad f_3 = +\frac{15}{41}.\Delta',$$

$$H = -\frac{5}{41}.\Delta', \quad \lambda_2 = -\frac{20}{19}.\Delta' \sin_c X, \quad \lambda_3 = +\frac{20}{41}.\Delta' \sin_c X.$$

Ici, la valeur de $\frac{(\omega+1)}{N+\omega}.\Delta'$ étant positive, place la première len-

tille A_2 de l'oculaire à $9^{mm} + \frac{8}{19}$ *au delà* du foyer actuel de l'objectif, comme on le désirait; de sorte que l'image $\Sigma_2 S_2$ se forme réellement. La valeur de h_2 place la seconde lentille A_3 à $51^{mm} + \frac{771}{779}$ au delà de A_2. Le foyer combiné de A_2 et de A_3 tombe en Δ_2, en avant de la première lentille oculaire, à une distance de $13^{mm} + \frac{673}{779}$; de sorte que la seconde image $\Sigma_2 S_2$ est virtuelle, et antérieure à la première réelle $\Sigma_1 S_1$. Elle se trouve ainsi dans le foyer réciproque de A_3, comme cela est nécessaire pour que les pinceaux émergents qui en dérivent sortent de l'instrument sous la forme de faisceaux composés de rayons parallèles entre eux. Les deux verres de l'oculaire se font ici encore plans convexes, mais on oppose intérieurement leurs convexités l'une à l'autre, comme le représente la figure, au lieu que, dans les oculaires négatifs, on tourne les deux faces planes vers l'œil. Pour que la marche des pinceaux pût être sensible dans cette construction, il a fallu attribuer aux lentilles des ouvertures plus exagérées encore que dans le cas précédent, et qui supposeraient par conséquent un indice de réfraction plus considérable pour conserver leur rapport habituel d'égalité avec les rayons de courbure, comme on les a figurées. Cet indice devrait être ici 2,872. On n'en connaît pas d'aussi fort, dans les substances jusqu'à présent observées. Mais cela est indifférent ici, où nous avons simplement pour but de donner un exemple de construction graphique, faite dans les proportions exactes indiquées par le calcul.

124. La marche du rayon central ΣA_1 ou SA_1, qui borne le champ apparent, se calcule et s'obtient comme dans l'autre oculaire, d'après la valeur que l'on attribue à l'angle $_cX$, ou à l'ordonnée λ_2, d'où l'on conclut ensuite λ_3. Mais l'opposition de signe de ces quantités montre que ce rayon coupe ici les deux lentilles des deux côtés opposés de l'axe central; ce qui rend le point oculaire H intérieur et virtuel, au lieu qu'il était extérieur et réel dans la précédente construction. La marche des rayons qui composent un même pinceau incident homogène se détermine d'ailleurs de la même manière, d'après leur point d'incidence sur la première lentille, et la condition de passer ensuite dans les

même foyers Σ_1, Σ_2, soit réellement, soit virtuellement par le prolongement rétrograde de leurs directions. Leur direction finale l'émergence se trouve également définie par la condition de leur parallélisme avec le rayon central, ou encore par la condition de couper le plan oculaire à une distance de l'axe central égale à $\frac{\pm A_1}{N}$, $\pm A_1$ étant leur ordonnée antérieure d'incidence sur l'objectif. L'identité de ces résultats se voit matériellement confirmée dans la figure pour les rayons extrêmes SL_1, qui ont fait leur incidence sur ses bords.

On reconnaît ici encore l'amincissement que chaque pinceau éprouve avant d'arriver aux lentilles de l'oculaire, et en les traversant; ce qui atténue l'influence des aberrations de sphéricité sur la formation de leurs foyers individuels. Mais cette influence s'exerce diversement sur les pinceaux qui rencontrent les lentilles à différentes distances de l'axe central, ce qui éloigne inégalement les foyers définitifs, et produit des distorsions sur les contours des images, principalement vers les bords du champ. On atténue ces inconvénients autant que possible en restreignant suffisamment les ouvertures efficaces des verres, comme aussi en disposant leurs courbures de la manière que l'expérience indique comme la plus avantageuse. Ici, lorsqu'on les fait plans convexes, elle apprend qu'il convient d'opposer mutuellement leurs courbures comme je l'ai figuré. N'y ayant pas d'image réelle entre les verres, on n'y insère pas de diaphragme intérieur; mais on en place un en avant au point Δ_1 où l'objectif forme l'image réelle antérieure $S_1 \Sigma_1$. Le demi-diamètre de cette image ayant pour expression $\pm \Delta' \sin {}_cX$, la grandeur attribuée à ${}_cX$ détermine l'ouverture correspondante du diaphragme; et réciproquement, cette ouverture étant choisie, détermine ${}_cX$, ce que l'on fait par l'expérience comme dans les oculaires négatifs. Mais ici l'opposition de signe des quantités π_2, π_3, et leur inégalité inévitable, oblige de restreindre l'angle ${}_cX$ beaucoup plus que dans l'oculaire négatif, pour avoir une égale netteté de perception.

125. Dans les applications astronomiques de ce genre d'oculaire, ainsi que du précédent, le grossissement angulaire N que l'on se

propose d'obtenir est habituellement beaucoup plus considérable que nous ne l'avons ici supposé pour nos constructions. Et l'on prend en outre l'indéterminée ω aussi petite qu'on le peut, sans inconvénient pratique, afin que le point oculaire, qu'il soit extérieur ou intérieur, se trouve toujours très-rapproché de la surface d'émergence A_3. Pour approprier nos formules à ces conditions, je les limiterai en supposant que le nombre N soit très-grand comparativement à l'unité ainsi qu'à ω; et, en bornant l'évaluation de chaque quantité à sa portion la plus sensible, j'obtiens les résultats suivants :

Distance de l'objectif à la 1re lentille oculaire ... $h_1 = -\Delta' + (\omega+1)\frac{\Delta'}{N}$;

Distance focale principale de cette 1re lentille... $f_1 = +\omega\frac{\Delta'}{N}$;

Intervalle central entre la 1re lentille oculaire et la 2e $h_2 = -\frac{\omega^2}{(2\omega+1)}\frac{\Delta'}{N}$;

Distance focale principale de la 2e lentille oculaire $f_2 = -\frac{\omega}{(2\omega+1)}\frac{\Delta'}{N}$;

Distance du point oculaire de réfrangibilité moyenne, en avant de la 2e lentille oculaire... $H = -\frac{(\omega+1)}{(2\omega+1)}\frac{\Delta'}{N}$;

Ordonnées efficaces du rayon à incidence centrale qui borde le champ apparent, ayant pour demi-amplitude $_cX$ sur la 1re lentille oculaire..... $\lambda_1 = -\Delta' \sin {}_cX$;

Sur la 2e lentille oculaire..... $\lambda_2 = -\frac{(\omega+1)}{(2\omega+1)}\Delta' \sin {}_cX$;

Raisons des ouvertures correspondantes à ces ordonnées : pour la 1re lentille oculaire..... $\pi_1 = -\frac{N}{\omega}\sin {}_cX$;

Pour la 2e lentille oculaire..... $\pi_2 = +\frac{(\omega+1)N}{\omega}\sin {}_cX$.

126. Je particularise maintenant ces formules à l'oculaire négatif de Campani, en faisant $\omega = -2$ pour obtenir les conditions les plus favorables de l'amplitude du champ, et aussi aux oculaires positifs en faisant $\omega = -1 + u^2$, u^2 étant une quantité positive égale, *au plus*, à $\frac{1}{2}$. J'obtiens ainsi les résultats exprimés dans le tableau que je place en regard de cette page; leur seul aspect comparé montre les effets relatifs de ces deux sortes de construction.

	Oculaires composés de deux lentilles de même matière, opérant la dispersion rectiligne des foyers par leur combinaison avec un système objectif achromatique dont la distance focale propre et actuelle est Δ'.	
	Oculaire négatif de Campani, donnant les conditions les plus favorables pour l'amplitude du champ. Point oculaire extérieur $\omega = -2$.	Oculaire positif de Ramsden à point oculaire intérieur, dans lequel $\omega = -1 + u^2$, u^2 étant une quantité positive arbitraire, comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$.
l'objectif à la 1re lentille	$h_1 = -\Delta' - \frac{\Delta'}{N}$	$h_1 = -\Delta' + u^2 \frac{\Delta'}{N}$
cale principale de cette 1re	$f_2 = -2\frac{\Delta'}{N}$	$f_2 = -(1-u^2)\frac{\Delta'}{N}$
entral entre la 1re lentille et la 2e.....	$h_2 = +\frac{4}{3}\frac{\Delta'}{N}$	$h_2 = +\frac{(1-u^2)^2}{(1-2u^2)}\frac{\Delta'}{N}$
cale principale de la 2e lenaire	$f_3 = -\frac{2}{3}\frac{\Delta'}{N}$	$f_3 = -\frac{(1-u^2)}{(1-2u^2)}\frac{\Delta'}{N}$
point oculaire de réfrangienne en avant de la 2e lenaire.....	$H = -\frac{1}{3}\frac{\Delta'}{N}$	$H = +\frac{u^2}{(1-2u^2)}\frac{\Delta'}{N}$
efficaces du rayon à inicitrale qui borde le champ 1re lentille oculaire.....	$\lambda_2 = -\Delta' \sin_c X$	$\lambda_2 = -\Delta' \sin_c X$
ntille oculaire.....	$\lambda_3 = -\frac{1}{3}\Delta' \sin_c X$	$\lambda_3 = +\frac{u^2}{1-2u^2}\Delta' \sin_c X$
ouvertures correspondanordonnées pour la 1re lenaire.....	$\pi_2 = +\frac{N}{2}\sin_c X$	$\pi_2 = +\frac{N}{1-u^2}\sin_c X$
lentille oculaire.....	$\pi_3 = +\frac{N}{2}\sin_c X$	$\pi_3 = -\frac{Nu^2}{1-u^2}\sin_c X$

127. Les éléments numériques trouvés ici pour l'oculaire n de Campani sont ceux que les opticiens emploient généralen sa construction, quand ils le préparent pour l'appliquer au jectifs astronomiques ou aux microscopes, dans les cas où l servations auxquelles ils doivent servir ne sont pas de nature. ger des micromètres intérieurs. En construisant leurs valeur limitées, il en résulte la disposition d'images représentée *fi* Elle est tout à fait analogue à celle de la *fig.* 14. Seulemen donnée antérieure d'incidence $A_2 I_2$ du rayon central, ayan expression réduite $-\Delta' \sin {}_c X$, elle doit être faite, dans l struction, sensiblement égale à l'ordonnée $\Delta_1 \Sigma_1$ de l'imag tuelle donnée par l'objectif, pour conserver les conditions proximation qui ont été admises. Et comme elle est triple d ou λ_3, il est aisé de voir que cela conduit le rayon réfrac tral $I_2 I_3$ vers le foyer principal de A_2. Du reste, l'image réell tombe à la moitié de l'intervalle h_2 comprise entre les deux comme dans l'évaluation rigoureuse de la *fig.* 14. La marc rayons à incidence centrale qui bornent le champ apparen aussi des relations focales tout à fait semblables dans les figures. On voit que chaque rayon à incidence centrale coup jours les deux lentilles de l'oculaire du même côté de l'a système, ce qui résulte de l'identité de signe des ordonnée caces λ_2 et λ_3. On y a représenté ces deux lentilles planes co avec leurs faces planes tournées vers l'œil, comme on le pr généralement. Cette disposition, indiquée par Huygens, plus propre que toute autre à affaiblir les aberrations de ricité, en même temps que le caractère plan d'une des face lite l'exécution des deux lentilles, surtout lorsqu'elles doive de très-petites dimensions.

128. On est moins fixé sur la valeur qu'il convient de do la petite quantité u^2 dans l'oculaire positif. D'après les expre rapportées dans notre tableau, on doit faire :

$$f_2 = (1 - 2u^2) f_3, \qquad \text{et} \qquad h_2 = -(1 - u^2) f_3.$$

Il faut donc toujours que la première lentille de cet oculaire distance focale tant soit peu moindre que la seconde ; et leur

valle commun doit aussi être un peu moindre que la distance focale propre de cette dernière. Notre habile opticien, M. Cauchoix, avait reconnu, par l'expérience, la nécessité de ces relations. Il faut donc s'y astreindre dans les constructions, et ne pas faire les deux lentilles d'un foyer exactement égal, comme la plupart des opticiens le pratiquent. Car cette égalité ne serait compatible qu'avec la valeur de u^2 nulle, ce qui mettrait le premier verre dans le foyer même de l'objectif, comme nous l'avons déjà remarqué, et comme l'expression de h_1 le montre. La construction de ces valeurs limitées serait d'ailleurs analogue à celle de la *fig.* 15. Ici chaque rayon à incidence centrale va toujours couper les deux lentilles des deux côtés opposés de l'axe du système. C'est une conséquence de l'opposition de signe qui existe toujours dans ce genre d'oculaire entre les ordonnées efficaces λ_2 et λ_3. On fait les deux lentilles plan convexes, comme dans l'oculaire de Campani; mais les faces planes sont toutes deux tournées extérieurement. C'est une prescription qui vient de Ramsden, comme l'invention de cet oculaire même; et l'expérience l'a fait reconnaître comme la plus favorable pour y affaiblir les aberrations de sphéricité.

129. Au moyen des formules précédentes, lorsqu'on aura assigné le grossissement angulaire N que l'on veut faire produire à un objectif achromatique dont la distance focale actuelle est Δ' pour les objets auxquels on l'applique, on obtiendra aussitôt les distances focales principales f_2, f_3 des deux lentilles oculaires, ainsi que l'intervalle h_2 qu'il faut établir entre elles, pour opérer la dispersion des foyers sur la droite dirigée au point oculaire dans le système négatif ou positif d'oculaire qu'on aura choisi. Mais, lorsqu'une fois les deux lentilles oculaires ont été construites sur ces données, et que l'on a achevé de régler l'intervalle h_2 par l'expérience, de manière à obtenir le meilleur effet total qu'il est possible avec l'objectif auquel on destine l'oculaire, et pour l'observateur qui doit employer l'instrument total, il faut fixer invariablement cet intervalle dans la position ainsi déterminée. Car, s'il change, la condition de la dispersion rectiligne des foyers n'est plus satisfaite. Cela se voit par les expressions approchées elles-mêmes qui composent notre premier tableau de la page 158. En effet, elles

donnent généralement

$$f_2 = -(2\omega + 1)f_3, \qquad h_2 = +\omega f_3.$$

Si l'oculaire est construit, f_2 et f_3 sont déterminés; la valeur de ω résulte donc de leur rapport; et par suite, en se combinant avec f_3, elle détermine l'intervalle h_2.

130. Néanmoins, pour certaines observations que j'aurai occasion de mentionner prochainement et qui se font avec des oculaires négatifs, on se permet de faire varier l'intervalle h, dans une petite étendue de course, afin de faire produire à l'instrument total des grossissements angulaires N tant soit peu différents les uns des autres. La démonstration de ce résultat a été donnée dans le tome Ier, page 537, pour toute espèce de système oculaire à portions séparément mobiles, l'observateur étant supposé infiniment presbyte; et on l'étendrait aisément à une portée de vue quelconque, en raisonnant de la même manière sur l'expression générale de N, formée plus loin, page 640. Mais on voit maintenant que ces variations du grossissement N ne peuvent être obtenues avec un oculaire à deux verres, qu'en sacrifiant la condition de la dispersion rectiligne des foyers du système total. De sorte que les images d'inégale réfrangibilité cessent d'être superposées les unes aux autres par leurs points homologues, et doivent ainsi devenir plus confuses. Il faut donc, lorsque l'on emploie ce mode de variation, avec un oculaire à deux verres, le borner toujours à des limites très-restreintes, où la confusion chromatique qui doit en résulter soit insensible; et encore ne faut-il appliquer un tel moyen qu'à des observations faites sur des objets d'un très-petit diamètre apparent, de sorte que les divers points de leur image s'écartent toujours très-peu de l'axe central du système optique employé. Car la dispersion rectiligne des foyers a toujours lieu pour les points rayonnants placés sur cet axe même; et ainsi les déviations latérales qui peuvent s'y produire sont très-faibles pour ceux qui en sont les voisins.

131. La généralité des opticiens ne s'astreint pas toujours à l'observation exacte de ces conditions théoriques, surtout pour les oculaires positifs; on cite même des oculaires de cette dernière

spèce, construits par Fraunhoffer, dans lesquels les deux lentilles ont faites d'un foyer exactement égal, ce qui est contraire à ces onditions. Ainsi, tant pour cette circonstance qu'à cause des petes variations qu'on opère dans l'intervalle h_2, quand on achève e régler ces appareils, il ne faut pas se fier à la valeur du grossisement N, d'après laquelle on avait calculé primitivement leurs roportions. Il faut la mesurer par le *dynamètre* décrit tome Ier, age 437, ou par tout autre procédé expérimental quand les verres ont définitivement fixés. Ou bien encore, si l'on connaissait alors vec exactitude tous les éléments définitifs auxquels on s'est arrêté, n pourrait calculer N par la formule exacte relative à un système le trois lentilles qui, d'après la page 19 du présent volume, est :

$$N_3 = \frac{1}{\varepsilon_2}\left[\varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \varepsilon_3 + \frac{H_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3}{f_2} + \frac{(H_1 + H_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2)}{f_3} + \frac{H_1 H_2}{f_2 f_3}\right].$$

l faudrait alors donner aux différentes lettres les significations que ous leur avons attribuées p. 17. On trouverait sans doute un parfait ccord entre la valeur de N_3 tirée de cette formule et celle qui s'obiendrait par l'expérience. On pourrait même, vraisemblablement ans erreur appréciable, supposer dans ce calcul $\varepsilon_1 = 1$, c'est-à-lire considérer l'objectif comme n'ayant qu'une épaisseur centrale nsensible comparativement aux rayons de courbure de ses surfaces. Cette vérification, très-facile à faire, ne serait pas sans intérêt; et il serait utile aussi de comparer ce résultat à celui de la formule approchée

$$N_3 = 1 + \frac{h_1}{f_2} + \frac{(h_1 + h_2)}{f_3} + \frac{h_1 h_2}{f_2 f_3},$$

où l'on considère *toutes* les lentilles de l'appareil comme n'ayant que des épaisseurs centrales insensibles.

Des lunettes de nuit.

132. Les lunettes de nuit sont des instruments portatifs qui servent pour apercevoir pendant la nuit les objets peu lumineux et de peu d'étendue qui peuvent apparaître nouvellement dans le ciel, ou se présenter à la mer dans le cercle de l'horizon visible.

L'astronome les emploie pour découvrir les nouvelles comètes; le marin pour reconnaître de loin les navires qu'il a intérêt d'approcher ou d'éviter.

Ce but exige donc que l'instrument fasse voir les objets avec le plus de clarté possible, et qu'il signale évidemment leur existence, plutôt que de définir rigoureusement leurs contours ou d'amplifier considérablement leurs détails. De là résultent diverses conditions de nécessité ou de tolérance auxquelles il faut avoir égard dans la construction de ces appareils.

En premier lieu, l'objectif devra être achromatique et composé seulement de deux lentilles pour restreindre, autant que possible, les pertes de lumière produites par la réflexion sur les surfaces successives. Sa forme devra être de celles qui assurent la stabilité de l'achromatisme en même temps qu'elles anéantissent le premier terme de l'aberration de sphéricité. Mais, parmi les combinaisons qui produisent ce double effet, il serait à désirer qu'on essayât celle qui donne aux deux surfaces internes des courbures égales. Car alors, en collant ces surfaces l'une à l'autre, on éviterait deux réflexions; et cet avantage semble devoir surpasser l'inconvénient de la désunion qui pourrait s'opérer entre elles après un long temps; surtout si l'on considère que leurs dimensions, nécessairement restreintes, comme on le verra tout à l'heure, rendraient la réparation assez facile à effectuer, même sans le secours d'un artiste, par un choix convenable de l'enduit interposé.

Le redressement des objets n'étant pas nécessaire au seul but proposé de leur perception, l'oculaire se composera de deux lentilles de même nature, assemblées de manière à opérer la dispersion rectiligne des foyers hétérogènes. Comme l'adjonction d'un réticule y est inutile, il devra être du genre négatif, qui admet plus de champ, à grossissement égal. Mais ce grossissement devant toujours être fort restreint, à cause de la grande étendue de champ que l'on désire, ainsi qu'on le verra dans un moment, les distances focales des deux lentilles et leur intervalle devront être calculés par les expressions exactes qui donnent le maximum de champ pour chaque grossissement assigné, sans supposer celui-ci un très-grand nombre, comme on le fait d'ordinaire. Car les dis-

ances focales obtenues par cette dernière supposition diffèrent très-notablement de celles qui opèrent la dispersion rectiligne des oyers lorsque le grossissement est faible. Pour apprécier cette imitation inévitable du grossissement, soit $_cX$ l'angle formé avec 'axe central de l'appareil par l'axe géométrique du faisceau incilent qui borde le champ, et $_cX_m$ l'angle analogue formé par ce même axe géométrique avec l'axe central après son émergence inale, dont la direction est, par la disposition de l'appareil, renlue commune à tous les éléments lumineux hétérogènes qui le omposent. Si l'on désigne par N le grossissement angulaire commun à tous ces éléments, on aura toujours dans les limites de nos pproximations,

$$\sin {}_cX_m = N \sin {}_cX.$$

2_cX est donné, puisque c'est l'amplitude totale du champ que l'on désire. Je la supposerai ici de 5°, ce qui est la valeur que l'on peut considérer comme la plus convenable à la destination des instruments que nous considérons. $_cX$ en résultera égal à $\pm 2^\circ\ 30'$. Or, en examinant les appareils optiques de toute nature, exécutés par les artistes les plus habiles, pour la géodésie, la marine ou l'astronomie, on trouve que l'angle $_cX_m$ y dépasse rarement 15° 30′ ou 16°, et qu'il est souvent beaucoup moindre; ce qui donne une amplitude de 30° ou 32° au plus, au ciel idéal qui est perçu à travers l'instrument, lorsque le centre de la pupille est placé au point oculaire du système. Cette limitation de l'angle $_cX_m$ est nécessitée par les restrictions qu'il faut apporter aux incidences de rayons lumineux sur les surfaces de l'oculaire, pour que les images des objets restent nettes sur les bords du champ apparent. Et les artistes y arrivent, non par le calcul, mais par l'expérience, en ouvrant peu à peu le diaphragme qui renferme la dernière image réelle, autant qu'ils peuvent le faire en la conservant nette jusque sur ses bords; ce qui leur donne l'amplitude du champ que chaque instrument peut embrasser avec le grossissement angulaire actuel qui résulte de ses éléments fixes. Admettant donc une telle limite de l'angle $_cX_m$, pour une valeur assignée de $_cX$, le grossissement angulaire N est déterminé par la relation exprimée plus

haut; et en supposant, par exemple, ${}_cX_m = 15^\circ\,30'$; avec ${}_cX = 2^\circ\,30'$, on trouve N tant soit peu supérieur à 6. Mais comme la destination des appareils considérés ici peut y faire tolérer quelque aberration de sphéricité près des bords extrêmes du champ, je prendrai pour limite inférieure de ${}_cX_m \pm 15^\circ\,10'\,29''$, et pour limite supérieure $\pm\,20^\circ\,25'\,24''$, ce qui, étant toujours combiné avec ${}_cX = \pm\,2^\circ\,30'$, donnera les associations suivantes pour un appareil qui renverse les images des objets.

Demi-amplitude du champ apparent. ${}_cX$.	Angle formé avec l'axe central par l'axe géométrique du pinceau emergent qui borde le champ. ${}_cX_m$	Valeur correspondante du grossissement angulaire. N.
$\pm\,2^\circ 30'$	$\pm\,15^\circ 10' 19''$	$-\,6$
	$\pm\,20^\circ 25' 24''$	$-\,8$

Quelle que soit la valeur de N à laquelle on s'arrête, il faudra la substituer dans les formules exactes établies dans la page 148, pour en conclure les distances focales f_2, f_3 des deux lentilles, ainsi que leur intervalle h_2 qui donnent le maximum de champ apparent. Car, avec de si faibles valeurs de N, ces éléments de l'oculaire diffèrent notablement de ceux que l'on obtient par les formules habituelles où N est supposé très-considérable. Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à faire l'épreuve dans le cas particulier de $N = -6$, et l'on trouvera, par les formules rigoureuses de la page 148,

$$f_2 = +\tfrac{5}{21}\,\Delta'; \qquad h_2 = -\tfrac{10}{51}\,\Delta'; \qquad f_3 = +\tfrac{5}{51}\,\Delta';$$

tandis que, par les formules approximatives de la page 159, on aurait

$$f_2 = +\tfrac{1}{3}\,\Delta'; \qquad h_2 = -\tfrac{2}{9}\,\Delta'; \qquad f_3 = +\tfrac{1}{9}\,\Delta'.$$

D'après cela, si l'on suppose $\Delta' = -510^{\text{mm}}$, ce qui est une des moindres valeurs de longueur focale que l'on puisse employer dans une semblable construction, il en résultera,

Par les formules exactes,

$$f_2 = -121^{\text{mm}}\tfrac{2}{7}; \qquad h_2 = 100^{\text{mm}}; \qquad f_3 = -50^{\text{mm}};$$

et par les formules approximatives,

$$f_2 = -170^{mm}; \qquad h_2 = -113^{mm}\tfrac{1}{3}; \qquad f_3 = -56^{mm}\tfrac{2}{3};$$

ce qui donne des différences d'éléments très-sensibles dans la construction pratique.

135. Les déterminations précédentes assignent aux objectifs de ces lunettes des limites d'ouverture qu'il serait inutile de dépasser, car avec une plus grande difficulté d'exécution, il n'en proviendrait pas pour l'œil une plus grande abondance réelle de lumière. En effet, soit A' le demi-diamètre efficace de cette ouverture, il en résultera pour le demi-diamètre de l'anneau oculaire $\frac{A'}{N}$. Si ce rapport surpasse le demi-diamètre nocturne ϖ de la pupille, lorsqu'elle est placée au point oculaire et appliquée à l'instrument, toute la portion excédante des pinceaux émergents sera perdue pour l'observation; et l'on en tirera seulement ce faible avantage, que le centre de la pupille pourra s'écarter quelque peu de l'axe central du système sans qu'elle cesse d'être remplie par la radiation des pinceaux émergents ainsi étendus. Mais la petitesse du grossissement N fait bientôt attendre les limites restreintes de A' où cet épanouissement peut être de quelque utilité. Car, en donnant à A' des valeurs successivement croissantes, et leur appliquant le diviseur N, restreint aux nombres 6 ou 8 comme l'amplitude demandée du champ l'exige, on a pour le diamètre de l'anneau oculaire les valeurs suivantes :

Diamètre supposé de l'objectif en millimètres.	Diamètre conclu de l'anneau oculaire N en millimètres. $\frac{2A'}{N}$.	
$2A'$.	Pour $N = -6$.	Pour $N = -8$.
48^{mm}	8^{mm}	6^{mm}
60	10	$7\frac{1}{2}$
72	12	9
$8\frac{1}{4}$	14	$10\frac{1}{2}$

Si l'on emploie le grossissement — 6 qui correspond au mode de construction par lequel on peut le plus aisément obtenir 5° de champ, le diamètre des anneaux oculaires atteint déjà, s'il ne surpasse, l'ouverture nocturne que l'on peut supposer à la pupille, lorsque l'on donne au diamètre de l'objectif 60^{mm} d'ouverture. Avec le grossissement N = — 8, cette même limite permet d'agrandir l'objectif jusqu'à rendre son diamètre égal à 72^{mm} ou même à 84^{mm}, toujours en conservant ce même champ de 5°. Mais il est douteux que la grandeur assignée par ce plus fort grossissement à l'angle X_m puisse se réaliser en conservant une netteté suffisante aux images, sur les bords du champ; et l'on doit désirer que des épreuves expérimentales soient faites pour décider cette alternative.

Sur les lunettes achromatiques à oculaires multiples qui font voir les objets droits.

134. Ce genre d'appareils, appelé aussi *longues-vues*, est destiné à l'observation distante des objets terrestres qu'ils doivent, pour ce but, présenter dans leur situation naturelle. Quoiqu'ils ne soient pas d'un usage spécial en astronomie, la connaissance n'en est pas cependant inutile aux astronomes, qui, indépendamment de l'emploi qu'ils peuvent avoir occasion d'en faire pour eux-mêmes, sont souvent chargés de régler ou d'apprécier ceux que l'on destine au service de la guerre ou de la marine. C'est pourquoi je me bornerai à exposer les conditions générales de leur construction, et à décrire la marche qu'ils impriment aux rayons lumineux, lorsqu'ils sont combinés de la manière la plus favorable; renvoyant, pour les détails ultérieurs de théorie et de pratique, à un travail étendu que j'ai inséré sur ce sujet dans le tome XVII des Mémoires de l'Académie des Sciences.

135. Je prends pour type la *fig.* 17, où A_1 représente la place de l'objectif, et A_2, A_3, A_4, A_5, celles des quatre lentilles qui constituent l'oculaire complexe. L'objectif est achromatique et formé d'un crown et d'un flint en contact central, désignés collectivement par la droite L_1, L_1, parce qu'on néglige l'épaisseur centrale de ce système. Les quatre lentilles de l'oculaire sont simples, et formées d'une même espèce de verre. Elles sont désignées, de même, par autant de

droites, parce qu'on les considère aussi comme infiniment minces; mais, en réalité, on les fait habituellement plano-convexes, et on les dispose de manière que les faces planes des deux premières A_2, A_3 sont tournées vers l'objectif, celles des deux dernières A_4, A_5 vers l'œil. L'expérience, plutôt que le calcul, a fait reconnaître ou plutôt présumer que cette disposition relative de leurs faces est la plus favorable pour affaiblir leurs aberrations de sphéricité, dans le mode de répartition des images successives, tant réelles que virtuelles, qui s'y opère ordinairement. En nous bornant à celui que représente la figure et qui est le plus ordinaire, comme aussi le mieux combiné pour assurer la bonté des effets, si l'on conçoit un objet rectiligne $S\Sigma$ très-distant, et perpendiculaire à l'axe central, qui soit admissible dans le champ de visibilité que l'instrument comporte, l'objectif en jette d'abord derrière lui une image achromatique $S_1\ \Sigma_1$ qui se forme à son foyer principal propre, dans une situation renversée; cette image, composée des mêmes rayons que l'objet, tombe ici en avant de tout le système oculaire, et par conséquent elle se réalise. Considérons une des images simples qui la constituent, par exemple, celle de réfrangibilité moyenne. Le système oculaire a pour but et pour effet de la transformer finalement en une autre image $S_1\,\Sigma_1$, pareillement réelle, mais droite, placée en avant de la dernière lentille A_5, à une distance telle que les pinceaux émanés de ses divers points étant réfractés par cette lentille, produisent autant de pinceaux émergents, dont le foyer virtuel se trouve placé à la distance D de la vision distincte, au devant du point oculaire H de l'instrument total, point dans lequel le centre de la pupille est supposé placé. La même action exercée par l'oculaire, sur toutes les images simples qui composent $S_1\ \Sigma_1$, en fait résulter autant d'images réelles analogues à $S_1\ \Sigma_1$, ayant chacune leur réfrangibilité propre, et qui par conséquent se forment à des distances inégales en avant de la dernière lentille A_5. Mais le système est disposé de manière que tous les foyers hétérogènes dérivés ainsi de chaque point de $S_1\ \Sigma_1$, après l'émergence finale, se trouvent distribués sur une même droite dirigée au point H, et s'y forment à des distances peu inégales en avant de ce point. De sorte que toutes les images finales d'inégale couleur, se

projetant alors les unes sur les autres par leurs points homologues, la pupille placée en H fait abstraction de leur petite inégalité d'éloignement et les perçoit à très-peu près comme une image achromatique unique. C'est la condition que j'ai appelée la *dispersion rectiligne des foyers* dans les appareils dioptriques quelconques, et l'on y assujettit analytiquement le système des quatre lentilles dont l'oculaire est composé. Ici la figure est construite pour le cas d'un œil infiniment presbyte. Alors, tous les pinceaux hétérogènes émanés d'un même point de l'objet sont transformés après leur émergence finale en autant de faisceaux ayant des directions parallèles entre elles et leur axe central commun dirigé au point oculaire moyen H, ce qui les fait entrer dans la pupille simultanément, presque comme un seul faisceau incolore.

156. Dans la disposition que la figure représente, la première image $S_1\Sigma_1$ se forme en avant de l'oculaire, à une distance $\Delta_2 A_2$, moindre que la distance focale principale réciproque f_2 de la première lentille. En conséquence, lorsque les pinceaux émanés de chaque point de $S_1\Sigma_1$ ont traversé cette lentille L_2L_2, ils sont transformés par elle en d'autres pinceaux ayant leurs foyers virtuels plus antérieurs encore, ce qui donne une seconde image fictive $S_2\Sigma_2$ plus grande que $S_1\Sigma_1$ et de même sens. Chacun de ceux-ci arrivant à la seconde lentille L_3L_3, est réfracté par elle du côté opposé de l'axe central, de manière à former une image postérieure $S_3\Sigma_3$ redevenue droite, laquelle se formerait réellement en Δ_3 si la troisième lentille L_4L_4 n'arrêtait pas les rayons transmis avant qu'ils parvinssent jusque-là. Cette troisième lentille ne renverse pas l'image $S_3\Sigma_3$: sa position est telle qu'elle ne fait que la contracter en une image plus petite $S_4\Sigma_4$ qui se forme réellement au devant de la dernière lentille à la distance $\Delta_4 A_4$, égale à sa distance focale principale réciproque ; de manière que les pinceaux qui en émanent sortent finalement de l'oculaire sous forme de faisceaux, comme je l'ai déjà annoncé. Le redressement de l'image $S_3\Sigma_3$ est ainsi opéré par un seul renversement, celui que produit la lentille L_4L_4. La nécessité de cette inversion ne permet plus de faire coopérer les quatre lentilles au grossissement final N, dans un même sens et d'une manière égale, comme dans l'oculaire astronomique à

deux verres de Campani et de Huygens. Il faut que les trois dernières lentilles compensent d'abord l'effet contraire de la première, et complètent en outre le grossissement positif N que l'on veut obtenir. Mais leur influence sur ce résultat ne peut pas être égale. La première qui opère l'inversion doit nécessairement y contribuer plus que les deux dernières, et tout ce qu'on peut réaliser de plus favorable, c'est de répartir également entre celles-ci le complément d'effet qu'elles doivent produire simultanément. Tout cela se trouve démontré par le calcul dans le Mémoire cité plus haut, et l'expérience y est parfaitement conforme. Mais déjà, si l'on applique seulement à ces conditions spéciales les considérations générales exposées page 30, § 27, on verra aisément que la nécessité de l'inversion introduit inévitablement entre les quantités π_2, π_3, π_1, π_5 une opposition de signe que l'on évite dans l'oculaire astronomique à deux verres, et qu'il convient de rendre unique dans l'oculaire complexe, ainsi que je viens de le dire, pour qu'elle soit la moins désavantageuse.

157. L'obtention simultanée de ces divers résultats contribue déjà à limiter l'accroissement d'indétermination que l'emploi des quatre lentilles apporte dans ce système d'oculaires. On la restreint encore avec avantage en assujettissant les quatre images tant réelles que fictives à ne pas se former très-loin des lentilles qui doivent immédiatement recevoir les pinceaux émanés de chacune d'elles. Car alors ces pinceaux, lorsqu'ils leur parviennent, se trouvant peu épanouis, tous les rayons qui les composent rencontrent les surfaces de ces lentilles sur des éléments superficiels assez peu étendus pour que les aberrations de sphéricité qu'ils y éprouvent soient presque égales, ce qui restreint la dilatation de l'espace focal, soit réel, soit virtuel, où chacun d'eux est ainsi amené ultérieurement; de sorte que l'inégalité de ces aberrations ne se fait presque plus sentir que sur l'éloignement absolu des foyers individuels propres aux pinceaux divers, où l'œil peut plus aisément la tolérer. L'introduction simultanée de toutes ces conditions s'effectue par des procédés analytiques généraux qui sont exposés en détail dans le Mémoire cité. Alors, en supposant donnés la distance focale principale de l'objectif, et le grossissement N que l'on veut faire

produire à l'instrument total, on obtient un type mathématique d'oculaire quadruple, renfermant seulement quatre quantités indéterminées, ayant toutes une signification physique, dont les valeurs numériques doivent toujours être très-peu différentes de certaines moyennes fixes, pour que l'instrument soit approprié aux convenances pratiques, et qu'il puisse s'adapter à la portée de vue des divers observateurs sans rien perdre de ses avantages essentiels.

Ce choix étant fait pour un cas donné, tous les éléments de l'oculaire, c'est-à-dire les distances focales principales des lentilles et leurs intervalles en résultent par des expressions explicites que l'on peut immédiatement réduire en nombres, et réaliser pratiquement. Lorsque l'appareil a été ainsi préparé, il se trouve tel qu'il devrait être pour un observateur infiniment presbyte. Alors, pour l'adapter aux vues ordinaires, chaque observateur n'a plus qu'à pousser quelque peu vers l'objectif le tuyau qui contient l'assemblage des quatre lentilles, jusqu'à ce que les images des objets distants soient perçues par lui avec une parfaite netteté; et, d'après les relations analytiques que les formules établissent, l'amplitude de ce mouvement laisse toujours la première image $S_1 \Sigma_1$ en dehors de l'oculaire, comme notre figure la représente.

138. Les oculaires que l'on appelle *polyaldes*, c'est-à-dire à grossissement variable, sont construits sur les mêmes principes que je viens d'exposer. Seulement le système des deux premières lentilles $A_2 A_3$, et le système des deux dernières $A_4 A_5$ sont contenus dans deux tuyaux séparés, qui s'ajustent l'un dans l'autre avec un faible frottement, et que l'on peut faire mouvoir relativement par une vis de rappel, de manière à faire varier entre certaines limites l'intervalle $A_3 A_4$ des deux systèmes, sans changer les intervalles individuels $A_2 A_3$, $A_4 A_5$ des lentilles qui les composent. Lorsque l'oculaire est ainsi amené dans une des conditions de distance qu'il peut admettre, l'observateur doit le faire mouvoir tout entier, en l'approchant ou l'éloignant de l'objectif, jusqu'à ce qu'il en reçoive de nouveau des images distinctes; et, d'après ce qui a été démontré généralement tome Ier, page 537, le grossissement angulaire résultant de ces dispositions diverses, augmente ou diminue proportionnellement aux variations de l'intervalle $A_3 A_4$.

Mais les conditions qui assurent la dispersion rectiligne des foyers définitifs, ainsi que la répartition du grossissement le plus favorable, ne peuvent pas être complétement, non plus que simultanément satisfaites, dans toutes les diverses positions des deux systèmes. C'est pourquoi, lorsque l'on veut construire un semblable appareil, il faut calculer tous ses éléments pour l'intervalle moyen auquel il doit s'adapter; après quoi on essaye expérimentalement l'amplitude de variations qu'il peut recevoir autour de cette position moyenne, sans que les images cessent d'être suffisamment distinctes; et on lui fixe ces limites de course. Mais il faut bien se garder de les exagérer, comme on l'a fait dans quelques oculaires de ce genre, où l'écartement des deux systèmes partiels va jusqu'à amener la première lentille A_2 en contact avec l'image objective $S_1 \Sigma_1$, et la lui faire dépasser, ce qui la rend virtuelle de réelle qu'elle était auparavant. Outre les inconvénients graves qui résultent de cette coïncidence, et que j'ai signalés page 146, ces variations exagérées du grossissement ne peuvent devenir supportables qu'en rétrécissant extrêmement l'étendue du champ que l'instrument total peut embrasser dans ces limites extrêmes; et cet inconvénient lui reste dans tous les grossissements moindres, où il pourrait embrasser un champ beaucoup plus ouvert.

139. Ici, comme dans les oculaires à deux lentilles, la limitation du champ s'opère au moyen d'un diaphragme annulaire que l'on place en Δ_1, au point de l'axe central, où se forme réellement la dernière image $S_1 \Sigma_1$, et dont l'ouverture la restreint au degré de grandeur que l'instrument peut convenablement embrasser. Conformément à ce que nous avons expliqué alors, page 154, l'instrument étant préparé pour un œil infiniment presbyte, le demi-diamètre de cette image, dans les limites de l'approximation qui nous sert de guide, est exprimé par $\pm f_5 \sin {}_cX_m$; et comme l'angle final ${}_cX_m$ ne peut guère excéder pratiquement 15° 30′, dont le sinus est 0,264434, le diamètre entier du diaphragme qui la renferme ne peut aussi surpasser de beaucoup $-\frac{1}{2} f_5$, dans les instruments les mieux confectionnés. L'artiste doit donc commencer par lui donner cette ouverture; et, après avoir reconnu que l'instrument la

supporte, comme cela doit toujours arriver dans une construction bien faite, il peut essayer de l'agrandir par des essais gradués, tant que les images conservent une suffisante netteté. L'augmentation qui en résulte alors dans l'angle final $_cX_m$, lorsqu'elle est admissible, réagit sur l'amplitude $2\,_cX$ du champ et la rend plus grande ; car ces deux angles dépendent toujours l'un de l'autre par la relation générale

$$\sin {}_cX_m = N \sin {}_cX,$$

dans laquelle N est le grossissement angulaire qui reste le même dans tous ces essais, comme étant déterminé seulement par les distances focales et les intervalles des lentilles. Mais il est trop ordinaire de rencontrer des instruments où le diaphragme que nous considérons est, au contraire, rétréci fort au-dessous de sa première limite $-\frac{1}{2}f_5$, pour dissimuler les vices de la construction ; ce qui restreint d'autant le champ apparent qu'ils devraient embrasser s'ils eussent été exécutés avec plus de soin. C'est pourquoi un observateur attentif doit toujours constater, par son expérience propre, les valeurs des deux éléments N et $_cX$ dans chaque instrument qu'on lui propose, afin d'en conclure l'angle $_cX_m$ qu'on y a réellement admis, et de connaître, par sa grandeur, si l'amplitude du champ $2\,_cX$ est telle qu'on doit l'obtenir dans une construction bien faite, pour le grossissement donné N.

140. On insère aussi un autre diaphragme annulaire au point H_2 de l'axe central, où les rayons de réfrangibilité moyenne qui ont percé l'objectif à son centre de figure A_1 vont tous concourir après avoir été réfractés par la première lentille oculaire A_2. D'après cette définition, si l'on nomme h_1 l'intervalle A_1A_2, et $+H_2$ la distance focale actuelle H_2A_2, considérée analytiquement comme antérieure à la lentille, cette distance sera assujettie à la relation générale

$$\frac{1}{H_2} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{f};$$

la position du point H se déterminera donc sur l'axe central par cette condition. Or, ce même point est aussi *le point oculaire* du

système composé de l'objectif et de la lentille A_2; c'est-à-dire que tous les rayons de moyenne réfrangibilité, qui pénètrent l'objectif par un point quelconque de son ouverture efficace, ayant pour demi-diamètre $\pm A_1$, après avoir été réfractés par la lentille A_2, sont tous compris en H_2 dans un anneau idéal dont le demi-diamètre est $\frac{A_1}{N_2}$, N_2 étant le grossissement angulaire propre au système binaire dont il s'agit. Or, puisque l'objectif, ainsi que la lentille, sont ici considérés comme infiniment minces, l'expression de N_2 pour un tel système est

$$N_2 = 1 + \frac{h_1}{f_2};$$

conséquemment le diamètre total de l'anneau oculaire qui lui est propre est

$$\frac{2 A_1 f_2}{h_1 + f_2}.$$

C'est là le diamètre intérieur que l'on donne, ou du moins que l'on doit donner au diaphragme annulaire placé en H_2. Il a ainsi pour but, et pour effet, d'admettre dans l'intérieur de l'oculaire tous les rayons extérieurs que l'objectif a régulièrement réfractés, en excluant tous ceux qui pourraient provenir des réflexions opérées sur les parois intérieures du tuyau de monture A_1 A_2. Mais il n'a aucune influence sur l'amplitude du champ, qui est uniquement déterminée par l'écartement extrême des rayons à incidence centrale que le diaphragme, placé en Δ_4, peut admettre. Quoique l'ouverture de ce diaphragme antérieur et sa position sur l'axe central en H_2 soient calculées pour les seuls rayons de moyenne réfrangibilité, il s'adapte encore suffisamment bien à tous les autres, parce que l'image achromatique réelle S_1 Σ_1 et l'image virtuelle S_2 Σ_2 qui en dérive par la réfraction de la lentille A_2 sont maintenues, par la construction, assez proches de cette lentille pour que les pinceaux fictivement émanés de $S_2 \Sigma_2$ arrivent en H_2 encore très-minces et très-peu dispersés. Par une réciprocité évidente, le diamètre donné à ce diaphragme antérieur détermine l'étendue

efficace de la surface objective; et, lorsqu'on le fait moindre que l'évaluation précédente pour le demi-diamètre donné A_1, une portion annulaire de cette surface, située près de ses bords, ne peut plus transmettre de rayons dans l'intérieur de l'oculaire, de sorte que l'effet est le même que si l'étendue de l'objectif en était d'autant diminuée. Cette limitation est toujours nécessaire à un certain degré pour supprimer les rayons qui traverseraient l'objectif très-près de ses bords, où les surfaces réfringentes sont généralement plus sujettes à des imperfections de travail. Mais on l'exagère souvent beaucoup plus qu'on ne devrait légitimement le faire, afin de dissimuler les vices de la construction; de sorte que l'étendue apparente de l'objectif ne produit alors qu'une concentration de lumière correspondante à une étendue réellement beaucoup moindre. C'est donc encore là un point essentiel que l'observateur doit constater, en couvrant toute la surface de l'objectif par des diaphragmes opaques, de grandeurs graduellement croissantes, et déterminant par expérience le diamètre avec lequel ils interceptent toute la lumière émergente en H. Car l'ouverture apparente de l'objectif, qui excédera ce diamètre limite, est évidemment la portion annulaire qui est perdue pour la vision par l'interposition du diaphragme placé en H_2. La plupart des opticiens sont peu scrupuleux à employer ce procédé de déception; comme aussi ils mettent en général si peu de soin à déterminer exactement les distances focales de leurs lentilles et la place de leurs diaphragmes, que les instruments de ce genre sont habituellement bien inférieurs à ce qu'ils pourraient être s'ils étaient plus fidèlement conformes aux indications de la théorie.

Analyse de l'héliomètre.

141. A la fin du tome Ier de cet ouvrage, pages 679 et suivantes, j'ai explique l'emploi du réticule à fils parallèles relativement mobiles, pour mesurer de très-petits angles visuels dans le ciel, ou entre des objets terrestres. La disposition de cet appareil a été variée de beaucoup de manières pour l'usage de l'astronomie; et, selon les applications qu'on en voulait faire, on a multiplié le nombre des fils, ou on les a rendus obliques entre eux

dans leur plan commun. Mais toute cette diversité de détails rentre dans la théorie générale que j'ai exposée alors, et l'on en pourra calculer facilement les effets dans chaque cas donné, en considérant les valeurs des coordonnées focales, soit linéaires, soit angulaires, qui s'y appliquent. C'est pourquoi je ne m'arrêterai pas à les décrire individuellement. Un physicien français, Rochon, a imaginé, pour la mesure des petits angles, un autre procédé qui consiste à introduire dans l'axe de la lunette, avant l'oculaire, un double prisme de cristal de roche, achromatisé par opposition, ayant ses faces extérieures parallèles, et assez larges pour recevoir tous les cônes de rayons réfractés qui émanent des divers points de l'intervalle extérieur, ou du petit objet dont on veut avoir la mesure angulaire. Ce prisme dédouble chacun de ces cônes en deux autres : l'un, produit par la réfraction ordinaire, est la continuation rectiligne de l'incident dont il dérive; l'autre, produit par la réfraction extraordinaire, a son axe central dévié d'un certain angle fixe dont la valeur se détermine par des expériences préalables. Mais, comme cet angle est toujours très-petit, les rayons qui composent les deux cônes forment leurs foyers postérieurs sensiblement dans un même plan, qui est le plan focal de l'objectif, comme si le double prisme n'existait pas; et ces foyers s'écartent l'un de l'autre à mesure que l'on enfonce le prisme vers l'objectif, parce que le plan où ils se forment devient plus distant du sommet de l'angle où s'opère leur séparation. Ce dédoublement, appliqué à chacun des pinceaux émanés des divers points de l'objet, en donne donc deux images focales plus ou moins séparées, ou se superposant en partie par leurs côtés contraires, selon l'éloignement que l'on donne au prisme; et, lorsque ces bords sont justement en contact, sans mordre l'un sur l'autre, les deux branches du compas prismatique embrassent, dans le plan focal, le diamètre entier de l'image simple. On a donc ainsi la grandeur absolue de ce diamètre, puisque l'on connaît l'ouverture de l'angle et la distance du sommet au plan focal. Or, cette même grandeur est aussi comprise entre les axes des pinceaux incidents qui ont traversé l'objectif à son centre de figure, en formant entre eux un angle visuel égal au diamètre apparent de l'objet vu du même centre. On

peut donc déduire de là cet angle visuel, puisque l'on connaît la longueur focale de l'objectif, et la grandeur de l'image comprise à son foyer entre les deux axes. J'ai exposé, dans la deuxième édition de mon *Précis de Physique*, tome II, pages 275 et suivantes, le détail de ce calcul et toutes les particularités physiques relatives à l'appareil de Rochon. Je me borne à y renvoyer le lecteur. Je l'ai surtout mentionné à cause de son originalité comme invention, car il a beaucoup d'inconvénients pratiques qui s'opposent à la précision de ses effets.

142. M. Arago a employé le principe du dédoublement, d'une manière qui en rend l'application bien plus exacte. Il place le double prisme, non pas dans l'intérieur de la lunette, mais au dehors, après l'oculaire, afin de doubler l'image émergente finale, en lui donnant un pouvoir de séparation tel que les deux images ordinaire, extraordinaire, ainsi obtenues, se trouvent en contact exact par leurs bords contraires. Dans la première application de cette idée, il réalisait la condition de contact variable, en préparant un assortiment de prismes biréfringents achromatisés, ayant des angles divers, dont les pouvoirs de séparation varient depuis les plus petits angles visuels que puissent soutendre les images finales vues à travers l'oculaire de la lunette, jusqu'aux plus grands qu'on y veuille embrasser. Chacun de ces prismes s'ajuste à l'extrémité extérieure d'un tout petit tuyau, contenant lui-même l'oculaire qui est du genre positif et composé de deux verres, ajustés conformément aux conditions de l'achromatisme dans leurs positions moyennes. Mais le verre antérieur, le plus éloigné de l'œil, peut se mouvoir longitudinalement d'une petite quantité, ce qui fait varier le grossissement angulaire N, et conséquemment l'écart mutuel des images finales que la double réfraction sépare, sans altérer notablement l'achromatisme, si le changement de position relative est suffisamment restreint. Chaque prisme, adapté ainsi à un même oculaire de grossissement variable, donne une série continue d'angles visuels que l'on peut mesurer, en divisant l'écartement angulaire propre à ce prisme, par le grossissement actuel N, résultant de l'intervalle des deux lentilles; et l'on change au besoin l'oculaire, quand cet intervalle, pour embrasser l'image,

ortirait trop des limites de course où les défauts d'achromatisme euvent être tolérés. Dans la deuxième édition de mon *Précis de hysique*, tome II, page 353, j'ai exposé l'usage que M. Arago fait de ce procédé pour mesurer les grossissements produits par s microscopes, et les télescopes dioptriques ou catoptriques. Mais il a reconnu, depuis, que l'altération de l'achromatisme par le déplacement relatif des lentilles de l'oculaire était un inconvénient qu'il convenait d'éviter; et il y est parvenu, en faisant porter tout le principe de la variation sur les prismes biréfringents seuls. Pour cela, il en fait construire un nombreux assortiment, dont les angles d'écarts propres varient à peu près par demi-minute de degré, et sont individuellement mesurés avec précision par des observations faites sur des mires terrestres. Ceux de ces prismes qui se suivent en force, sont assemblés par série dans une même monture, qui s'ajuste extérieurement à l'oculaire fixe, dans une coulisse qui permet de les faire glisser transversalement au devant de lui, et qui peut tourner aussi autour de l'axe de la lunette pour aligner le plan biréfringent sur la direction actuelle des deux points célestes que l'on veut comparer. Quelques essais montrent bientôt quel est celui des prismes qui les met le plus exactement en contact; et, si cette condition est remplie avec rigueur, l'angle d'écartement propre au prisme qui y satisfait, étant divisé par le grossissement angulaire fixe du système optique qui le précède, donne l'angle visuel extérieur. Si le contact n'a pas lieu tout à fait rigoureusement par le prisme choisi, le prisme suivant ou précédent de la même série fera passer l'erreur en sens contraire, et l'on pourra fixer très-approximativement, par estime, la fraction de leur intervalle angulaire à laquelle elle répond. Or, comme ils se suivent de 30″ en 30″, si le grossissement fixe N est seulement égal à 100, dans l'appareil employé, la différence totale de l'angle soutendu par eux ne sera que 0″,3, et l'évaluation par estime qui la fractionnera, portera au plus sur les centièmes de seconde, que l'on pourrait même atteindre en adaptant les mêmes prismes à un autre oculaire achromatique un peu plus faible ou un peu plus fort. M. Arago a fait beaucoup d'applications de ce procédé à la mesure des angles visuels que sou-

tendent les planètes et l'anneau de Saturne dans les directions des différents diamètres de leurs disques. Il en a fait aussi usage pour mesurer les intervalles des étoiles qui se dédoublent avec de forts grossissements. Mais quelques-uns des résultats qu'il a ainsi obtenus ont seuls été rendus publics par les savants auxquels il les avait communiqués; et leur extrême délicatesse, jointe à la précision remarquable qu'ils paraissent avoir, rendrait utile autant que désirable la connaissance des précautions de détail que l'expérience a dû lui suggérer pour atteindre cette perfection.

143. Les divers appareils que je viens de mentionner ne peuvent mesurer que des angles visuels d'une ouverture extrêmement restreinte. Pour concevoir la cause de cette limitation, il faut considérer que tout objet de dimension sensible, vu à travers une lunette, donne d'abord au foyer de l'objectif supposé achromatique, une image étendue, qui, vue du centre de ce système, y soutend un angle visuel sensiblement égal à celui que soutend au dehors l'objet lui-même. Si cet angle n'embrasse que un, ou même deux degrés, les pinceaux qui le limitent peuvent se transmettre à travers l'objectif sous des incidences qui n'ont rien d'inadmissible; et ainsi l'image complète d'un tel objet peut se former dans le plan focal avec une suffisante netteté. Mais, lorsque les pinceaux rayonnants qui la composent, traversent ensuite un oculaire doué d'un certain pouvoir amplifiant, les inclinaisons des axes de ces pinceaux sur l'axe central sont agrandies dans leur émergence, proportionnellement à ce pouvoir; et comme ces inclinaisons finales doivent tout au plus s'élever à 15° ou 16°, dans leurs valeurs extrêmes, pour que les images émergentes soient perçues assez nettement, *dans toute leur étendue*, il faut, pour les contenir dans ces limites, restreindre l'image focale objective d'autant plus que le grossissement final est plus fort. Voilà pourquoi les disques du soleil et de la lune ne peuvent jamais être vus tout entiers dans les lunettes astronomiques, leurs oculaires y étant reglés de manière à ne pas transmettre de pinceaux émergents aussi obliques à l'axe central, que le seraient ceux qui partiraient des bords opposés de l'image focale objective. Mais on parvient à mesurer ces angles, même avec des grossissements très-forts, en appliquant au système objectif un principe

de duplication, d'abord imaginé par Bouguer, en 1748, et que Fraunhoffer a porté depuis au dernier degré de perfection. C'est pourquoi je commencerai par l'exposer dans cet état d'application usuelle où il est aujourd'hui, en prenant pour guide la description que M. Bessel a donnée de celui qui a été construit par cet habile artiste pour l'observatoire de Kœnigsberg (*). J'indiquerai ensuite la première conception de Bouguer, qui deviendra très-facile à comprendre.

144. La particularité fondamentale du procédé consiste à couper diamétralement l'objectif achromatique de l'appareil par une section centrale, puis à l'enchâsser dans une monture métallique où ses deux moitiés peuvent être mues individuellement, et indépendamment l'une de l'autre, dans le sens de la ligne de section, en restant toujours contiguës sur cette ligne même. Ce mouvement s'opère par des vis de rappel à filets très-serrés, comme celles qui conduisent les fils mobiles des réticules. Elles portent de même, sur leur tête, des cercles divisés, d'un diamètre assez considérable pour que la rotation de leur contour, devant des index fixes, mesure avec précision le mouvement de transport qu'elles impriment à chaque segment de l'objectif. Celui-ci est ajusté, comme dans les lunettes ordinaires, perpendiculairement à l'une des extrémités du tuyau métallique dont l'autre bout porte un oculaire astronomique derrière lequel on place l'œil ; et des tiges de renvoi qui aboutissent à la main de l'observateur servent à faire tourner les vis directrices, tout en observant. Dans l'instrument de Kœnigsberg le mouvement imprimé à chaque segment de l'objectif peut être encore apprécié directement, par une division rectiligne tracée sur les tiroirs métalliques dans lesquels ils sont contenus, et à laquelle des microscopes micrométriques sont adaptés. Mais M. Bessel n'emploie habituellement que l'indication fournie par les têtes des vis, comme étant plus commode. Le tuyau, avec ses appendices, est porté par un appareil à mouvement conique conduit par une horloge, comme l'instrument de Dorpat, tome Ier, page 675. De sorte qu'une fois dirigé vers une étoile, il la suit

(*) *Astronomische nacrichten*, publiées par M. Schumacher, t. VIII, p. 396.

dans sa révolution diurne, sauf les changements produits par la réfraction; et sa direction vers tel ou tel point assigné du ciel peut s'effectuer immédiatement par les indications de deux cercles divisés, dont l'un, parallèle à l'équateur, mesure les ascensions droites, tandis que l'autre, perpendiculaire à ce plan, mesure les déclinaisons. Il y a en outre à la disposition de l'observateur un dernier mouvement qui, lorsque l'instrument est dirigé, sert à tourner le système des deux objectifs dans son propre plan, de manière que la ligne de section vienne coïncider avec les deux points célestes dont on veut mesurer la distance angulaire, ce qui est une condition essentielle de l'opération, comme on le comprendra plus tard. Ce mouvement rotatoire est mesuré par une division circulaire qui marque l'angle actuel du cercle de déclinaison avec le plan visuel contenant la ligne de section dans chaque position où on l'a ainsi amené; c'est ce qu'on appelle l'*angle de position* de cette ligne, comme on le dit aussi en général pour désigner la direction de la ligne de distance de deux astres autour du cercle de déclinaison de l'un d'eux. Dans l'instrument de Kœnigsberg, lorsqu'on a convenablement dirigé la ligne de section, la lecture de l'angle de position s'effectue en faisant tourner le tube de manière à le ramener vers l'observateur, puis le renvoyant vers les astres sur lesquels on l'a ajusté, et avec lesquels la ligne de section se retrouve toujours exactement coïncidente. Enfin, pour faciliter la recherche immédiate des astres sans recourir aux cercles d'ascension droite et de déclinaison, le tube porte une petite lunette dont l'axe optique lui est parallèle, et qui n'ayant qu'un grossissement peu considérable, embrasse beaucoup de champ; de sorte qu'en la tournant à vue sur un astre quelconque, elle entraîne sur lui le tube qui s'y trouve ainsi dirigé. Une telle lunette auxiliaire se nomme *un chercheur*, et c'est un appendice nécessaire de tous les grands instruments astronomiques qui ont un grossissement un peu fort; car, embrassant par cela même très-peu de champ, il serait difficile et long d'y amener les astres par vision directe. Seulement, dans les constructions habituelles, le tube du chercheur est fixement attaché à la surface du grand tuyau; au lieu que Fraunhoffer lui a donné autour de cette surface un mouvement de révolution qui maintient son axe

optique parallèle à l'axe du tuyau, ce qui était nécessaire pour que le chercheur pût toujours être amené dans des positions où il eût l'aspect libre du ciel, sans que sa ligne de vision fût obstruée par l'appareil transversal qui sert à écarter les deux segments de l'objectif, quelle que fût la direction occasionnellement donnée à la ligne de section. L'ensemble de l'instrument de Kœnigsberg est représenté dans la *fig.* 18, *Pl.* V. On comprendra aisément les détails de cette figure, d'après la description qui précède, surtout après que nous aurons analysé les effets de duplication que l'instrument est destiné à produire; et c'est à quoi je vais procéder.

145. D'après le principe de bissection sur lequel il est établi, lorsque les deux segments de l'objectif sont ramenés dans la position de leur coïncidence primitive, il en résulte un objectif circulaire complet, tel que le représente la *fig.* 19, où il est vu de face. Mais, lorsque le mouvement des vis directrices a séparé ces segments, comme le représente la *fig.* 20, on obtient deux demi-objectifs qui se touchent seulement par une portion de leur section commune, et dont les centres de figure individuels A′, A″ ont entre eux un certain écart, qui peut être mesuré par la division tracée sur les tiroirs, ou par les cadrans des vis que l'observateur a fait tourner au moyen des tiges de renvoi placées sous sa main. En supposant, comme Fraunhoffer, que les portions de lentilles sphériques qui constituaient primitivement l'objectif total ne se sont pas déformées sensiblement quand on l'a coupé, ces deux demi-objectifs auront la même configuration, les mêmes courbures, et un pouvoir réfringent égal. Seulement leurs axes de centrage seront devenus distincts, partant chacun des points A′, A″, perpendiculairement à leur plan commun. Mais leur action réfringente propre s'exercera autour de ces axes de la même manière, et avec les mêmes restrictions d'admissibilité qui convenaient à l'objectif complet. Donc, si des faisceaux lumineux partis des divers points d'un même objet très-distant, supposé ici au delà du tableau, arrivent à leurs surfaces antérieures, suivant des directions parallèles, comprises dans les conditions d'admissibilité qui leur sont communes, ils les concentreront autour de leur axe propre, dans des situations pareilles, sur un plan focal commun qui sera le même que celui de l'objectif

entier. Et ils donneront ainsi, dans ce plan focal, des images complètes de l'objet, comme cet objectif, mais de moitié moins lumineuses, parce que la portion semi-circulaire, qui est supprimée dans chacun d'eux, ne fait que diminuer d'autant la quantité de lumière conduite sur cette image, sans changer sa forme.

146. Ces préliminaires établis, je ramène idéalement les deux centres A′, A″ en coïncidence, comme dans la *fig.* 19; puis l'objectif étant ainsi redevenu complet, je le place perpendiculairement au plan de la *fig.* 21, où il est vu par sa tranche, et je le tourne sur lui-même de manière que la ligne de section LA soit dans ce plan. Alors, par son centre A, je mène la droite OAX, qui sera son axe central; et, perpendiculairement à celle-ci, j'en mène une autre OZ qui se trouvera parallèle à la ligne de section. Une troisième droite OY, perpendiculaire aux deux précédentes, et qui sort du plan de la figure, complète le système de coordonnées rectangulaires xyz, qui nous a servi habituellement.

Dans cet état de choses, toutes les formules que nous avons établies deviennent applicables à l'objectif complet, tant pour les rayons incidents compris dans le plan des xz, que pour ceux qui s'écarteraient de ce plan dans le sens des y. Et elles s'appliqueront de même à chacun des segments lorsqu'on les aura séparés, dans le sens des z, pourvu que l'on effectue les calculs autour de leurs axes propres. Par exemple, si le centre d'un des segments s'est élevé de A en A″, *fig.* 22, son axe propre sera A″ X″, parallèle à AX; et toutes nos formules auront lieu pour lui autour de la droite A″ X″, comme elles avaient lieu autour de AX, pour l'objectif complet. Donc, les ordonnées centrales des deux segments étant données, dans une quelconque des positions qu'ils peuvent prendre, si l'on suppose un objet rayonnant éloigné ou proche, situé dans le plan des xz, ou hors de ce plan, mais compris dans le cône antérieur d'admissibilité propre à chacun d'eux, on aura, par ces formules, les coordonnées focales de tous ses points, ainsi que le lieu et la forme de ses deux images, avec la plus complète généralité.

147. Mais quand on se borne aux applications astronomiques, cette généralité peut se restreindre; car on n'y emploie jamais l'héliomètre que pour mesurer la distance angulaire de points

rayonnants, situés sur la ligne de section; lesquels, par conséquent, seront ici compris dans le plan des xz de nos figures. Les foyers de ces points se formeront ainsi dans ce même plan, de sorte qu'il suffira de les déterminer par le concours des rayons incidents, réels ou fictifs, qui y sont compris. Pour ces rayons, les angles Y seront ainsi nuls, et les angles Z deviendront 90 — X, X étant leur inclinaison actuelle sur l'axe central du segment que l'on voudra considérer. Les formes du calcul seront alors les mêmes que nous avons employées à la fin du tome Ier, page 679, pour calculer les mesures angulaires données par les réticules à fils mobiles, et j'y emploierai les mêmes dénominations.

Ce mode d'observation exige donc que l'astronome puisse amener la ligne de section des deux segments dans le plan exact de l'angle visuel dont il veut avoir la mesure; et il faut que cette coïncidence se maintienne pendant le temps qu'il opère, sans être perpétuellement dérangée par le mouvement diurne qui entraîne tous les points du ciel. Pour cela, d'abord, comme je l'ai dit, le tube qui renferme le système optique est monté sur un appareil conduit par un mouvement d'horlogerie qui le fait tourner coniquement autour de l'axe de l'équateur, comme le ciel même. Puis, un autre mécanisme permet de tourner le double objectif dans son propre plan, de manière à diriger la ligne de section sur les deux points du ciel dont on veut mesurer la distance angulaire, et le premier mouvement l'y maintient quand elle y est une fois amenée. Ce mécanisme de direction existe aussi dans les lunettes à réticules qui servent à mesurer des angles célestes, et j'ai omis à tort de l'indiquer dans leur description. Tous ces mouvements divers, comme je l'ai dit encore, sont mesurés par des divisions tracées sur des lames métalliques, ou sur des limbes circulaires; et l'on détermine, par des opérations préalables, leurs indications primitives pour une position connue de l'instrument, par exemple lorsque la ligne de section est dirigée suivant le plan du méridien; après quoi la seule situation des index déplacés fait connaître la direction actuelle de cette ligne relativement à ce plan, ou au cercle de déclinaison actuel, dans toutes les positions où on l'amène. Ces déterminations s'effectuent sur chaque appareil conformément aux particularités

de sa construction, et, quoique très-faciles à comprendre comme à effectuer quand on l'a sous les yeux, elles seraient très-compliquées à expliquer avec des figures. C'est pourquoi je me borne à en indiquer le but et la nécessité.

148. Reprenant donc la *fig.* 21, qui représente les deux segments ramenés en coïncidence, je la reproduis *fig.* 23 avec les restrictions convenues § 145. Puis je prends d'abord pour objet un disque lumineux infiniment distant, placé perpendiculairement au plan des xz et dont le centre y soit compris. Ce sera, si l'on veut, le disque du soleil. Chacun des points de ce disque envoie à l'objectif un faisceau de rayons parallèles, qui couvre sa surface et que l'on suppose assez peu oblique à l'axe central AX pour être tout entier contenu dans les conditions d'admissibilité. Il en résulte une image circulaire complète du disque, qui se forme dans le plan focal principal de l'objectif, à la distance F de sa dernière surface, cette distance devant être construite comme antérieure si F est positif, et comme postérieure si F est négatif. Ce second cas est toujours celui qui se réalise dans les applications. Pour fixer les idées, je l'indique ainsi dans la figure; et ne voulant y donner qu'une simple indication des effets produits, je supprime, dans le tracé, l'épaisseur centrale de l'objectif, que nous ne négligerons pas toutefois dans le calcul. Alors S'A étant l'axe géométrique du faisceau incident qui part de l'extrémité supérieure du disque, le foyer de ce faisceau se formera sur le prolongement rectiligne de S'A en Σ', à la distance postérieure AF ou F, puisque F sera ici négatif; et pareillement, si S''A est l'axe géométrique du faisceau parti du sommet inférieur, le foyer de celui-ci se formera sur son prolongement en Σ'' dans le même plan focal; de sorte que $\Sigma'\Sigma''$ sera l'image focale du diamètre du disque situé dans le plan des xz; et l'angle S''AS', égal à $\Sigma''A\Sigma'$ dans la figure, sera celui que l'on veut mesurer. Je désigne ce diamètre focal de l'image par une flèche renversée, pour rappeler son inversion de sens comparativement aux deux sommets dont il dérive. Il est d'ailleurs inutile ici d'attribuer aux axes S'A, S''A une réfrangibilité particulière, puisque l'objectif étant supposé achromatique, tous les éléments lumineux hétérogènes qu'ils peuvent contenir sont censés se réunir au même point focal Σ'' ou Σ'.

149. Ceci convenu, j'emploie la même forme de calcul que nous avons appliquée aux réticules, tome Ier, page 679; et je vais déterminer ainsi les coordonnées focales des points Σ', Σ''. Pour cela, soient F, H, N, les trois éléments spécifiques de l'objectif non dédoublé, F étant sa distance focale principale déjà définie, H la distance de son point oculaire à sa dernière surface, construite, quant à son signe, suivant les mêmes conventions que F; et enfin N le grossissement angulaire qu'il imprime aux rayons incidents qui le percent à son centre de figure. Puisqu'il est supposé achromatique, les trois éléments F, H, N devront être censés constants pour toutes les réfrangibilités; et en outre ils s'appliqueront avec les mêmes valeurs à chacun des deux segments de l'objectif quand on le dédoublera. Soient alors :

$+X'$ l'angle formé avec l'axe central par l'axe du faisceau lumineux parti du bord S' du disque, figuré ici comme supérieur;

$+X''$ l'angle analogue formé avec le même axe par le faisceau parti du bord S'' figuré comme inférieur. Après la réfraction, les coordonnées focales de ces deux faisceaux auront les valeurs suivantes, que je caractérise par les mêmes accents déjà assignés à leurs angles X :

Sommet supérieur du disque S', foyer Σ', $z'_r = -N(F-H)\sin X'$; $\Delta'_r = F$.
Sommet inférieur S'', foyer Σ'', $z''_r = -N(F-H)\sin X''$; $\Delta''_r = F$.

Ce sont les mêmes formules générales que nous avons déjà employées tome Ier, page 679.

150. Maintenant je conserve toujours, pour objet idéal, le même disque infiniment distant. Mais les deux segments de l'objectif se séparent l'un de l'autre, par un mouvement relatif imprimé à leurs centres suivant les ordonnées z, leurs axes propres restant toujours parallèles aux x. C'est ce que représente la *fig.* 24, où l'un des centres est désigné par A', l'autre par A''. Dans la manœuvre habituelle adoptée par M. Bessel, un seul des segments est déplacé dans chaque observation, l'autre restant fixe, et centré sur la coïncidence idéale qui sert de point de départ; puis il est ramené du côté opposé pour réitérer une observation correspondante, ce qui dispense de fixer la coïncidence intermédiaire. Ce procédé est le plus exact que

l'on puisse employer dans la pratique de l'instrument, et il est aussi le plus commode, comme on le renconnaîtra dans un moment. Mais ici, pour la symétrie, comme pour la généralité du calcul, j'admettrai que les deux centres sont individuellement déplacés de quantités quelconques AA′, AA″ ou h', h'', parallèlement à l'axe des z, à partir d'une coïncidence primitive et idéale, opérée en A sur l'axe même des x. Alors les quantités h', h'' devront être prises avec les mêmes conditions de signe que les ordonnées z des formules générales, c'est-à-dire positives au-dessus de l'axe AX, négatives au-dessous. Après la séparation ainsi effectuée, chaque segment donnera une image complète du disque; et comme ses éléments spécifiques sont les mêmes que ceux de l'objectif entier, les ordonnées des sommets de cette image, rapportées à l'axe propre de chaque segment, dans la *fig.* 24, auront exactement les mêmes valeurs qu'autour de l'axe primitif AX dans la *fig.* 23. Donc, si on les rapporte maintenant à cet axe AX, en les désignant par des z pour le segment dont le centre est A″, et par des ζ pour celui dont le centre est A′, leurs expressions, dans la *fig.* 24, seront telles qu'il suit :

Centre A″, écart h''.	Sommet inférieur du disque S″,	foyer Σ″,	$z''_r = h'' - N(F - H)\sin$
	Sommet supérieur S′,	foyer Σ′,	$z'_r = h'' - N(F - H)\sin$
Centre A′, écart h'.	Sommet inférieur du disque S″,	foyer σ″,	$\zeta''_r = h' - N(F - H)\sin$
	Sommet supérieur S′,	foyer σ′,	$\zeta'_r = h' - N(F - H)\sin$

Je n'écris point l'expression des abscisses focales correspondantes à ces ordonnées, parce qu'elle est, ou est censée être la même pour toutes, et égale à la distance focale principale F.

Concevons les deux centres A′, A″, amenés à un écart relatif, tel que le bord inférieur Σ′ de l'image représentée comme la plus distante de l'axe primitif, coïncide avec le supérieur σ″ de l'image la moins écartée. La condition de cette coïncidence sera que z'_r égale ζ''_r. On aura donc, en établissant cette égalité :

$$h'' - N(F - H)\sin X' = h' - N(F - H)\sin X'';$$

d'où l'on tire

$$\sin X'' - \sin X' = -\frac{(h'' - h')}{N(F - H)}.$$

)r, les formules trigonométriques donnent rigoureusement

$$\sin X'' - \sin X' = 2 \sin \tfrac{1}{2} (X'' - X') \cos \tfrac{1}{2} (X'' + X');$$

nais, d'après les conditions d'admissibilité que nos formules sup-
osent, les angles X′, X″ doivent être restreints à des valeurs assez
etites pour que l'on puisse négliger les cubes de leurs sinus, com-
aratively à ces sinus mêmes. Donc, si l'on exprime les angles
X′, X″ en secondes de degré, on aura, dans cet ordre d'approxi-
nation,

$$\sin X'' - \sin X' = (X'' - X') \frac{\sin 1''}{1''};$$

t par suite

$$X'' - X' = - \frac{(h'' - h')}{N(F - H)} \cdot \frac{1''}{\sin 1''}.$$

X″ — X′ est justement l'angle visuel S″ A″ S′, ou S″ A′ S′, qui est
outendu au centre de figure extérieur de chaque segment, par le
iamètre du disque situé dans le plan des *xz*. Car nos formules,
estituant aux deux segments leur épaisseur centrale que nous
vions supprimée dans les figures, les angles X″, X′ s'appliquent,
n toute rigueur, aux deux faisceaux incidents émanés de chaque
ommet. Leur différence X″ — X′ est donc l'élément angulaire
même que l'on veut mesurer. Or, dans l'expression analytique que
ous en obtenons, le dénominateur N (F — H) peut se déterminer
irectement d'après la constitution de l'objectif, comme nous
'avons fait tome Ier, page 681 ; et l'on peut aussi trouver sa valeur
ar un procédé expérimental que j'indiquerai plus bas, lequel est
nalogue à la seconde méthode que nous avons employée alors.
Quant au numérateur $h'' - h'$, qui exprime l'intervalle actuel des
leux centres A″, A′, en continuant à prendre la *fig.* 24 pour type des
aisonnements, il sera mesuré par *la différence* des mouvements
que les vis conductrices v', v'', propres à chaque segment, lui auront
mprimés dans le sens des *z* positifs, à partir de la coïncidence pri-
nitive et idéale opérée en A, que nous avons prise comme point
de départ. Pour éviter les alternatives de signes, plaçons cette ori-
gine des mouvements au terme extrême et inférieur de l'axe des *z*

où les deux segments puissent être amenés en coïncidence. Alors les valeurs de h' et de h'' seront toujours positives dans les applications; et leurs valeurs individuelles seront exprimées par la course que l'index propre à chaque vis directrice aura décrite sur son cadran, depuis la coïncidence extrême. Soient donc ϖ', ϖ'' les longueurs des pas de chacune de ces vis à la température où l'on opère; et nommons m', m'' les nombres entiers ou partiellement fractionnaires de tours qu'elles auront décrits depuis cette origine de leur course, pour amener le contact des images tel que nous venons de le figurer. Alors $h''-h'$ sera égal à $m''\varpi''-m'\varpi'$. Ainsi, en le remplaçant par cette expression, on aura, dans notre *fig.* 24,

$$(1) \qquad X''-X' = -\frac{(m''\varpi''-m'\varpi')}{N(F-H)}\cdot\frac{1''}{\sin 1''}.$$

Et tous les éléments du second membre étant connus par l'observation, ou pouvant l'être, l'angle $X''-X'$ s'en conclura numériquement.

151. Maintenant, laissons le segment A′ fixe, mais ramenons le segment A″ vers l'origine des z, comme le représente la *fig.* 25. Dans ce mouvement nous rencontrerons une coïncidence qui aura lieu lorsque l'axe A″ X″ viendra se confondre avec A′ X′. Mais ne nous y arrêtons point, et continuons à transporter le segment A″ en A''_1, jusqu'à ce que son image focale propre vienne en contact inférieur avec l'image fixe donnée par A′. Dans cette position, représentée *fig.* 25, l'ordonnée centrale du segment déplacé ne sera plus h', comme dans la *fig.* 24; elle aura pris une autre valeur AA''_1, que je désigne par h''_1. Alors, en rapportant toujours à l'axe AX les ordonnées des sommets de l'image focale que ce segment donne, on aura évidemment :

Centre A''_1.	Sommet inférieur du disque S″,	foyer Σ''_1,	$z''_{1i} = h'_1 - N(F-H)\sin X''$.
	Sommet supérieur S′,	foyer Σ'_1,	$z'_{1s} = h''_1 - N(F-H)\sin X'$.

Les abscisses focales correspondantes à ces ordonnées sont censées être encore égales à F, comme précédemment. Si nous voulons

que le point supérieur Σ''_1 de cette nouvelle image coïncide avec l'inférieur σ' de la précédente, donnée par le segment A′ qui est resté fixe, il faudra faire $z''_{1\nu} = \zeta'_\nu$; conséquemment

$$h''_1 - N(F - H)\sin X'' = h' - N(F - H)\sin X' ;$$

d'où

$$\sin X'' - \sin X' = \frac{h''_1 - h'}{N(F - H)};$$

et enfin, dans les limites de petitesse des angles que nous considérons,

$$X'' - X' = \frac{(h''_1 - h')}{N(F - H)} \cdot \frac{1''}{\sin 1''}.$$

Exprimons, comme précédemment, les ordonnées h', h''_1, par les mouvements des vis directrices qui les produisent. Le segment A′ étant resté fixe, h' conservera sa même valeur $m'\varpi'$; mais h''_1 en aura une nouvelle, correspondante au nombre m''_1, de tours que l'index de la vis ν'' marquera dans la nouvelle position du centre A″. Cette valeur sera donc $m''_1\varpi''$, selon la notation que nous avons adoptée. Remplaçant ainsi h_1, et h''_1 par ces expressions, il en résultera

$$(2) \qquad X'' - X' = \frac{(m''_1\varpi'' - m'\varpi')}{N(F - H)} \cdot \frac{1''}{\sin 1''}.$$

132. Si les observations des contacts pouvaient être absolument rigoureuses et les vis parfaites, cette seconde valeur de $X'' - X'$ serait numériquement identique à celle que nous avions obtenue d'abord et désignée par (1). Dans la réalité pratique, on doit la considérer comme lui étant équivalente. La moyenne arithmétique entre ces résultats offrira donc une chance probable d'atténuer leurs erreurs propres par une compensation au moins partielle. En la formant, le produit $m'\varpi'$, relatif au segment qui est resté fixe, disparaît de lui-même, et il reste

$$(3) \qquad X'' - X' = \frac{(m''_1 - m'')\varpi''}{2N(F - H)} \cdot \frac{1''}{\sin 1''}.$$

L'angle cherché $X'' - X'$ se trouve alors exprimé par les seuls

mouvements d'une même vis qui est la directrice du segment déplacé. Maintenant rien n'empêche de répéter l'opération à partir de cette nouvelle position des segments, en laissant cette fois A″ fixe et transportant A′ de l'autre côté de l'axe A″ X″, de manière à opérer un nouveau contact qui donnera une nouvelle valeur de l'angle X″ — X′, semblable pour la forme à (3), mais exprimée par les seuls mouvements de la vis v'. Alors si l'on désigne par m'_1 le nombre entier ou partiellement fractionnaire de tours que l'index de cette vis v' marquera dans la position où le segment A′ aura été ainsi transporté, on aura, par une analogie évidente,

$$(4) \qquad X'' - X' = \frac{(m'_1 - m')\varpi'}{2N(F - H)} \cdot \frac{\sin 1''}{1''}.$$

Et cette valeur, exprimée par le seul mouvement de la vis v', sera encore équivalente à la précédente. A celle-ci on en pourra faire succéder une troisième, qui dépendra des seuls mouvements de v'' à partir de la position où le segment A″ s'était arrêté dans (3); puis une quatrième qui dépendra seulement de v', et ainsi de suite sur toute l'étendue de course que les segments A′, A″ pourront individuellement parcourir dans les tiroirs où ils sont maintenus. Alors, si l'on prend la moyenne de tous ces résultats, elle offrira deux avantages. Le premier consistera dans la compensation, au moins partielle, qui devra probablement s'établir entre les inexactitudes d'appréciation des contacts successifs, puisqu'il n'y aurait qu'une chance unique pour qu'elles soient toutes de même sens; le second consistera dans la compensation, non pas fortuite, mais nécessaire et rigoureuse, qui s'établira entre les erreurs des indications de l'index de chaque vis, aux positions successives où chaque segment aura été transporté, puisque ces erreurs agiront nécessairement en sens opposés sur les résultats consécutifs, de manière à ne laisser subsister que la première et la dernière, dont les effets seront atténués par le nombre total des opérations qui entre comme diviseur dans la valeur moyenne. Et cela se voit aussi dans les expressions (3) ou (4) elles-mêmes, que nous venons d'obtenir, puisque si l'on écrit celles qui répondent à une suite d'observations consécutives, et qu'on en fasse la somme, il ne reste dans le

second membre que la différence des valeurs extrêmes de m, toutes les intermédiaires disparaissant par les oppositions de signe, qui s'établissent entre elles. Cette méthode est celle qu'emploie constamment M. Bessel, comme je l'ai annoncé. Je rapporterai plus loin une série d'observations, effectuée ainsi par couples successifs, qu'il a donnée lui-même comme exemple. Et je supposerai toujours désormais qu'on opère de cette manière, en sorte que les expressions (3) ou (4) s'y appliqueront généralement, selon qu'on aura fait mouvoir un segment ou l'autre.

153. Je vais maintenant rapporter toutes ces mesures angulaires à une unité de leur espèce, qui sera l'ouverture d'angle que l'instrument embrasserait dans une observation complète, consistant en un seul couple de contacts, où la vis conductrice du segment mobile n'aurait décrit qu'un seul tour, en le rapprochant de l'axe AX, comme dans les *fig.* 24 et 25; en sorte que la différence $m'_1 - m'$, ou $m''_1 - m''$ fût égale à -1, comme diminuant les z positifs dans les conventions que nous avons adoptées. Cette réduction est la même que nous avons déjà effectuée pour les réticules à fils mobiles, t. Ier, page 681; seulement nous n'avions alors à considérer qu'une seule vis directrice, au lieu qu'ici nous en devons considérer deux, agissant indépendamment l'une de l'autre, et dont la marche propre peut n'être pas pareille. Mais le mode d'observations par couples, où chaque segment devient seul successivement mobile, l'autre restant fixe, va nous ramener précisément, pour chaque vis, aux mêmes conditions de calcul que dans le passage cité.

154. Adoptant donc une notation pareille à celle que nous avons employée alors, je désigne par $V_1^{(1)}$ l'angle élémentaire mesuré ainsi par un seul pas de la vis v', et par $V_2^{(1)}$ son analogue pour un seul pas de la vis v''. Ces définitions étant appliquées aux expressions (4) et (3), il en résultera évidemment

$$V_1^{(1)} = -\frac{\varpi'}{2N(F-H)} \cdot \frac{1''}{\sin 1''}; \quad V_2^{(1)} = -\frac{\varpi''}{2N(F-H)} \cdot \frac{1''}{\sin 1''}.$$

Alors, pour tout nombre m de tours, entier ou partiellement fractionnaire, que chaque vis aura décrit, dans le même sens,

dans un couple de contacts quelconque, en rapprochant de l'axe OX le segment qu'elle fait mouvoir, les angles $V_1^{(1)}$, $V_2^{(1)}$, mesurés par l'instrument, seront

$$V_1^{(m)} = mV_1^{(1)}; \qquad V_2^{(m)} = mV_2^{(1)}.$$

Si les deux segments étaient mus par la même vis conductrice, ou par des vis différentes dont les pas fussent rigoureusement les mêmes, ϖ' deviendrait égal à ϖ'', et par suite $V_1^{(1)}$ serait égal à $V_2^{(1)}$. Cette égalité m'a semblé devoir exister dans l'instrument de Kœnigsberg, à en juger par les indications que M. Bessel donne pour en évaluer les résultats. Mais, comme elle n'est pas nécessaire, et qu'elle peut même être difficile à réaliser avec une complète rigueur, je conserverai la généralité que nos formules permettent. Il ne restera donc ici qu'à évaluer les angles élémentaires $V_1^{(1)}$, $V_2^{(1)}$, d'après les longueurs données ϖ', ϖ'' des pas de chaque vis, combinées avec la constitution de l'objectif, conformément aux expressions qui les représentent, ou encore par une application expérimentale de l'instrument lui-même à des mires d'un diamètre connu, comme nous l'avons expliqué pour la lunette à réticule de Dorpat, tome Ier, page 679. Je reviendrai plus loin sur ces déterminations.

158. Jusqu'ici j'ai supposé que le contact des images s'opérait et s'observait immédiatement dans le plan focal où elles se forment, comme on pourrait les y voir projetées sur un tableau blanc, ou sur un verre dépoli. Mais on apercevra bien plus exactement ce contact, si on l'observe avec un oculaire positif, doué d'un pouvoir amplifiant, et dont l'axe propre, parallèle aux axes des segments, puisse être transporté à volonté à peu près, ou exactement sur la direction du point focal commun aux deux images. Car alors, en prenant pour exemple la disposition de contact de la *fig.* 24, si la différence des deux ordonnées focales z'_1, z''_1 n'est pas absolument nulle, l'intervalle $z'_1 - z''_1$, qui séparera encore les sommets des deux disques, sera comme un très-petit objet, terminé par deux points, ou par deux secteurs lumineux, qui se présentera dans le champ de l'oculaire, tout près de son axe; et l'on pourra le voir amplifié à travers l'oculaire, en amenant ce dernier expérimenta-

ement à la distance Δ' du petit objet où il en donne la perception a plus distincte. Donc, si les éléments spécifiques propres de l'oculaire sont F', H', N', l'intervalle des deux images sera vu nettement, au devant de l'œil, avec une grandeur focale finale ayant pour expression

$$(z'_v - \zeta''_v)\frac{N'(F' - H')}{\Delta'}.$$

Cette grandeur paraîtra donc d'autant plus considérable que le pouvoir amplifiant de l'oculaire sera plus fort, pour la distance Δ' à laquelle il agit. On pourra donc d'autant mieux juger si elle n'est pas tout à fait nulle; et alors on la rendra telle en faisant marcher le segment mobile jusqu'à ce que cette condition de nullité paraisse remplie. Quand cela aura lieu, l'expression précédente sera nulle aussi, et en la dégageant du facteur commun $\frac{N'(F' - H')}{\Delta'}$ qui ne peut l'être lui-même, on aura, comme précédemment, mais avec une bien plus grande certitude,

$$z'_v = \zeta''_v.$$

En appliquant de même l'oculaire à l'observation du second contact représenté *fig.* 25, on en tirera de même, mais toujours avec bien plus de certitude,

$$z''_{1v} = \zeta'_v;$$

et ces deux égalités combinées reproduiront la formule (3), comme précédemment. Seulement la course qu'il faut faire parcourir à la vis mobile pour opérer exactement les deux contacts sera devenue bien plus certaine; et l'emploi ultérieur de l'oculaire amplifiant n'a pas d'autre avantage que de faire plus évidemment constater la coïncidence des sommets des deux images, dans chaque contact successif. J'ai supposé ici l'oculaire du genre positif, pour conserver à chaque image sa réalité dans le raisonnement. Mais il pourrait aussi bien être négatif, auquel cas il s'appliquerait aux deux images virtuelles, données par les segments dans son intérieur; et il servirait de même pour réaliser leur contact avec plus d'exactitude que si on les observait directement à la vue simple sur une projection.

156. Toutefois, l'application de cet intermédiaire à l'observation simultanée des points focaux réels ou virtuels Σ', σ'', ou Σ'_1, σ', comporte une difficulté particulière, qui n'existerait pas s'ils étaient des points lumineux réels, dont l'amplitude de radiation fût indéfinie. En effet, dans ce dernier cas, l'intensité spécifique de cette radiation étant égale dans tous les sens, pour chacun des deux points, ou des deux sommets lumineux, amenés en coïncidence, leur contact se jugerait également bien à quelque partie du champ de l'oculaire qu'on les fît répondre. Mais ici, en prenant pour type la *fig.* 24, le pinceau concentré en Σ' a tous ses rayons concentrés dans le cône visuel, qui a ce point pour sommet, et pour base la surface du segment, dont le centre de figure est A''; tandis que le pinceau concentré en σ'' a pour base le segment dont le centre est A'. Or, chacun de ces cônes se propageant au delà du plan focal, suivant la direction de son axe central propre, $\Sigma'A''$ ou $\sigma''A'$, l'inclinaison relative de ces axes les fait diverger entre eux à partir du point focal $\Sigma'\sigma''$, qui leur est devenu commun; et cette divergence est encore ultérieurement agrandie par le pouvoir amplifiant de l'oculaire à travers lequel on les observe. C'est pourquoi, si l'observateur ne place pas sa pupille dans une position telle, qu'elle puisse recevoir toute la lumière émergente qui constitue chaque pinceau, ou au moins une égale portion de chacun d'eux, ils lui paraîtront avoir d'inégales intensités, et cette dissemblance s'étendra aux parties des deux images qui avoisinent les points de contact. De là résultera une difficulté pour constater qu'elles se touchent en effet, sans empiétement ni séparation. Car l'appréciation de cette particularité est singulièrement favorisée par les caractères de symétrie des deux images, et la seule dissymétrie de leurs intensités suffit pour la rendre beaucoup plus douteuse. Tout cela est, en effet, confirmé par l'expérience des personnes qui ont employé l'héliomètre à la mesure des petits angles; et l'on admet généralement qu'il faut avoir une grande pratique de cet instrument, ainsi qu'une grande adresse à l'employer, pour en tirer des résultats certains.

157. On peut encore craindre que le passage des rayons réfractes, près de la surface de section de chaque segment, ne cause quelque défectuosité dans la formation des points focaux, non pas tant

pour la portion de lumière qui peut manquer d'y être transmise, puisque tout le reste des surfaces y concourt, qu'à cause des distorsions ou des inégalités de distance focale que les rayons réfractés dans ces parties peuvent y apporter. M. Bessel avoue qu'il se forme ainsi, même dans l'excellent héliomètre de Fraunhoffer, des rayonnements de lumière étrangers aux images focales; mais il assure que leur direction est uniquement perpendiculaire à la ligne de section, de sorte qu'on peut toujours parfaitement en distinguer les foyers réguliers et les mettre sûrement en contact l'un avec l'autre. On doit le croire, d'après l'accord des résultats que lui donnent les évaluations partielles des mêmes angles; mais on peut présumer aussi que cette grande concordance est due à son extrême habileté, et serait bien moins accessible pour d'autre que pour lui.

158. Il s'opère évidemment une compensation probable entre les causes d'incertitude, lorsque l'observation est alternativement réitérée, en amenant successivement le segment mobile des deux côtés de l'axe central du segment resté fixe, comme le pratique M. Bessel. Même, quand il emploie l'instrument pour mesurer l'arc de distance compris entre deux étoiles très-voisines, ce qui est un de ses principaux usages, cet habile observateur ne cherche pas immédiatement cet arc. Mais il dédouble chacune des deux étoiles de manière à obtenir, sur la ligne de section, quatre points lumineux, qu'il amène à avoir entre eux des distances sensiblement égales entre elles, égalité que l'œil paraît apprécier avec une grande certitude lorsque les intervalles des points lumineux que l'on compare sont extrêmement petits, comme c'est le cas dans cette application. L'écart total des deux segments qui donne cette équidistance est ainsi évidemment double de celui qui correspondrait à la distance simple; et en répétant l'observation pour une position opposée de l'objectif mobile, la marche totale de la vis directrice se trouve quadruple de cette distance, ce qui accroît la précision avec laquelle la distance simple s'obtiendrait par un seul contact. Je rapporterai à la fin de ce chapitre une série d'observations ainsi effectuée par M. Bessel, pour mesurer la distance des deux étoiles dans lesquelles α d'Hercule se dédouble quand on l'observe avec de forts grossissements.

159. Il ne me reste plus qu'à expliquer le procédé expérimental

par lequel on peut déterminer les valeurs des angles élémentaires $V_1^{(1)}, V_2^{(1)}$, correspondantes à un seul pas de chaque vis directrice, sans les conclure de la constitution de l'objectif. Ce procédé est exactement semblable à celui que nous avons employé pour déterminer expérimentalement les angles analogues dans les lunettes à réticule, tome Ier, page 681 ; il n'y a de différence que dans le mode de mesurage qui est propre à chaque instrument.

La disposition idéale de l'expérience est représentée dans la *fig.* 26, que l'on a été obligé de construire hors de toutes proportions réelles, pour en rendre les détails sensibles. Mais, comme nous la généraliserons en exprimant tous ses éléments par des lettres susceptibles de valeurs quelconques, nous pourrons légitimement l'employer pour type de raisonnements. Elle est, de même que les précédentes, rapportée à un système de coordonnées rectangulaires x, z, dont OX, OZ sont les axes respectifs. Pour fixer les idées, je supposerai OX horizontal, OZ vertical, et je prendrai les x positifs en allant de O vers X, les z positifs en allant de O vers Z. J'admettrai en outre que, dans l'application actuelle, l'axe de l'instrument étant rendu horizontal, la verticale AV, parallèle aux z, représente la ligne de section sur laquelle les centres des segments de l'objectif peuvent se mouvoir ; et que le point le plus bas où ils puissent être mis en coïncidence soit situé en A, sur l'axe même des x, en sorte que les ordonnées AA′, AA″ de ces centres restent toujours positives dans les observations subséquentes, où on les aura séparées. Mais ici, l'objet observé ne sera plus le disque d'un astre infiniment distant. Ce sera, par exemple, un disque matériel circulaire, exactement mesuré, fixe normalement à l'axe des x, et dont le centre sera situé dans le plan des xz, de sorte qu'il se projettera sur la figure, suivant son diamètre vertical S′ S″, dont je désigne la grandeur absolue par D. Ce pourrait être également une simple règle ainsi placée verticalement, marquée de traits transverses, espacés à intervalles égaux, et dont les parties, distantes entre elles, serviraient d'objets, comme dans les opérations du même genre, effectuées pour les lunettes à reticule, tome Ier, page 682. Mais ici, je conserverai l'idée de disque dans les énoncés, afin de les rendre analogues à ceux que nous avons tout à

l'heure obtenus relativement aux astres. L'objet S′ S″ étant ainsi placé au devant de l'instrument, on mesure avec soin sa distance horizontale AS ou Δ à la ligne de section, et il faut que cette distance soit très-grande comparativement à son diamètre, ou à l'intervalle de ses parties divisées que l'on voudrait prendre pour mire, afin que les pinceaux lumineux émanés de ses points extrêmes, en pénétrant les surfaces objectives, ne forment, avec les axes propres de ces surfaces, que de très-petits angles, compris dans les limites d'admissibilité. Ceci convenu, on fait mouvoir les centres A′, A″ des deux segments, au moyen de leurs vis conductrices, et on les amène simultanément dans une position relative telle, que les deux images renversées de S′ S″ se touchent en Σ′ et σ″ par leurs bords contraires, comme dans les observations faites sur les astres; puis on lit sur la division rectiligne des tiroirs, ou sur les cadrans circulaires des vis conductrices, les points où se sont arrêtés les index qui marquent leur position. Cette première opération étant effectuée, on laisse un des segments, par exemple A′, fixe, et l'on fait mouvoir l'autre A″ sur la ligne de section, en le transportant du côté opposé de l'axe A′ X′, comme le représente la *fig.* 27, de manière à opérer une seconde coïncidence de sens inverse entre les images des sommets. On lit alors de nouveau les index. Cette seconde détermination se combine avec la première, comme dans les observations faites sur les astres, à cela près qu'il faut y faire intervenir le diamètre linéaire D de la mire, ainsi que sa distance Δ, pour avoir la valeur de l'angle mesuré par le déplacement du segment rendu mobile. De là on conclut le rapport de ces deux éléments, qui fait connaître l'angle élémentaire $V_2^{(1)}$ correspondant à un tour de la vis conductrice du segment A″ que l'on a fait mouvoir; et un autre couple d'observations pareilles, où celui-ci reste fixe, donne de même la valeur de $V_1^{(1)}$ pour l'autre segment. Mais, avant d'effectuer ce calcul, il faut généraliser idéalement quelques particularités de situation ou de direction relatives que nos figures semblent indiquer, parce qu'on les y a admises pour les rendre plus simples, et qui ne sont nullement essentielles aux raisonnements.

160. D'abord, en décrivant les préparatifs de l'expérience, j'ai

considéré comme verticale la longueur linéaire connue S'S'' qui sert d'objet. Elle pourrait aussi bien avoir toute autre direction dans notre plan des xy, et y être par exemple horizontale, pourvu que la ligne de section des deux segments fût alignée sur elle, que leurs axes propres lui restassent de même perpendiculaires, et que l'on connût de même la distance normale Δ comprise entre la ligne de mire et la ligne de section. Alors, le plan commun à ces deux droites pourrait encore être pris pour plan des xz, comme nous l'avons fait. En outre, je désignerai ici par h', h'' les ordonnées absolues AA', AA'' des centres des deux segments au-dessus de l'axe OX, comme dans les observations faites sur les astres; et je nommerai C', C'' les ordonnées analogues des deux extrémités de la mire. Mais les positions de ces points, représentées dans les figures, n'ont rien d'absolu ; elles sont seulement assujetties à la condition que les pinceaux lumineux émanés de S' et de S'', conséquemment de tous les points intermédiaires de la mire, puissent pénétrer les deux segments dans les limites d'inclinaison nécessaires pour leur admissibilité. Enfin, ceux de ces rayons qui font leur incidence au centre de figure des segments sont représentés ici comme continuant leur route en ligne droite après la réfraction qu'ils subissent, ce qui ne peut avoir lieu généralement que si les épaisseurs centrales des segments étaient insensibles. Mais ceci n'a été admis que pour la simplicité des figures, et nos formules ne restreindront pas le calcul à cette limitation.

161. En effet, pour obtenir les quatre coordonnées focales des points extrêmes S'S'' de la mire, autour de l'axe propre de chaque segment, sans recourir à ces suppositions particulières, il suffit d'appliquer à chacun d'eux les expressions générales de ces coordonnées, comme nous l'avons fait dans le tome Ier, pages 675 et 681, pour les réticules à fils mobiles, lorsque nous considérions les mires divisées qui servent à les régler. Nommons toujours F, H, N les trois éléments spécifiques de l'objectif total, que l'on suppose aussi convenir à ses segments individuels. Considérons un point lumineux placé au devant de ce segment à la distance Δ, et dont l'ordonnée z, mesurée *au-dessus de son axe*, soit $+$ C. Désignons par $\Delta_{,}$ et $z_{,}$ les deux coordonnées focales de ce point, $\Delta_{,}$ étant pris

comme positif, en avant de la surface d'émergence du segment considéré, et z_f comme positif au-dessus de son axe central propre. Ces deux coordonnées seront déterminées généralement par les équations suivantes qui ont été établies tome Ier, page 454. J'y fais seulement $u = u_m = 1$ pour exprimer qu'en vertu de l'identité du milieu ambiant, les vitesses d'incidence et d'émergence de chaque rayon lumineux deviennent ici égales entre elles, et entrent comme unités de vitesse dans les éléments F, H, N de l'appareil dioptrique que nous employons : nous aurons ainsi

$$\frac{1}{\Delta_f - H} = \frac{1}{F - H} + \frac{N^2}{\Delta}; \qquad z_f = \frac{C}{\Delta} N (\Delta_f - H).$$

Alors les ordonnées des quatre points focaux de la *fig.* 26, comptées à partir de l'axe primitif OX, auront les expressions suivantes, qui ne sont que les applications de celle de z_f à l'axe propre de chaque segment :

mire A″, sommet inférieur de la mire S″, foyer Σ″, $z''_f = h'' + \frac{(C'' - h'')}{\Delta} N (\Delta_f - H)$;

sommet supérieur S′, foyer Σ′, $z'_f = h'' + \frac{(C' - h'')}{\Delta} N (\Delta_f - H)$.

mire A′, sommet inférieur de la mire S″, foyer σ″, $\zeta''_f = h' + \frac{(C'' - h')}{\Delta} N (\Delta_f - H)$;

sommet supérieur S′, foyer σ′, $\zeta'_f = h' + \frac{(C' - h')}{\Delta} N (\Delta_f - H)$.

Je n'écris pas la distance focale de ces quatre foyers, parce qu'elle leur est censée commune et égale à Δ_f.

162. Dans cette première position des deux segments on opère le contact de Σ′ avec σ″, comme dans la première observation faite sur les astres. Puis, laissant A′ fixe, on transporte A″ en A''_1 du côté opposé de l'axe A′X′ pour opérer un contact inverse. C'est ce que représente la *fig.* 27. Alors h' reste constant, mais h'' change, et devient, par exemple, h''_1. Dans ce second état de choses, l'abscisse focale de l'image donnée par le segment A″ est toujours censée rester la même et égale à Δ_f. Mais les ordonnées de ses sommets

prennent de nouvelles valeurs $z''_{1,f}$, $z'_{1,f}$, qui s'expriment comme il suit :

Centre A''_1, sommet infér. de la mire S'', foyer Σ''_1, $z''_{1,f} = h''_1 + \frac{(C''-h''_1)}{\Delta} N(\Delta_f - H)$;

sommet supérieur S', foyer Σ'_1, $z'_{1,f} = h''_1 + \frac{(C'-h''_1)}{\Delta} N(\Delta_f - H)$.

Il ne reste plus qu'à égaler z'_f à ζ''_f, et $z''_{1,f}$ à ζ'_f pour établir les conditions des deux contacts que nous voulons opérer ; on aura ainsi les deux équations suivantes :

Fig. 26 : coïncid. de Σ' avec σ'', $h'' + \frac{(C'-h'')}{\Delta} N(\Delta_f - H) = h' + \frac{(C''-h')}{\Delta} N(\Delta_f - H)$

Fig. 27 : coïncid. de Σ''_1 avec σ', $h''_1 + \frac{(C''-h''_1)}{\Delta} N(\Delta_f - H) = h' + \frac{(C'-h')}{\Delta} N(\Delta_f - H)$

Retranchant la seconde équation de la première, h' disparaît, et il reste

$$h'' - h''_1 + \frac{[C' - C'' - (h'' - h''_1)]}{\Delta} N(\Delta_f - H) = \frac{(C''-C')}{\Delta} N(\Delta_f - H);$$

ou encore

$$h'' - h''_1 = -\frac{[2(C' - C'') - (h'' - h''_1)]}{\Delta} N(\Delta_f - H).$$

163. D'après les conventions que nous avons attachées à notre système de coordonnées rectangulaires, $C' - C''$ est l'excès positif de l'ordonnée supérieure de la mire sur l'ordonnée inférieure. C'est donc la longueur absolue de cette mire que je désigne par $+ D$. Pareillement $h'' - h'_1$ est l'excès positif de la première ordonnée AA'', sur la seconde AA''_1 du segment mobile, toutes deux étant comptées positivement au-dessus de l'axe OX. Plaçant ici en A l'origine des mouvements imprimés par les vis directrices, et les prenant avec le sens positif quand ils accroissent les ordonnées z des centres des segments comme nous l'avons fait dans les observations des disques célestes, h'' sera exprimé par $m''\varpi''$, et h''_1 par $m''_1\varpi''$; ϖ'' désignant la longueur des pas de la vis v'', qui conduit le centre A'', et m'', m' les nombres de tours que cette vis aura dé-

partir de l'origine A pour amener le segment dans ses deux ns successives. Alors, dans les figures que nous prenons pour es raisonnements, $h'' - h''_1$ ou $(m'' - m''_1)\varpi''$ sera un pro- ositif, dans lequel le facteur $m'' - m''_1$ exprimera le nombre ou partiellement fractionnaire de tours que la vis v'' aura pour ramener le centre du segment A″ de sa première à sa e position. Soit m ce nombre, qui sera positif dans nos les; notre équation de condition, transformée dans ces es nouvelles, deviendra

$$m\varpi'' = -\frac{(2D - m\varpi'')}{\Delta} N(\Delta_f - H),$$

on tire

$$\frac{\varpi''}{N(\Delta_f - H)} = -\frac{2D}{m\Delta} + \frac{\varpi''}{\Delta}.$$

uation qui détermine Δ_f en Δ, étant divisée par N et mul- par ϖ'', donne évidemment

$$\frac{\varpi''}{N(\Delta_f - H)} = \frac{\varpi''}{N(F - H)} + \frac{N}{\Delta}.$$

emier membre de cette équation est identique à celui de cédente. Égalant donc leurs valeurs, on en tirera celle de $\frac{''}{- H)}$, laquelle sera

$$\frac{\varpi''}{N(F - N)} = -\left[\frac{2D}{m\Delta} + \frac{(N - 1)\varpi''}{\Delta}\right].$$

enant, lorsque nous considérions les observations célestes, avons rapporté le mouvement du segment A″ à une unité an- e $V_2^{(1)}$ dont l'expression était

$$V_2^{(1)} = -\frac{\varpi''}{2N(F-H)} \cdot \frac{1''}{\sin 1''},$$

équivaut à

$$\sin V_2^{(1)} = -\frac{\varpi''}{2N(F - H)},$$

puisque l'angle $V_2^{(1)}$ et même ses multiples, mesurés par l'instrument, sont supposés assez petits pour que l'on puisse les considérer comme proportionnels à leurs sinus. L'équation à laquelle nous venons de parvenir fournira donc la valeur de $\sin V_2^{(1)}$, laquelle sera

$$\sin V_2^{(1)} = + \frac{D}{m\Delta} + (N - 1)\frac{\varpi''}{2\Delta}.$$

Concevons maintenant que l'on poursuive l'observation de la mire, en laissant le segment A″ dans sa nouvelle position et faisant mouvoir le segment A′, par le moyen de sa vis directrice v'. Si cette vis, dont le pas est ϖ', décrit un nombre entier ou fractionnaire de tours exprimé par μ, en amenant le centre du segment, depuis le premier jusqu'au second contact, on aura l'expression de son angle élémentaire $V_1^{(1)}$ par une formule pareille qui sera :

$$\sin V_1^{(1)} = + \frac{D}{\mu\Delta} + (N - 1)\frac{\varpi'}{2\Delta}.$$

164. Le premier terme de ces expressions est entièrement composé de quantités observables. Le second exprime la correction qu'il faut y faire pour obtenir les angles élémentaires $V_1^{(1)}$, $V_2^{(1)}$, applicables aux objets célestes, en les déduisant ainsi des angles visuels soutendus par une mire qui n'est pas à une distance infinie du double objectif. Mais ce terme sera insensible lorsque la distance Δ sera très-grande comparativement à ϖ' et à ϖ'', comme on a toujours soin de le faire pour ces épreuves. Car déjà le rapport $\frac{\varpi}{2\Delta}$ deviendra très-petit par cette précaution. Or le facteur $N - 1$ qui le multiplie sera généralement presque nul par lui-même, le peu d'épaisseur centrale des objectifs y rendant toujours N presque égal à $+1$ qui serait sa valeur limite pour un objectif supposé infiniment mince à son centre. Le produit de ces deux quantités, individuellement si petit, sera donc *toujours* négligeable dans de telles circonstances. Ainsi le seul premier terme des expressions précédentes donnera l'évaluation numérique des angles élémentaires $V_1^{(1)}$, $V_2^{(1)}$, qui seraient individuellement mesurés, par un seul pas d'une des deux vis, dans les

observations de double contact faites sur des objets célestes. Alors, d'après la petitesse supposée de tous les angles de ce genre auxquels l'instrument s'applique, si dans la *double observation* d'un objet céleste la vis conductrice v' ou v'' du segment rendu mobile a décrit un nombre entier ou partiellement fractionnaire de tours exprimé par n, l'angle visuel $V_1^{(n)}$ ou $V_2^{(n)}$, soutendu par l'objet, aura pour valeurs

$V_1^{(n)} = n\ V_1^{(1)}$ s'il est mesuré par la vis v' qui conduit le segment A';
$V_2^{(n)} = n\ V_2^{(1)}$ s'il est mesuré par la vis v'' qui conduit le segment A''.

165. On pourrait s'étonner de voir ici le terme correctif de $V_1^{(1)}$ et de $V_2^{(1)}$ s'évanouir rigoureusement dans la supposition de $N = +1$, tandis que la même supposition ne fait pas disparaître le terme analogue dans l'expression de l'angle élémentaire $X^{(1)}$ propre aux micromètres à réticules, que nous avons obtenue par des opérations du même genre, tome Ier, page 682. Cela tient à ce qu'alors les deux extrémités de l'image focale restaient fixes autour du même axe central du système optique, pendant que la vis micrométrique mesurait la longueur de cette image; au lieu que, dans les observations faites par dédoublement, l'axe propre au segment rendu mobile est lui-même transporté parallèlement à la mire; et le terme correctif qui résulte de ce transport introduit dans l'expression finale le facteur $N - 1$ au lieu de N, ce qui produit la compensation que nous obtenons dans ce second cas.

166. D'après des épreuves qu'il n'a pas décrites, mais que l'on doit présumer avoir été analogues à celles que je viens d'indiquer, M. Bessel admet que l'angle élémentaire $V^{(1)}$, mesuré par un seul pas de la vis de son instrument dans une observation faite par double contact, a pour valeur $26'',45894$, à la température de $49^\circ,2$ du thermomètre de Fahreinheit, laquelle correspond à $9^\circ\frac{1}{9}$ de notre thermomètre centésimal (*). Ainsi que je l'ai annoncé, il ne

(*) M. Bessel a pris pour élement de ses calculs $2\ V^{(1)}$ ou $52'',91788$ qui serait mesuré par *deux tours* de la vis conductrice dans une observation complète, composée de deux contacts successivement alternés, ce qui donnerait un *seul tour* pour l'écart opéré autour de la coïncidence intermédiaire

présente pas cette évaluation comme s'appliquant à une des vis conductrices plutôt qu'à l'autre, ce qui montre qu'il leur attribue une marche identique. Il faut maintenant examiner quelle influence les variations de la température devront exercer sur cet élément fondamental.

167. Pour cela, je reprends l'expression théorique de l'angle $V^{(1)}$, que nous avons trouvée être généralement

$$V^{(1)} = -\frac{\varpi}{2N(F-H)} \cdot \frac{1''}{\sin 1''},$$

ϖ désignant la longueur du pas de la vis que l'on veut considérer.

Concevons le second membre évalué pour un certain degré du thermomètre qui nous servira d'origine. Si la température de l'instrument s'élève au-dessus de ce terme, ϖ augmentera par la dilatation de l'acier dont la vis est faite, et l'angle $V^{(1)}$ correspondant à un seul tour de cette vis en sera agrandi. Mais il ne serait pas impossible que le facteur $N(F-H)$ qui dépend des éléments spécifiques de l'objectif éprouvât aussi quelque variation dans cette même circonstance, soit par l'expansion du verre qui constitue chaque lentille, soit en vertu d'une modification opérée par le changement de la température dans son pouvoir réfringent, soit parce que les deux segments contenus dans leurs montures de cuivre éprouveraient quelque pression qui changerait inégalement leurs courbures propres. Alors les effets de ces diverses causes se combineraient avec les variations de ϖ pour changer la valeur de l'angle $V^{(1)}$. On peut résumer approximativement les résultats possibles de leur influence dans un fait physique, en considérant la composition du produit $N(F-H)$. Car, d'abord, le facteur N qui diffère très-peu de l'unité, ne saurait éprouver que des changements de valeur à peine sensibles. Ainsi les variations qui pour-

---

et idéale des deux segments. Mais aussi, dans chaque observation de double contact, il prend pour multiple de $2V^{(1)}$ la *moitié* du nombre de tours décrits par la vis du segment rendu mobile, c'est-à-dire $\frac{1}{2}m$. De sorte que le produit $\frac{1}{2}m\,2V^{(1)}$ qui exprime l'arc $V^{(m)}$ en secondes de degré est finalement $mV^{(1)}$, comme dans notre notation.

nt devenir appréciables devraient porter sur le facteur F — H, exprime la distance du foyer principal de l'oculaire à son point laire propre. Il faudrait donc que cette distance, très-peu difnte de la distance focale principale, éprouvât des changements ibles par quelqu'une des causes que nous venons d'indiquer. les deux premières, c'est-à-dire l'expansion du verre et la ation de son pouvoir réfringent par les seules différences de mpérature ambiante, semblent bien faibles pour produire des rations appréciables dans la valeur de F — H, et leurs effets paru à M. Struve absolument négligeables dans la grande lue de Dorpat, comme nous l'avons vu tome Ier, page 684. Il ne erait donc à suspecter que des circonstances de déformation ne pourraient être appréciées théoriquement, mais seulement l'expérience. Toutefois, comme M. Bessel s'est trouvé conduit ses observations à admettre que les variations de la température ont sur la distance focale une influence directe qui modifie iblement l'angle V[1], indépendamment de toute cause de déation mécanique, je vais donner ici l'expression exacte des ations que les seules causes physiques régulières peuvent proe sur le facteur N (F — H); et cela aura l'avantage de montrer quelle simplicité nos formules générales s'appliquent à des cas pparence si compliqués, sans négliger aucun des détails qui ncourent.

68. Pour cela il suffit de se rappeler que, dans dans tout inment d'optique ayant ses quatre coefficients généraux N, P, Q, R ujettis à l'équation de condition NR — PQ = 1, on a toujours

$$F - H = \frac{u_m}{NP}; \quad \text{conséquemment } \frac{1}{N(F-H)} = \frac{P}{u_m}.$$

est la vitesse d'émergence des rayons lumineux que l'on consie. Cette formule a été démontrée tome Ier, page 453. Maintenant l'instrument opère dans un milieu ambiant de nature uniforme, la vitesse d'émergence u_m est prise pour unité, la formule devient

$$\frac{1}{N(F-H)} = P.$$

Dans cette expression, les coefficients N, P, Q, R sont calculés pour le nombre total de surfaces qui entre dans la composition de l'instrument, soit qu'elles agissent par réfraction, ou par réflexion, ou de ces deux manières arbitrairement alternées. Lorsque l'instrument est purement dioptrique, les expressions de ces coefficients peuvent être contractées en formes plus simples, à cause du retour périodique de chaque rayon à une même vitesse, de deux en deux surfaces, comme nous l'avons fait au commencement du présent volume; et nous avons démontré alors, page 14, qu'en nommant i le nombre total des lentilles, le coefficient N devient N_i, P devient P_i, dont nous avons donné les expressions explicites, i étant quelconque. En nous conformant à cette notation, on aura, pour tout instrument dioptrique composé de i lentilles agissant dans un même milieu ambiant;

$$\frac{1}{N_i(F-H)} = P_i;$$

résultat que l'on déduirait immédiatement des expressions générales, propres aux appareils dioptriques, rapportées dans le tableau annexé à la page 25 du volume actuel.

Dans l'instrument de Kœnigsberg, l'objectif est composé de deux lentilles. On a donc alors $i = 2$, P_i devient P_2, et il en résulte finalement

$$V^{(1)} = -\tfrac{1}{2}\varpi P_2 . \frac{1''}{\sin 1''}.$$

Or, nous avons précisément formé l'expression explicite de P_2 dans la page 35, quand nous avons cherché les conditions d'achromatisme des objectifs à deux lentilles. En la transportant ici, on aura tous les éléments qui entrent dans sa composition rigoureuse, et il ne restera plus qu'à faire subir à chacun d'eux les variations que le changement de la température peut y opérer.

169. A cet effet, concevons $V^{(1)}$ évalué numériquement pour une certaine température, à partir de laquelle nous compterons les degrés du thermomètre centésimal que nous désignerons par t, en les prenant positifs au-dessus de cette origine, négatifs au-dessous. Soit $(V)^{(1)}$ cette valeur spéciale : la température venant à changer,

us les éléments qui composent $V^{(1)}$ éprouvent des variations que désigne par la caractéristique δ appliquée à chacune des lettres ui les expriment, et je suppose ces variations si petites qu'on puisse borner à tenir compte de leur première puissance, ce qui sera ès-légitime, puisqu'elles ne résultent pas d'une modification arti-ielle et considérable de la température, mais seulement des chan-ments très-restreints, qui peuvent naturellement y survenir dans milieu ambiant. Opérant donc ainsi sur $V^{(1)}$ comme par différen-ıtion, nous aurons d'abord

$$\delta V^{(1)} = -\tfrac{1}{2}(P_2\,\delta\varpi + \varpi\,\delta P_2)\frac{1''}{\sin 1''};$$

en divisant les deux membres de cette équation par $V^{(1)}$,

$$\frac{\delta V^{(1)}}{V^{(1)}} = \frac{\delta\varpi}{\varpi} + \frac{\delta P_2}{P_2};$$

où enfin

$$(1) \qquad \delta V^{(1)} = V^{(1)}\left(\frac{\delta\varpi}{\varpi} + \frac{\delta P_2}{P_2}\right).$$

ıand les différentiations encore indiquées dans le second membre ront effectuées explicitement, et exprimées en fonction de t, il ıdra donner à tous leurs coefficients algébriques, et au facteur mmun $V^{(1)}$, les valeurs initiales correspondantes à $t = 0$.

170. Le rapport $\frac{\delta\varpi}{\varpi}$ est facile à évaluer. C'est évidemment la latation linéaire de l'acier trempé dont la vis est faite; nous avons jà rencontré ce terme en calculant l'influence de la température r les indications des vis micrométriques, tome Ier, page 668, et us lui avons assigné sa valeur numérique $+ 0{,}00001378.t$. Je xprimerai ici abréviativement par $+ at$, en désignant son coeffi-ent numérique par a.

171. Il faut maintenant appliquer la caractéristique δ aux élé-ents qui composent P_2 dans la page 35, pour en déduire l'ex-ession explicite de δP_2; mais cette opération peut être simplifiée, considérant la nature diverse de ces éléments, et l'amplitude égale des variations qu'on doit leur attribuer.

On peut d'abord admettre comme certain que les changements des indices de réfraction n_1, n_2 seront à peine sensibles, si même ils sont sensibles, pour les différences restreintes de température que nous voulons ici embrasser. Ainsi leur influence dans P_2 s'obtiendra par un calcul exactement pareil à celui que nous avons effectué sur cette même fonction, lorsque nous y avons fait varier les indices n_1, n_2 de quantités très-petites δn_1, δn_2 pour exprimer les changements qu'y introduit l'inégale réfrangibilité des rayons du spectre auxquels on les applique. Ou plutôt, nous n'aurons qu'à employer immédiatement les mêmes expressions algébriques que nous avions formées alors, en y attribuant aux variations δn_1, δn_2 des deux indices, les valeurs bien moindres, sans doute, que nous devons ici leur donner. Quant aux variations que P_2 devra éprouver par l'influence des changements de température sur les configurations des deux lentilles dont notre objectif se compose, ce devra être l'objet d'un calcul nouveau; mais cette seconde partie de δP_2 ne pouvant être aussi que très-petite, il suffira de l'évaluer à part et de l'ajouter à la première, pour avoir leur influence combinée.

Afin de rappeler cette distinction, j'exprimerai généralement δP_2 de la manière suivante :

$$\delta P_2 = \delta_1 P_2 + \delta_2 P_2,$$

en désignant par $\delta_1 P_2$ la partie de la variation totale qui porte sur les indices de réfraction n_1, n_2; et par $\delta_2 P_2$ la partie complémentaire, dépendante des changements qu'éprouvent les éléments géométriques des deux lentilles.

172. L'expression de $\delta_1 P_2$ se trouve déjà toute calculée, p. 69, avec un degré de précision qui a suffi aux compensations les plus délicates de la dispersion, et qui dépasse sans doute beaucoup celui qu'il nous est à présent nécessaire d'obtenir pour des variations δn_1, δn_2 d'une amplitude beaucoup moindre. Nous pouvons donc très-légitimement y négliger, dans les coefficients algébriques de ces variations, des termes déjà très-petits par eux-mêmes, tels que les rapports des épaisseurs centrales des lentilles aux rayons de courbure de leurs surfaces, et aussi l'intervalle absolu de ces len-

tilles entre elles, qui est représenté par h_1, puisque cet intervalle est sensiblement nul dans les objectifs de Fraunhoffer, comme nous avons reconnu que cela est nécessaire pour la stabilité de l'achromatisme de ces appareils. Ceci nous ramène donc à la première expression plus restreinte de δP_2 que nous avions d'abord formée page 41, et qui est habituellement employée comme suffisante pour exprimer les effets de la dispersion dans les objectifs à deux lentilles. Seulement les variations δn_1, δn_2 qui exprimaient alors les changements des indices de réfraction dans l'étendue du spectre visible, devront être ici remplacées par les changements bien plus petits que ces mêmes indices peuvent éprouver par les modifications spontanées de la température ambiante, étant appliqués à un même rayon lumineux. Désignons donc par ν_1, ν_2 les variations de n_1 et de n_2 pour une élévation de température égale à 1° centésimal : leurs valeurs pour t degrés croîtront proportionnellement; c'est-à-dire que δn_1 deviendra ici $\nu_1 t$ et δn_2, $\nu_2 t$. On pourra encore faire $N_2 = 1$ et $\varepsilon_1 = 1$ dans les coefficients de ces petits termes, puisque l'une et l'autre de ces quantités, exprimées explicitement page 35, ne diffèrent de l'unité que par des rapports que nous reconnaissons pour négligeables dans $\delta_1 P_2$. L'expression de δP_2 de la page 41, ainsi limitée, nous donnera donc

$$\delta_1 P_2 = \left[\frac{\nu_1}{(n_1 - 1) f_1} + \frac{\nu_2}{(n_2 - 1) f_2}\right] t,$$

à quoi il faudra joindre l'expression de P_2 prise dans cette même page et limitée au même ordre d'approximation, laquelle deviendra

$$P_2 = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2};$$

et de là on tirera

$$\frac{\delta_1 P_2}{P_2} = \left[\frac{\nu_1 f_2}{(n_1 - 1)(f_1 + f_2)} + \frac{\nu_2 f_1}{(n_2 - 1)(f_1 + f_2)}\right] t.$$

On aura donc ainsi la partie du rapport $\frac{\delta_1 P_2}{P_2}$ qui dépend des variations des indices de réfraction.

173. Pour avoir l'autre partie de ce rapport, qui comprend les

variations des éléments géométriques, il faut se reporter aux expressions générales de la page 35, en y supposant les indices de réfraction n_1, n_2, constants dans ce second calcul. Alors on peut d'abord y reconnaître que les quantités auxiliaires ε_1, ε_2 ne changeront point, parce qu'elles contiennent les éléments linéaires d'une même lentille, sous forme de rapport, dont les deux termes varient dans la même proportion, quand on se restreint, comme nous le faisons, à ne conserver que la première puissance de la variable t, dans les valeurs des contractions et des expansions que ces éléments éprouvent. Cette remarque va simplifier considérablement nos calculs, sans leur rien ôter de leur rigueur. En effet, considérons d'abord les expressions des quantités désignées par f_1, f_2, dans lesquelles il faut maintenant traiter les indices n_1, n_2 comme constants pour le second genre de variation auquel nous voulons ici avoir égard. Si nous leur appliquons la caractéristique δ_2, dont je supprime momentanément l'indice pour abréger, elles nous donneront

$$\frac{\delta f_1}{f_1^2} = (n_1 - 1)\left(\frac{\varepsilon_1 \delta r_1}{r_1^2} - \frac{\delta r'_1}{r'^2_1}\right), \qquad \frac{\delta f_2}{f_2^2} = (n_2 - 1)\left(\frac{\varepsilon_2 \delta r_2}{r_2^2} - \frac{\delta r'_2}{r'^2_2}\right).$$

$\frac{\delta r_1}{r_1}$ et $\frac{\delta r'_1}{r'_1}$ expriment la dilatation linéaire du crown-glass dont la première lentille est faite. Je la représente par γ pour une variation de 1° dans la température. Alors ces deux rapports prennent une même valeur γt pour une variation de t degrés. Dans la seconde équation, les rapports analogues $\frac{\delta r_2}{r_2}$, $\frac{\delta r'_2}{r'_2}$ expriment pareillement la dilatation du flint dont est faite la lentille postérieure. Ainsi, en la représentant par φ pour une variation de 1°, ces deux quantités deviennent aussi égales entre elles et ont pour valeur φt. D'après cela, les seconds membres de ces équations acquièrent l'un et l'autre un facteur commun, qui est pour le premier $\frac{1}{f_1}$, pour le deuxième $\frac{1}{f_2}$. Ce qui donne finalement

$$\delta f_1 = \gamma f_1 t, \qquad \delta f_2 = \varphi f_2 t;$$

c'est-à-dire que les fonctions complexes f_1, f_2 varient avec la tempé-

rature dans chaque lentille, comme feraient des éléments linéaires. Or, ceci va nous servir pour simplifier, ou même pour supprimer les variations correspondantes du coefficient N_2. Car, d'abord, son premier terme $\varepsilon_1\varepsilon_2$ ne varie pas. Quant à son terme $\frac{H_1}{f_2}$, si l'on y met pour H_1 sa valeur explicite, en y supprimant l'intervalle h_1 des deux lentilles que nous faisons nul, il devient

$$\frac{e_1}{n_1 f_2}.$$

A la rigueur, ce terme doit varier avec la température, n_1 restant constant. Car son numérateur e_1, exprimant l'épaisseur centrale de la lentille intérieure, éprouve la dilatation propre au crown-glass, c'est-à-dire qu'il devient $e_1(1+\gamma t)$; tandis que son dénominateur f_2, appartenant à la lentille postérieure, éprouve la dilatation propre au flint, et devient $f_2(1+\varphi t)$, comme nous venons de le voir. Mais les valeurs des coefficients numériques γ, φ étant presque égales, leur différence, qui reste seule dans le développement du rapport, puisque nous nous bornons à leur première puissance, ne donnera aucun produit sensible étant multiplié par le facteur $\frac{e_1}{f_2}$, qui est extrêmement petit par lui-même. On peut donc, sans crainte d'erreur, négliger la variation du terme $\frac{e_1}{n_1 f_2}$ ou $\frac{H_1}{f_2}$ qui résulte seulement de cette différence de dilatation; et alors le coefficient N_2 devient tout entier constant comme ε_1 et ε_2.

Ceci reconnu, je substitue l'expression générale de N_2 dans P_2, ce qui donne rigoureusement

$$P_2 = \frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{N_2}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right),$$

comme nous l'avons déjà trouvé dans la page 41.

Alors, faisant varier les seuls éléments géométriques de P_2 par la caractéristique δ, en laissant N_2 et ε_1 constants, on a

$$\delta P_2 = -\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{N_2\,\delta f_1}{f_1^2} + \frac{\delta f_2}{f_2^2}\right);$$

et lorsqu'on remplace δf_1, δf_2 par leurs valeurs trouvées tout à l'heure pour ce genre de variation, cette expression devient

$$\delta P_2 = -\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{N_2\gamma}{f_1} + \frac{\varphi}{f_2}\right)t;$$

ce qui étant divisé par P_2, donne

$$\frac{\delta P_2}{P_2} = -\left(\frac{N_2\gamma f_2 + \varphi f_1}{N_2 f_2 + f_1}\right)t.$$

C'est la seconde partie de $\frac{\delta P_2}{P_2}$ due à la seule variation des éléments géométriques et que nous avons désignée par l'indice 2, qu'il faut maintenant lui restituer : en la joignant à la première, qui dépend des variations des indices de réfraction et que nous avons calculée d'abord, on a pour l'expression complète de $\frac{\delta P_2}{P_2}$ la valeur suivante

$$\frac{\delta P_2}{P_2} = \left[\frac{\nu_1 f_2}{(n_1-1)(f_1+f_2)} + \frac{\nu_2 f_1}{(n_2-1)(f_1+f_2)} - \frac{(N_2\gamma f_2 + \varphi f_1)}{N_2 f_2 + f_1}\right]t;$$

ce qui donne pour la variation totale de l'angle élémentaire $V^{(1)}$, correspondante à une élévation de t degrés dans la température :

$$\delta V^{(1)} = (V)^{(1)}\left[a + \frac{\nu_1 f_2}{(n_1-1)(f_1+f_2)} + \frac{\nu_2 f_1}{(n_2-1)(f_1+f_2)} - \frac{(N_2\gamma f_2 + \varphi f_1)}{N_2 f_2 + f_1}\right]t.$$

174. Pour obtenir avec une entière certitude la portion de $\delta V^{(1)}$ produite par les changements réguliers de configuration que la température peut faire éprouver aux deux lentilles, nous l'avons calculée rigoureusement sans rien négliger. Mais maintenant qu'elle est obtenue sous sa forme explicite finale, la petitesse des coefficients de dilatation γ, φ, du crown et du flint, permet de la simplifier en négligeant les produits de ces coefficients par des quantités aussi petites que celles qui dépendent du rapport des épaisseurs centrales aux rayons de courbure, ou aux distances focales principales des deux lentilles. En effet, dans leur grand travail sur la dilatation des corps solides, Laplace et Lavoisier ont

trouvé, en moyenne,

$$\gamma = +\,0{,}00000897, \qquad \varphi = +\,0{,}00000842;$$

ce qui rend une telle approximation très-légitime. En l'admettant, si l'on se reporte aux expressions générales de la page 35, on voit que les quantités N_2, ε_1, ε_2, se réduisent toutes trois à $+\,1$, h_1 étant ici nul; et alors f_1, f_2 représentent respectivement les distances focales principales des deux lentilles. L'expression de $\delta V^{(1)}$, ainsi simplifiée, devient donc

$$V^{(1)} = (V)^{(1)}\left[a + \frac{\nu_1 f_2}{(n_1-1)(f_1+f_2)} + \frac{\nu_2 f_1}{(n_2-1)(f_1+f_2)} - \frac{(\gamma f_2+\varphi f_1)}{(f_1+f_2)}\right] t.$$

175. Or, dans l'objectif que nous considérons, f_1, f_2 sont assujettis à la relation de compensation achromatique, établie page 53, pour l'ordre même d'approximation auquel nous sommes ici bornés. En désignant par F la distance focale principale de l'objectif total, pour les rayons de moyenne réfrangibilité, et nommant μ le *rapport de dispersion*, qui est ici un nombre positif plus grand que 1, parce que le flint est postérieur, cette relation donne

$$f_1 = \frac{(\mu-1)}{\mu}\,F, \qquad f_2 = -\,(\mu-1)\,F;$$

on en tire donc

$$\frac{f_1}{f_1+f_2} = -\frac{1}{(\mu-1)}, \qquad \frac{f_2}{f_1+f_2} = \frac{\mu}{\mu-1};$$

et en substituant ces rapports dans $\delta V^{(1)}$, il en résulte finalement

$$= V^{(1)}\left[a + \frac{\mu}{(n_1-1)(\mu-1)}\nu_1 - \frac{1}{(n_2-1)(\mu-1)}\cdot\nu_2 - \frac{\mu}{(\mu-1)}\cdot\gamma + \frac{1}{(\mu-1)}\varphi\right] t,$$

où il faut se rappeler que le coefficient a représente la dilatation de l'acier trempé pour un degré du thermomètre centésimal, laquelle a pour valeur

$$a = +\,0{,}00001378;$$

de sorte qu'elle est bien supérieure aux dilatations correspondantes γ et φ, du crown et du flint.

176. M. Arago a reconnu par des déplacements de bandes diffractées, que l'indice de réfraction du crown-glass augmente quand la température s'élève ; le coefficient ν_1 de notre formule est donc positif. M. Arago n'a pas mesuré le rapport de cet accroissement de l'indice avec la température, mais il ne lui attribue qu'une valeur excessivement faible, la lame de verre ayant été fortement chauffée dans la circonstance où il est devenu sensible (*) : il n'a pas fait la même épreuve pour le flint-glass. Toutefois l'analogie porte à présumer que l'influence de la température s'y exerce dans le même sens que sur le crown, quoique sans doute dans une proportion différente. En admettant cette induction très-vraisemblable, le coefficient ν_2 serait positif, comme ν_1 ; et cette condition leur sera commune avec les autres coefficients a, γ, φ. L'effet propre, opéré sur $\delta V^{(1)}$ par chacune des causes physiques que ces quantités représentent, dépendra donc, pour l'intensité, de la grandeur des facteurs algébriques qui les multiplient, lesquels sont tous positifs, et le sens en sera déterminé par les signes positifs ou négatifs qui les affectent individuellement dans notre formule.

On se formera une idée physique assez nette du jeu de ces différents termes, en se reportant à l'expression générale que nous avons formée d'abord de l'angle $V^{(1)}$, dans les appareils que nous considérons. Cette expression était

$$V^{(1)} = -\frac{\varpi}{2N(F-H)^2 \sin 1''};$$

N est, comme je l'ai dit, à peine différent de $+1$. F représente la distance focale principale de l'objectif total, laquelle est essentiellement négative, puisque cet objectif est convergent. Enfin H, qui exprime la distance oculaire de ce système à sa dernière sur-

(*) Ce fait, constaté fort anciennement par M. Arago, a été, je crois, publié pour la première fois par lui dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. X, page 616, parmi d'autres résultats d'expériences analogues. Mais il l'avait bien auparavant mentionné plusieurs fois dans les séances particulières du Bureau des Longitudes ; et c'est de ces communications que j'ai tiré les détails que j'ai rapportés sur les circonstances où l'expérience a été faite par lui.

est une quantité fort petite relativement à — F, comme le
e son expression explicite, rapportée page 35, l'intervalle h_1
eux lentilles étant ici sensiblement nul. En ne s'attachant
qu'au terme principal — F du dénominateur algébrique, on
ue, dans un même héliomètre, l'angle élémentaire $V^{(1)}$ doit
quand le pas ϖ de la vis s'allonge, et décroître quand la dis-
focale principale augmente. D'après cela, si l'on prend
eur de cet angle pour une certaine température où t sera nul,
on suppose ensuite le facteur t positif dans l'expression de
pour signifier que la température s'élève au-dessus du degré
omme point de départ, l'effet propre des divers termes qui
iposent s'expliquera comme il suit :

me. $+ at$, positif. Le pas ϖ de la vis *s'allonge*, ce qui *augmente* l'angle $(V)'$.

ne. $+ \frac{\mu}{(n_1 - 1)(\mu - 1)} \nu_1 t$, positif. La réfraction du crown *augmente*, ce qui *raccourcit* sa distance focale négative propre, et *augmente* l'angle $(V)^{(1)}$ en raccourcissant la distance focale composée.

ne. $- \frac{1}{(n_2 - 1)(\mu - 1)} \nu_2 t$, négatif. La réfraction du flint *augmente*, ce qui *raccourcit* sa distance focale positive propre, et tend à rendre la distance focale composée plus longue, ce qui *diminue* l'angle $(V)^{(1)}$.

e termes. $- \frac{\mu}{(\mu - 1)} \gamma t + \frac{1}{(\mu - 1)} \varphi t$, négatifs en somme, μ étant supérieur à $+ 1$, et γ un peu plus grand que φ. La dilatation géométrique des deux lentilles *allonge* leurs distances focales propres chacune dans son sens. Mais cet effet complexe a pour résultat un *allongement* de la distance focale composée, ce qui diminue l'angle $(V)^{(1)}$.

7. Pour constater ce dernier effet, reprenons les expressions
ales de la page 35, en y négligeant les termes dépendants des

épaisseurs, et y supposant h_1 nul, comme il l'est dans l'objectif que nous considérons. On aura alors

$$N_2 = +1, \quad H_1 = 0, \quad H = 0, \quad P_2 = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2};$$

et ces particularités étant introduites dans la relation générale

$$N_2(F - H) = \frac{1}{P_2},$$

il en résultera

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

Ceci est l'expression connue de F pour un système composé de deux lentilles en contact central et supposées infiniment minces. En faisant varier les deux membres de cette équation par la caractéristique δ, limitée aux seules variations des éléments géométriques elle donne

$$\delta F = +F^2\left(\frac{\delta f_1}{f_1^2} + \frac{\delta f_2}{f_2^2}\right).$$

Or, f appartenant au crown, et f_2 au flint, on a, comme nous l'avons vu précédemment, pour ce genre de variations,

$$\delta f_1 = f_1 \gamma t, \qquad \delta f_2 = f_2 \varphi t.$$

Ces valeurs étant introduites dans l'expression de δF qui leur est spéciale, il en résulte

$$\delta F = +F^2\left(\frac{\gamma}{f_1} + \frac{\varphi}{f_2}\right) t.$$

Mais notre objectif est achromatique, et la lentille de flint y est postérieure à celle de crown. Les conditions de compensation établies page 53 lui sont donc applicables, puisqu'elles conviennent précisément aux suppositions approximatives que nous venons d'adopter. Ainsi, en nommant μ le rapport de dispersion qui est positif et plus grand que $+1$, on devra avoir

$$f_1 = \frac{(\mu - 1)}{\mu} F; \qquad f_2 = -(\mu - 1) F;$$

et d'après ces relations, l'expression précédente devient

$$\delta F = F\left[\frac{\mu}{(\mu-1)}\gamma - \frac{1}{(\mu-1)}\varphi\right]t.$$

Le facteur compris entre les parenthèses est positif, μ étant plus grand que $+1$, et γ tant soit peu supérieur à φ. Donc, si l'on suppose t positif, c'est-à-dire que la température s'élève, δF est de même signe que F, en sorte que la distance focale principale s'allonge en conservant son signe propre, par l'effet résultant des dilatations géométriques, que caractérisent les coefficients γ et φ. C'est ce que nous avions admis tout à l'heure en discutant l'influence simultanée des deux derniers termes de $\delta V^{(1)}$ qui dépendent de ce même genre de variations. Aussi peut-on remarquer que les facteurs annexés ici aux coefficients γ et φ sont les mêmes dans δF qu'ils étaient dans $\delta V^{(1)}$, résultat qui est une conséquence analytique évidente de la petitesse attribuée aux divers genres de variations dont se compose $\delta V^{(1)}$, et qui en rend l'effet total sensiblement égal à la somme de leurs effets isolés.

178. Pour achever de faire sentir l'influence propre de chacun des termes qui composent $\delta V^{(1)}$, je vais réduire leurs coefficients algébriques en nombres, en donnant aux indices de réfraction n_1, n_2, ainsi qu'au rapport de dispersion μ, les valeurs qu'ils avaient dans un objectif astronomique, construit également par Fraunhofer, et dont j'ai rapporté les éléments dans la page 77. Ces valeurs, affectées pour n_1 et n_2 aux rayons moyens du spectre, étaient :

$$n_1 = 1{,}530000; \quad n_2 = 1{,}634494; \quad \mu = 1{,}650853;$$

avec ces nombres on trouve

$$\frac{\mu}{(n_1-1)(\mu-1)} = +4{,}78575; \quad \frac{1}{(n_2-1)(\mu-1)} = +2{,}42153;$$

$$\frac{\mu}{\mu-1} = +2{,}53644; \quad \frac{1}{\mu-1} = +1{,}53644;$$

ce qui donne, en restituant à a sa valeur,

$$\delta V^{(1)} = (V)^{(1)}\left[+0{,}00001378 + 4{,}78575\,\nu_1 - 2{,}42153\,\nu_2 - 2{,}53644\,\gamma + 1{,}53644\,\varphi\right]t.$$

Alors, si l'on effectue les multiplications par γ et φ qui sont connues, on trouve

$$-2{,}53644\,\gamma + 1{,}53644\,\varphi = -0{,}000009815\,;$$

et ce résultat étant soustrait du premier coefficient numérique, il reste

$$\delta V^{(1)} = V^{(1)}\,[+\,0{,}000003965 + 4{,}78575\,\nu_1 - 2{,}42153\,\nu_2]\,t.$$

Quoique les deux derniers termes ne puissent pas être complétement réduits en nombres, parce qu'on n'a pas les valeurs de ν_1 et de ν_2, on doit cependant admettre, d'après leurs formes, qu'ils se composeront en un résultat positif.

179. Dans l'exposition que M. Bessel a donnée de l'héliomètre de Kœnigsberg, on ne trouve point l'expression de $\delta V^{(1)}$ théoriquement calculée; mais il a cherché à la déduire des résultats qu'il avait obtenus avec cet instrument, en l'employant à des températures diverses, pour mesurer les arcs célestes compris entre les étoiles b, c, c des Pléiades et η, la plus brillante du même groupe. La condition de rendre les évaluations de ces distances constantes lui a donné une expression empirique de $\delta V^{(1)}$ qui, traduite comme la nôtre en degrés du thermomètre centesimal, est

$$\delta V^{(1)} = -(V)^{(1)}\,0{,}0000152829\,t,$$

les températures t étant comptées à partir de $9^\circ\,\frac{5}{9}$ du même thermomètre. Le signe négatif de cette expression, et son opposition à l'effet que la dilatation propre de la vis conductrice doit produire, n'ont pas échappé à la sagacité de M. Bessel; et il en a conclu que la dilatation propre de la substance des lentilles devait allonger la distance focale de l'objectif, dans une proportion assez forte, non-seulement pour compenser l'accroissement opéré dans l'angle $V^{(1)}$ par la dilatation de la vis, mais même pour imprimer à la correction totale un sens opposé. La discussion dans laquelle nous venons d'entrer ne permet pas d'admettre cette conséquence. Car elle prouve que les termes correctifs, produits par les dilatations des deux lentilles, sont beaucoup trop faibles pour opérer une telle compensation, et, à plus forte raison, pour la transporter en sens

opposé d'une quantité plus que triple, différence que les termes dépendants de ν_1 et de ν_2 doivent encore accroître. A la vérité, M. Bessel remarque avec raison que la correction ainsi indiquée sera toujours négligeable; car en donnant, d'après lui, à notre angle (V)[1] une valeur égale à 26″,45894, elle s'élèverait seulement à — 0″,00040437 t pour chaque tour de la vis appliquée à une mesure de double distance; de sorte qu'elle produirait seulement 0″,04 pour une marche totale de 100 tours, qui dépasserait la plus grande amplitude de course à laquelle il ait appliqué l'instrument, quoiqu'elle n'atteignît pas encore celle à laquelle Fraunhoffer l'avait supposé applicable. Mais l'opposition de ce résultat des mesures faites à diverses températures, avec celui qu'un calcul exact assigne, peut faire légitimement soupçonner quelque effet de déformation dans les segments des deux lentilles; et, par ce motif, le procédé de duplication employé par M. Arago, avec une série de prismes biréfringents achromatisés, successivement appliqués au delà d'un même oculaire positif, me semble infiniment préférable pour la mesure des très-petits angles célestes, qui est aujourd'hui l'objet d'observation le plus important auquel un instrument tel que celui de Kœnigsberg puisse être employé.

180. Dans cet instrument, le centre de figure de chaque segment peut être écarté jusqu'à 56 minutes de degré de l'axe central de l'autre, de sorte que l'amplitude de champ total, mesurable dans un couple d'observation, s'élève à 1° 52′. Les oculaires pour l'usage habituel sont au nombre de cinq, qui produisent une série de grossissements angulaires correspondants aux nombres 45, 91, 115, 179 et 290. Sans doute on doit supposer que ces grossissements s'emploient dans un ordre de force inverse des grandeurs des angles visuels qu'ils sont destinés à mesurer. Mais l'application, même du plus faible, au plus grand champ, excède énormément toutes les relations de ces deux éléments usitées dans les lunettes astronomiques *à objectif fixe*, même dans celles qui ont été construites également par Fraunhoffer, comme celle de Dorpat. Pour s'en convaincre, il faut se rappeler qu'en nommant εX la demi-amplitude du champ embrassé par un instrument dioptrique à objectif fixe, et N l'amplification que cet angle éprouve à travers l'instru-

ment, le rayon à incidence centrale qui limite ce champ, et qui est l'axe géométrique du faisceau émergent qui y correspond, sort du point oculaire en formant, avec l'axe central du système, un angle ${}_cX_m$ qui est donné par la formule

$$\sin {}_cX_m = N \sin {}_cX.$$

Cela a été démontré tome Ier, page 559. En appliquant cette relation à la généralité des instruments optiques exécutés par les plus habiles artistes, et même à la grande lunette de Dorpat, nous avons reconnu que la demi-amplitude du champ ${}_cX$, et le grossissement angulaire N qu'on y applique, sont toujours proportionnés l'un à l'autre, de manière que l'angle d'émergence ${}_cX_m$ n'en résulte pas plus grand que 15 ou 16°. Or, dans l'instrument de Kœnigsberg, la relation des deux éléments N et ${}_cX$ dépasse considérablement la limite précédente, même pour le plus faible des oculaires qui y sont adaptés. En effet, si l'on suppose dans notre formule

$$N = 45 \quad \text{et} \quad {}_cX = 0^\circ\, 56',$$

notre formule donne

$${}_cX_m = 47^\circ\ 8'\ 20'',3;$$

donc, en admettant qu'on emploie cette combinaison, pour une observation de contact, faite ou supposée faite au bord du champ même, les axes des faisceaux émergents qui sortent du point occulaire en se dirigeant vers la pupille, formeraient avec l'axe central de chaque segment de l'objectif, l'angle ${}_cX_m$ dont nous trouvons ici la valeur, et ils entreraient ainsi dans l'organe en se croisant sous un angle obtus, ce qui ne serait admissible dans aucune lunette à objectif fixe. Mais la singularité exceptionnelle de ce résultat disparaît, si l'on considère que celles-ci sont destinées à faire voir *simultanément*, avec une égale netteté, *tous les objets* qui peuvent être contenus dans l'amplitude de vision que le champ embrasse, lesquels, selon le lieu qu'ils y occupent, sont rendus perceptibles par des pinceaux lumineux soumis à des aberrations d'achromatisme et de refrangibilité différentes, dont il faut détruire l'inégalite dans la construction de l'appareil. Au lieu que, dans un instrument qui opère par duplication, comme celui de Kœnigsberg, on n'établit le contact des images

'entre des portions très-petites de leur étendue totale, lesquelles
ıt perçues par des pinceaux lumineux très-déliés, qui ont seule-
nt traversé chaque segment de l'objectif avec des inclinaisons
férentes. De sorte que si l'artiste, en s'astreignant aux règles
ıérales d'une bonne construction, a pris en outre le soin de
ıpenser spécialement les inégalités d'aberration de ces pin-
ıux, pour le cas extrême de diversité de leur inclinaison sur
axes respectifs des deux segments, le contact des images pourra
core s'opérer nettement même dans ce cas. Et, après cela, il
a encore suffisamment exact *pour ses applications spéciales*,
ns tous les écarts moindres, pourvu qu'il le soit sur deux pin-
ıux très-déliés, dirigés suivant leur axe commun quand ils sont
ınis, condition qui s'établit, pour ainsi dire, d'elle-même, pour
tels pinceaux, par cela seul que les deux segments sont les
ıitiés d'un même objectif primitivement construites ensemble.
est sans doute ainsi qu'il faut comprendre ce que Fraunhoffer
ait dit à M. Bessel, qu'il avait compensé les aberrations de
héricité *pour les bords des segments*, comme cela était en effet
ssible, en n'y considérant que les bords contraires de deux pin-
ıux très-déliés. Toutefois, malgré cette précaution, la grandeur
e prend alors l'angle $_cX_m$ montre que, dans de tels cas, la condition
contact ne peut être bien appréciée qu'en employant des oculai-
ı négatifs, afin que le point oculaire de l'instrument total soit
stérieur à sa dernière surface, et qu'on y puisse placer le centre
la pupille. Car des oculaires positifs, composés de deux verres de
ème nature, ainsi qu'on les fait habituellement, rendent nécessaire-
ent ce point antérieur à la surface d'émergence, comme nous l'avons
marqué p. 144; et alors les deux axes des pinceaux qui s'y croisent
ns les contacts extrêmes s'écarteraient trop l'un de l'autre pour
river simultanément dans l'œil. C'est pourquoi Fraunhoffer ayant
outé à son appareil des micromètres à fils, pour servir occasion-
ellement, ce qui exige des oculaires positifs, qui rendent le point
culaire du système nécessairement intérieur, on doit présumer
u'il les a destinés seulement à la mesure de très-petits angles
isuels, observés toujours très-près de l'axe central des deux
egments, soit réunis, soit très-peu séparés, auquel cas l'angle $_cX_m$,

calculé pour les axes des pinceaux extrêmes qui limitent ces angles, rentre dans les conditions de petitesse égales, ou même inférieures, à celles que l'on admet dans les lunettes ordinaires à objectif fixe pour toute l'étendue de leur champ.

181. Je compléterai cet exposé en rapportant une série d'observations faites par M. Bessel, pour mesurer l'angle visuel compris entre les deux étoiles qui composent α d'Hercule. Dans ce genre particulier de détermination, où les images comparées ne présentent pas de disque sensible, il n'opère pas par contact, ce qui exigerait une superposition de points, toujours incertaine; mais, comme je l'ai annoncé, il quadruple le groupe, de manière que dans chaque position alternée du segment rendu mobile, on obtienne quatre images d'étoiles, également espacées entre elles sur la ligne de section. Ainsi, en conservant pour type nos *fig.* 24 et 25, dans la première position du segment A″, correspondante à la *fig.* 24, les quatre images se voient alors dans le champ de l'oculaire, comme le représente la *fig.* 28. Et dans la seconde position de A″ correspondante à la *fig.* 25, ou A′ est resté fixe, elles se voient comme le représente la *fig.* 29. Conséquemment chacune des images mobiles, par exemple Σ'', pour se transporter en Σ''_1, a parcouru autour de son analogue σ'' une distance quadruple de celle qui la séparait primitivement de Σ_1. La spécialité du procédé consiste donc en ce qu'ici les bords opposés des images ne sont plus amenés, dans chaque observation, à une distance nulle, comme l'étaient Σ', σ'' de la *fig.* 24 et σ', Σ''_1 de la *fig.* 25, mais à une distance égale à la longueur de l'image focale du groupe que soutend l'angle visuel que l'on veut mesurer. Cette explication fera comprendre sans difficulté le tableau suivant, qui présente une des séries de quadruplement ainsi effectuées, par M. Bessel, sur α d'Hercule.

SEGMENT A'.	SEGMENT A".	ANGLE DE POSITION
ro marqué par l'index sa vis conductrice, division fixe qui mesure ombre de tours qu'elle rits à partir de l'origine ls ses mouvements.	Numéro marqué par l'index de sa vis conductrice, sur la division fixe qui mesure le nombre de tours qu'elle a décrits à partir de l'origine de ses mouvements.	de la ligne de section des deux segments dans chaque couple d'observations.
	R" 59,733.....	119° 29'
R' 60,000	60,101.....	
60,3695		119. 7
	60,468.....	
60,737		117.59
	60,841.....	
61,107		118.37
	61,210.....	

s accolades annexées aux deux premières colonnes, embras-
les nombres qui correspondent aux positions absolues de cha-
egment, dans les observations successives où le quadruple-
a été opéré. Les différences des nombres consécutifs,
ortés dans chaque colonne, expriment donc le nombre de
entiers R, et de fractions de tours décrits par chaque vis,
transporter le segment de chaque position à la position
nte, à mesure qu'il a été individuellement déplacé, l'autre
nt fixe. Chacune de ces différences mesure un mouvement
de transport quadruple de la longueur que la simple distance
laire des deux étoiles soutendrait dans le plan focal de l'in-
nent; de sorte qu'en les divisant par 2, on a le nombre *n* de
décrits par la vis dans chaque observation de doublement,
erait faite avec un même segment rendu mobile. Voici le ta-
1 de ces résultats partiels comparés à leur valeur moyenne,
dmettant avec M. Bessel que les pas R', R" des deux vis con-
rices soient égaux, comme en effet ils paraissent l'être.

DÉSIGNATION du segment rendu mobile dans chaque double observation.	MARCHE DE LA VIS conductrice, dans chaque double observation du groupe quadruplé.	MARCHE DE LA VIS conductrice dans chaque double observation du groupe simple.	EXCÈS DES RÉSULTATS partiels sur leur moyenne, en supposant les pas des deux vis conductrices égaux.
A″	0^{R}″,368	0^{R}″,18400	— 0^{R},00057
A′	0^{R}′,3695	0^{R}′,18475	+ 0,00028
A″	0^{R}″,367	0^{R}″,18350	— 0,00107
A′	0^{R}′,3675	0^{R}′,18375	— 0,00082
A″	0^{R}″,373	0^{R}″,18650	+ 0,00193
A′	0^{R}′,370	0^{R}′,18500	+ 0,00043
A″	0^{R}″,369	0^{R}″,18450	— 0,00007
Marche moyenne dans une observation double..... n =		0^{R},1845714	

Or, d'après M. Bessel, l'angle élémentaire $(V)^{(1)}$, évalué conformément à notre notation, est $(V)^{(1)} = 26'',45894$.

En multipliant $V^{(1)}$ par n, on aura l'angle visuel soutendu par les deux étoiles de α d'Hercule, $(V)^{(n)} = n\,V^{(1)} = 4'',88356$.

M. Bessel fait seulement ce même angle $V^{(n)}$ égal à $4'',88$, probablement parce qu'il a cru devoir négliger dans son calcul les fractions de seconde ultérieures aux centièmes. On peut apprécier la grande exactitude de ces résultats en considérant que le plus grand écart partiel autour de leur moyenne, qui est $+ 0^{R},00193$, répond à $0'',051$; et tous les autres sont beaucoup moindres que celui-là.

182. M. Bessel a mesuré, par ce même instrument, les angles visuels soutendus par l'anneau de Saturne, ainsi que par les diamètres équatorial et polaire de cette planète. En reduisant toutes ces mesures à une même époque et à une même distance, qui serait la distance moyenne de la planète au Soleil, ou le demi-grand axe de l'orbite qu'elle décrit, il a trouvé :

Diamètre de l'anneau.	39″,3125 ;
Diamètre equatorial de la planète.	17″,0055 ;
Diamètre polaire.	15″,7724.

diamètre polaire est perpendiculaire au plan de l'anneau, et il : aussi l'axe de rotation autour duquel la planète tourne sur e-même.

Enfin M. Bessel a déterminé, par ce même procédé, les distances gulaires comprises entre les étoiles *b*, *e*, *c* des Pléiades à l'étoile *η* la même constellation. Ces distances atteignaient presque la us grande amplitude d'angles que l'instrument pût embrasser, r duplication, puisque celle de *c* à *η* s'est élevée à 37′58″,05. nsi les axes des images focales, rendues coïncidentes dans chaque ntact, devaient se croiser sous un angle double, ou égal à '15′56″,10. Et les pinceaux émergents, à leur entrée dans l'œil, rvaient se croiser sous un angle de 59°36′31″, même en suppo- nt, comme on doit le présumer, que M. Bessel a employé pour s observations le plus faible des oculaires, qui produisait un ossissement angulaire N = 45. Cependant les résultats partiels nt présenté le plus satisfaisant accord. Il est évident que, dans tte application, les étoiles comparées ont dû être observées par nperposition, puisque le champ de l'instrument n'aurait pas em- rassé leurs intervalles quadruplés.

183. Lorsque Bouguer inventa l'héliomètre en 1748, il le com- osa de deux objectifs distincts, tous deux complets, qu'il suppo- nit exactement pareils. On ne pouvait pas alors rapprocher leurs entres A′, A″ jusqu'à la coïncidence, mais seulement jusqu'à un ninimum d'intervalle égal à la somme de leurs demi-diamètres ransverses, ce qui les mettait en contact par leurs bords. L'instru- ment ainsi construit ne pouvait donc pas mesurer de très-petits ngles, ce qui est aujourd'hui sa principale application, mais seu- ement des angles assez grands pour que le contact des images ocales exigeât un intervalle des centres excédant la limite ci-des- us fixée. A cela près, le principe de la mensuration est le même; l se réalise par les mêmes procédés et s'exprime par des formules emblables. En effet, l'identité des deux objectifs étant admise, eurs trois éléments spécifiques, N, H, F, seront indentiques, omme le sont ceux des deux segments de l'objectif unique que nous avons jusqu'ici considéré. Le calcul des contacts s'établira donc de la même manière, et conduira à des résultats sem-

blables. Seulement il est fort douteux qu'une si parfaite égalité de construction puisse se réaliser entre deux objectifs séparément travaillés. Et même, quand un objectif unique est coupé en deux moitiés, il est encore à craindre que la contraction spontanée des demi-lentilles qui constituent ses deux segments n'établisse entre eux quelque dissemblance, et aussi qu'ils ne soient pas également affectés dans leur forme par les variations de la température. Mais, si ces différences d'individualité sont très-faibles, il est facile de constater par nos formules que leur influence sur les résultats sera du même ordre, et pourra devenir insensible, lorsque l'emploi de l'instrument sera restreint à la mesure d'angles très-petits, dont les branches puissent être rendues très-peu obliques à l'axe central commun, en opérant les contacts très-près de cet axe, comme on a soin de le faire toujours. Aussi, l'emploi de l'héliomètre est-il aujourd'hui restreint principalement, ou même presque uniquement, à ce genre d'application. Toutefois, si l'on voulait, *comme spéculation théorique*, supposer une dissemblance notable entre les deux objectifs de Bouguer, ou entre les deux segments de l'objectif unique de Fraunhoffer, on pourrait encore concevoir leur système appliqué à la mesure des angles visuels, pourvu qu'on les fixât à des points différents de l'axe du tuyau qui les renferme, afin que les images focales données par l'un et par l'autre se formassent toujours dans un même plan perpendiculaire à l'axe commun, où elles pussent être observées simultanément avec un même oculaire; et les constantes $V_1^{(1)}$, $V_2^{(1)}$ d'un tel appareil pourraient de même être obtenues à l'aide de nos formules par des mesures d'angles visuels terrestres, prises sur des mires divisées, placées à une distance connue. Mais des combinaisons de ce genre ne devant jamais être réalisées, il suffit d'avoir indiqué comment on pourrait les soumettre au calcul.

CHAPITRE IX.

DE QUELQUES APPAREILS DE PRÉCISION APPLIQUÉS AUX INSTRUMENTS ASTRONOMIQUES.

LE VERNIER, LES NIVEAUX, LE FIL-A-PLOMB.

SECTION I. — *Les verniers et autres procédés immédiats de subdivision.*

184. Le *vernier*, appelé aussi *nonius*, est proprement une construction graphique, au moyen de laquelle on évalue les fractions d'une échelle linéaire de parties égales. L'usage en est aujourd'hui si général dans toutes les recherches physiques qui demandent quelque précision, que je me bornerai à le considérer dans son application spéciale aux mesures astronomiques. Soit d'abord RR′, *fig.* 30, une règle indéfinie, divisée en parties égales par des traits finement tracés transversalement à sa longueur, et numérotés continûment; puis supposons qu'une règle plus courte, VV′, se transporte parallèlement à la première en lui restant toujours accolée. Si l'on veut seulement savoir combien de divisions *entières* VV′ aura ainsi parcourues, il suffira d'y tracer un seul trait transversal I, que l'on fera d'abord coïncider avec un des traits de RR′; puis, à la fin du transport, on examinera de nouveau auquel de ces traits l'index I se trouve répondre; et, s'il coïncide encore avec l'un d'eux, la différence des numéros, marqués aux points de départ et d'arrivée, donnera le nombre de divisions entières qu'il a parcourues. Mais, si la position finale de l'index I l'amène entre deux traits de RR′, on ne connaîtra ainsi avec certitude que la portion de son mouvement qui comprend un nombre de divisions entières, et la fraction de division excédante pourra seulement être appréciée par estimation. Maintenant supposez que l'on marque sur VV′, non pas un seul trait, mais plusieurs, espacés aussi à intervalles égaux, mais moindres que ceux de RR′, dans une proportion connue *de nombres entiers*, tels, par exemple, que 9 parties de RR′ en vaillent 10 de VV′, comme le représente la *fig.* 31; et numérotez aussi ces subdivisions continûment, dans le

même sens que les autres. Cette construction sera ce qu'on appelle *un vernier*. Pour en voir l'usage, faites d'abord coïncider le premier trait de VV′, marqué *zéro*, avec un quelconque des traits de la grande règle, par exemple avec celui qui est aussi marqué *zéro*, comme dans la figure. Alors le trait n° 10 du vernier se trouvera aussi en coïncidence avec le trait n° 9 de la règle, par définition; mais les traits intermédiaires ne coïncideront pas. En effet, si la longueur des parties de RR′ est D, la longueur des parties de VV′ sera ici $\frac{9}{10}$ D, ou D — $\frac{1}{10}$ D. Ainsi, les deux traits n° 0 étant en coïncidence, chacun des suivants du vernier sera en arrière sur son homologue de la règle de quantités progressivement croissantes, qui seront d'abord pour le n° 1, $\frac{1}{10}$ D; puis, pour les autres, consécutivement $\frac{2}{10}$ D, $\frac{3}{10}$ D, $\frac{4}{10}$ D, $\frac{5}{10}$ D, $\frac{6}{10}$ D, $\frac{7}{10}$ D, $\frac{8}{10}$ D, $\frac{9}{10}$ D, $\frac{10}{10}$ D. Ce dernier recul, étant égal à une division D entière, le trait n° 10 du vernier auquel il s'applique, se trouve en arrière de cette quantité sur son homologue, c'est-à-dire sur le n° 10 de la règle, ce qui le fait coïncider avec le n° 9.

185. Concevons maintenant que le vernier soit poussé doucement le long de la règle, de manière que la coïncidence des traits marqués zéro se détruise, et qu'elle aille s'opérer entre les traits n° 1, comme le représente la *fig.* 32. Il est évident que, par ce transport, le n° 0 du vernier s'est avancé au delà du n° 0 de la règle d'une quantité égale à $\frac{D}{10}$. Chacun des traits qui lui sont annexés a donc fait un pas égal dans le même sens, puisque leurs distances mutuelles sont invariables. Ainsi, en désignant par le signe — les écarts de chacun d'eux *en arrière* de leurs homologues de la règle, et par le signe + ceux qui les devanceront, ces écarts se succéderont de la manière suivante :

Désignation des traits du vernier d'après leur numéro d'ordre. Quantités dont ils sont en avant de leurs homologues.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
+ $\frac{1}{10}$ D	0	— $\frac{1}{10}$ D	— $\frac{2}{10}$ D	— $\frac{3}{10}$ D	$\frac{4}{10}$ D	$\frac{5}{10}$ D	— $\frac{6}{10}$ D	— $\frac{7}{10}$ D	— $\frac{8}{10}$ D	— $\frac{9}{10}$

d'où l'on voit que le seul trait n° 1 coïncide maintenant avec son homologue de la règle, puisque c'est le seul dont l'écart soit nul, le premier n° 0 devançant son homologue et tous ceux qui suivent le n° 1 en étant devancés.

Donc, inversement, si, dans une opération de mesure, le vernier VV′ ayant eu d'abord son trait n° 0 en coïncidence avec le n° 0 de la règle a été ensuite transporté d'une quantité telle que la coïncidence s'opère maintenant entre les traits n° 1, comme la *fig.* 32 le représente, on en devra conclure aussitôt que ce transport a été égal à $+\frac{1}{10}$ D. Et la même conclusion résulterait encore d'un pareil déplacement, si le n° 0 du vernier eût été primitivement mis en coïncidence, non pas avec le n° 0, mais avec tout autre trait quelconque de la règle RR′; car tous les raisonnements que nous avons faits s'appliqueraient encore en partant de cette nouvelle origine.

186. Revenant à la *fig.* 32, poussons un peu plus le vernier vers R′, de sorte que la coïncidence ne s'opère plus entre les traits n° 1, mais entre les traits n° 2, comme le représente la *fig.* 33. Il est évident que chacun des traits, ainsi transportés, aura marché vers R′ d'une nouvelle quantité $\frac{1}{10}$ D. Le trait zéro de VV′ sera donc alors de $\frac{2}{10}$ D *en avant* de son homologue sur la règle; et en conservant la notation dont nous avons fait tout à l'heure usage, les positions relatives de tous les autres traits se succéderont comme on le voit ici.

Désignation des traits du vernier d'après leur numéro d'ordre. Quantités dont ils sont en avant *de leurs homologues.*

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
$+\frac{3}{10}$D	$+\frac{1}{10}$D	0	$-\frac{1}{10}$D	$-\frac{2}{10}$D	$-\frac{3}{10}$D	$-\frac{4}{10}$D	$-\frac{5}{10}$D	$-\frac{6}{10}$D	$-\frac{7}{10}$D	$-\frac{8}{10}$D

Donc, par inverse, si, en commençant une opération de mesure, on a fait d'abord coïncider le trait *o* du vernier avec un trait quelconque de la règle, numéroté *a*, et qu'à la fin de l'opération le

trait n° 2 du vernier coïncide avec le trait de la règle dont le rang est $a + 2$, on en devra conclure que l'index zéro du vernier a marché de $\frac{2}{10}$ D *au delà* du trait a de la règle, qui a été pris pour point de départ. Mais si le zéro du vernier, au lieu de rester ainsi entre les traits marqués a et $a + 1$, se trouvait finalement transporté dans une autre division de la règle, comprise entre les n^{os} a' et $a' + 1$, la coïncidence sur le n° 2 du vernier devrait évidemment s'appliquer *au delà* du trait numéroté a', comme si la coïncidence primitive avait été faite sur lui. Car alors, outre son excès sur a', le zéro du vernier aurait encore parcouru un nombre $a' - a$ de divisions entières; et ainsi le transport total serait $a' - a + \frac{2D}{10}$.

187. En continuant les mêmes considérations pour les coïncidences ultérieures, qui s'opéreraient sur les traits 3, 4,..., m du vernier, et supposant toujours que la coïncidence primitive ait été établie sur son trait n° a, il est facile de voir que le transport total de cet index le long de RR′ sera généralement exprimé par $a' - a + \frac{m}{10}$. D, le nombre m ne pouvant pas dépasser 10, dans le mode de divisions que nous avons ici choisi comme exemple.

188. Mais ce mode serait tout autre, que les mêmes raisonnements s'y appliqueraient encore, et les résultats différeraient seulement par la quotité de la fraction que chaque coïncidence ferait ainsi évaluer. Pour borner cette généralisation aux cas réellement pratiques, nommons toujours D l'intervalle constant des traits tracés sur la règle, mais supposons que n de ces intervalles soient subdivisés sur le vernier en $n + 1$, alors chacune des parties de cette subdivision aura pour longueur $\frac{n}{n+1}$ D ou D $- \frac{1}{n+1}$ D. Donc, si la coïncidence primitive est d'abord établie sur le zéro du vernier, comme je le supposerai toujours, les pas ultérieurs de cet index marqués par chaque coïncidence successive seront progressivement $\frac{1}{n+1}$ D, $\frac{2}{n+1}$ ..... $\frac{m}{n+1}$ D, ces quantités étant comptées au delà de la *dernière* division entière que le zéro du

er dépassera. De sorte que si le trait pris pour point de dé-
est numéroté a, et que le trait finalement dépassé soit numé-
a', la quantité totale du transport opéré sera généralement

$$a' - a + \frac{m}{n+1} \mathrm{D}.$$

le mode que nous avions d'abord pris pour exemple, n était
à 9. Plus ce nombre est considérable, plus les fractions de D
uées par le vernier sont petites ; et par conséquent, on pour-
croire que leur multiplicité indéfinie donnerait aussi une
sion sans limite à la mesure du transport opéré. Mais cette
sion est physiquement bornée par la difficulté de reconnaître
uelle division du vernier s'opère effectivement la coïncidence
. Car sa fixation devient moins certaine à mesure que les
es de la règle et du vernier sont moins différentes, c'est-à-
mesure que n augmente, D étant donné ; et l'indétermination
introduite peut aller jusqu'à excéder la fraction que l'on avait
é d'atteindre.

9. Pour comprendre ce fait, reportons-nous à la *fig.* 33, où
incidence est représentée comme opérée sur le n° 2 d'un
er dans lequel le nombre n est égal à 9. Si elle est exacte, les
n° 2 et n° 3 s'écarteront de leurs homologues en sens con-
et de quantités égales, exprimées par $\mp \frac{\mathrm{D}}{10}$. On appréciera
cette opposition d'autant mieux que la longueur absolue sur
lle elle porte sera plus grande ; et le caractère d'égalité qu'elle
avoir, si la coïncidence est exacte, en sera aussi plus aisément
ptible. Mais supposons, ce qui est un cas fort ordinaire, que
incidence dont il s'agit ne soit pas tout à fait rigoureuse,
ne cela est représenté dans la *fig.* 34. Alors le n° 2 du vernier
par exemple, tant soit peu en arrière de son homologue sur
gle, mais le n° 1 aura dépassé le sien ; ce qui montrera que le
zéro du vernier s'est avancé le long de la règle d'une quan-
ertainement plus grande que $\frac{\mathrm{D}}{10}$, mais moindre que $\frac{2\mathrm{D}}{10}$. Alors,
eu d'adopter l'une ou l'autre de ces évaluations qui seraient

toutes deux inexactes, on pourra prendre une moyenne entre elles; ou, ce qui sera mieux encore, on appliquera à celle qui semble la moins en erreur, une petite correction, exprimant la fraction de leur intervalle que l'on *jugera* devoir la rapprocher le plus de la vérité. Cela s'appelle une évaluation par *estime*, et ce procédé, tout arbitraire qu'il peut paraître, se trouve être pourtant, dans la pratique, un moyen très-assuré de précision, quand il est employé par un observateur exercé. Mais ce mode d'appréciation, qui complète les mesures immédiatement observables, deviendra beaucoup plus incertain si les écarts $\mp \frac{D}{n+1}$ ont une valeur beaucoup moindre, par suite de la petitesse de D, et la grandeur relative de n. Car, par exemple, dans le cas que nous considérons, la petitesse exagérée des écarts pourrait faire douter quel est celui des traits n° 1 ou n° 2 du vernier qui approche le plus de la coïncidence, ou même rendre indécis si elle a lieu sur l'un d'eux plutôt que sur l'autre. De sorte que l'erreur de l'appréciation, ou, comme on dit, de la *lecture*, pourrait alors devenir égale à la fraction même $\mp \frac{D}{n+1}$ que l'on avait espéré d'atteindre par la plus grande subdivision des parties. La pratique apprend aux artistes habiles les justes limites où il faut s'arrêter dans chaque instrument, selon les grandeurs des intervalles D de la division principale que le vernier est destiné à fractionner; et; pour plus d'exactitude, les coïncidences s'observent à travers des loupes, ou de petits microscopes, tels que ceux que j'ai décrits pour des usages pareils, tome Ier, pages 651-653. Un de ces appareils est fixé à chaque vernier par une monture mobile, qui permet de le transporter sur toutes les divisions, pour l'amener précisément sur celles autour desquelles s'opère la coïncidence.

190. Nous venons de considérer le vernier appliqué à une échelle de divisions rectilignes. On l'applique également aux divisions circulaires, comme sont celles que l'on trace sur le contour des cercles astronomiques. Dans ce cas, on fait les verniers circulaires aussi, et concentriques au système des divisions (voyez *fig.* 35). Il est évident que leur propriété pour les fractionner n'est point changée par cette modification. Aussi, on s'en sert de la

même manière, et on évalue leurs indications comme pour les échelles rectilignes. Seulement, on les exprime suivant le même mode de subdivision angulaire qui a été adopté par l'artiste en construisant l'instrument. Ces modes se réduisent principalement à deux : le sexagésimal et le décimal. Dans le premier, très-ancien, la circonférence se divise en 360 parties appelées *degrés*, le degré en 60 parties appelées *minutes*, la minute en 60 parties appelées *secondes*, dont les énoncés numériques se caractérisent par les indices °, ′, ″, placés en exposants. Cette subdivision par soixantièmes se continue même, *numériquement*, beaucoup plus loin chez les astronomes grecs, pour exprimer les fractions ultérieures de la seconde sexagésimale, en désignant les soixantièmes des ordres successifs par des accents de plus en plus nombreux ; mais, chez les modernes, toutes ces fractions s'expriment en parties décimales de la seconde. L'autre mode de subdivision, introduit en France avec le système décimal de mesures, est employé, comme plus commode, dans presque tous les cercles construits par les artistes français ; et c'est celui que Laplace a cru devoir adopter pour exprimer tous les résultats de la *Mécanique céleste*. La circonférence y est divisée en 400 parties égales appelées *grades*, le grade en 100 parties appelées *minutes décimales*, le centième de grade en 100 parties appelées *secondes décimales*. Mais ces dernières dénominations, qui rappellent les anciennes, sont impropres au nouveau système ; et il vaut mieux y énoncer les subdivisions du grade d'après leur valeur en parties décimales de cette unité. Ainsi, en la désignant par la lettre ^{g} mise en exposant, comme il est d'usage de le faire, la minute décimale vaut $0^g,01$, et la seconde décimale $0^g,0001$. Conséquemment 100^g composent le quart de la circonférence et valent 90° sexagésimaux ; d'où il suit que la seconde décimale, ou $0^g,0001$, vaut en secondes décimales $0'',324$ (*).

(*) Puisque 100^g valent 90°, 1^g vaut $0^\circ,9$ ou $1^\circ - \frac{1}{10}$. De là résulte cette règle fort simple : *Étant donné un arc quelconque exprimé en grades et en fractions décimales de grade, retranchez-en sa dixième partie, le reste sera le même arc exprimé en degrés et en fractions décimales de degrés sexagésimaux. Alors, ayant séparé les degrés entiers, s'il y en a, multipliez la fraction excédante par*

191. Maintenant, prenons un cercle divisé immédiatement en dixièmes de grades par des traits tracés sur son limbe. Chaque intervalle compris entre deux de ces traits vaudra $0^g,10$; ce sera la valeur de D. Supposons que le vernier de ce cercle embrasse 9 divisions D divisées en 10; on aura dans notre formule générale $n = 9$; $n + 1 = 10$. Par conséquent, si la coïncidence primitive est opérée sur le trait du vernier marqué 0, chaque pas qui la transportera à un trait ultérieur marquera $\frac{0^g,1}{10}$, ou $0^g,01$ au delà de la dernière division entière que le zéro transporté dépasse.

Dans un cercle de M. Gambey qui m'a servi en Espagne, et qui avait un diamètre de 13 pouces (anciennes mesures), le limbe vertical était divisé par intervalles de $0^g,1$ comme le précédent. Mais

---

60, *vous l'obtiendrez exprimée en minutes et fractions décimales de minutes sexagésimales. Séparez cet excédant fractionnaire et multipliez-le de nouveau par* 60, *vous l'obtiendrez exprimé en secondes de la même division.*

Soit, par exemple, l'arc donné.....	$0^g,0001$
J'en retranche le dixième.....	$0\ ,00001$
Il reste le même arc en degrés sexagésimaux.	$0^\circ,00009$
Je multiplie cette fraction de degré par 60...	60
J'ai le produit en minutes sexagésimales....	$0'\ ,00540$
Je multiplie encore par cette fraction.....	60
J'ai le produit en secondes sexagésimales...	$0''\ ,324$

N'ayant obtenu ni degrés, ni minutes, ni secondes entières, cette fraction exprime, en fractions décimales de seconde, la valeur sexagésimale de l'arc proposé.

Inversement: Un arc A étant donné en degrés, minutes et secondes sexagésimales, si l'on veut le traduire en grades, convertissez d'abord les secondes sexagésimales en fractions de minutes en les divisant par 60, et ajoutez-les aux minutes données; puis divisez de nouveau cette somme par 60 pour la convertir en parties décimales de degré: ayant alors tout l'arc exprimé en degrés, ajoutez-y le *neuvième* de sa valeur, vous aurez son expression en grades et parties décimales du grade.

Exemple. Soit l'arc proposé: $90^\circ\,0'0'',324$;

la fraction $0'',324$, divisée par 60, devient $0',0054$; divisée encore par 60, elle devient $0^\circ,00009$; l'arc proposé est donc...	$90^\circ,00009$
Ajoutez-y un neuvième de sa valeur.....	$10\ ,00001$
vous aurez le même arc exprimé en grades, qui sera.....	$100^g,00010$

ernier embrassait 49 de ces divisions qui s'y trouvaient divisées
50. On avait donc alors $D = 0^{t},1$; $n + 1 = 50$. Conséquem-
it, chaque pas de ce vernier marquait $\frac{0^{t},1}{50}$ ou $0^{t},0020$.

e cercle azimutal de ce même cercle portait une division bien
ns multipliée, ce qui suffisait pour les indications auxquelles il
ait servir. L'intervalle des traits y était $0^{t},50$. Le vernier en
rassait 24 qui étaient divisées en 25 sur son limbe. On avait
c alors $D = 0^{t},5$; $n + 1 = 25$. Conséquemment, chaque pas
e vernier marquait $\frac{0^{t},5}{25}$ ou $0^{t},02$.

92. Dans tous les cas, pour que les coïncidences puissent être
tement appréciées, il est indispensable que le bord intérieur
vernier, qu'il soit rectiligne ou circulaire, s'applique toujours
tement contre les traits de l'échelle dont il doit fractionner les
ies. C'est pourquoi on l'ajuste sur des pièces métalliques qui
reignent constamment à cette condition de contact. Son trans-
: s'opère en général par deux phases distinctes, qui lui font
ourir à volonté de grands ou de petits intervalles. Dans le pre-
r cas il est libre et peut être conduit par simple glissement le
; de la division fixe, de manière à en parcourir un nombre
lconque de parties entières. Pour la seconde phase, la monture
l est enchâssé s'attache au plan métallique de cette division par
vis de serrage S, *fig.* 36. Alors il ne peut plus recevoir que
très-petits déplacements, qui lui sont imprimés par une autre
longitudinale *vv*; donc l'écrou *e* est fixé invariablement à la
e VV'. Cette vis, dont on voit la tête en TT, est taillée à l'extré-
é d'une tige cylindrique d'une certaine longueur, dont un des
nts porte un petit renflement O, par lequel on la retient dans un
et *cc*, lequel est lié aux pinces de serrage S; de sorte que, le
age une fois opéré, le point O devient fixe. Donc alors, si l'on
nd la vis *vv* par sa tête TT, et qu'on la fasse tourner sur son axe,
ne peut plus se déplacer, soit en avant, soit en arrière; mais
s'enfonce dans son écrou ou s'en dégage, selon le sens du
uvement qu'on lui a donné. Ainsi elle attire cet écrou vers le
nt fixe O, ou l'en éloigne ; et elle fait par conséquent avancer ou

reculer le vernier VV′ qui s'y trouve attaché invariablement. Lorsque le vernier est appliqué à une division circulaire, le collet O de la vis conductrice n'est fixe que dans le sens longitudinal, et on lui laisse la liberté de tourner sur lui-même autour du point O, afin que la direction du mouvement imprimé soit toujours tangent à l'arc du limbe auquel le vernier se trouve répondre.

193. Ordinairement, on met sur les cercles portatifs quatre verniers au lieu d'un seul, et on les dispose aux extrémités de quatre alidades qui se croisent à angles droits sur le limbe. La lecture de ces quatre verniers doit donner plus d'exactitude qu'un seul, parce que les erreurs que l'on peut commettre dans les lectures partielles, et les petites inégalités qui peuvent exister entre les intervalles des divisions sur les différentes parties du limbe, offrent des chances de compensation qui en atténuent l'influence finale dans leur moyenne commune. Chacun de ces verniers se lit d'ailleurs avec un microscope fixé au-dessus de lui ou qui s'y transporte; et pour favoriser cette lecture, il y a au devant de chacun d'eux un petit écran de papier blanc ou une lame d'argent mat, placés dans une position oblique, qui font rejaillir la lumière extérieure sur les divisions coïncidentes. Le zéro de chaque vernier est ajusté de manière que la coïncidence se fasse pour chacun d'eux, sur des traits de numéros différents, afin que l'observateur qui les doit lire ne se prévienne pas en faveur de telle ou telle évaluation qu'il aurait d'abord faite sur le premier vernier qu'il lit.

Ce mode ingenieux de fractionnement est attribué à un géomètre français, appelé *Vernier;* mais les Portugais réclament l'honneur de son invention pour l'un de leurs compatriotes, appelé *Nonius*. C'est ce qui le fait désigner occasionnellement par l'un ou l'autre de ces deux noms.

194. De très-petites différences linéaires, comme celles que le vernier accuse, peuvent être mesurées directement, avec une précision extrême, à l'aide d'un appareil appelé *comparateur*, que j'ai décrit dans la 3e édition de mon *Précis de Physique*, tome Ier, page 134. Soient AB, *fig.* 37, une règle divisée en parties égales numérotées continûment, et A′B′ une seconde règle, ou portion de règle, qui doive être transportée le long de cette division, en restant en

t avec elle, comme la plaque d'un vernier. Marquez sur A'B' un ait n° o que vous ferez d'abord coïncider avec le n° o de AB. uite A'B' est transporté jusqu'à ce que son index dépasse ıe peu la division *a'*, *fig.* 38, on connaîtra d'abord le ·e de parties entières qui auront été ainsi parcourues ; et lant se mesurera par le comparateur, appliqué à la règle : A'B', en ramenant son index depuis sa position finale jusqu'à ıcidence sur la division *a'*. Mais cette observation pourra ɜndue incomparablement plus sûre et plus exacte par un arti- en simple. A cet effet, concevez que l'artiste qui a construit ;les les mette d'abord en contact dans leur position initiale, e le représente la *fig.* 39 ; puis qu'il trace *simultanément* sur ɜt sur l'autre, perpendiculairement à leur longueur, un grand re de traits, 100 par exemple, espacés à intervalles égaux, ensuite il continue ce même système de divisions sur la règle AB , dans toute l'étendue qu'elle doit avoir. Les deux échelles ainsi préparées, lorsqu'on remettra les deux traits n° o en dence, tous les cent traits qui suivent coïncideront également eurs homologues, comme ayant été tracés par cette condition :. Si ensuite on transporte A'B' jusqu'à ce que son zéro propre se la division *a'* d'une quantité moindre qu'une partie entière, ıe nous l'avons fait tout à l'heure, et comme le reproduit la o, on pourra encore évaluer l'excédant de marche par le arateur, en ramenant le n° o de A'B' en coïncidence sur cette on. Or, c'est ici que la multiplicité des traits tracés sur A'B' ɜnt utile. Car, si tous les intervalles compris entre les divisions règle AB étaient rigoureusement égaux entre eux dans toute ıgueur, la coïncidence établie entre le zéro mobile et la divi- *a'* se communiquerait à tous les traits homologues qui les ɜnt. Mais, comme une telle égalité est physiquement impos- , la généralité de cette coïncidence se trouve impossible aussi. ɔrte que, si on l'établit par exemple pour les premiers traits de , elle sera défectueuse pour les derniers, ou inversement. On donc plus de chance de compenser ces irrégularités, en opé- une sorte de coïncidence moyenne, qui mette un certain bre de ces traits un peu en avant sur leurs homologues, laissant

les autres un peu en arrière, de manière que les écarts partiels ainsi observés soient les moindres possible. Or, d'après une longue pratique de ce procédé, je puis assurer qu'en réitérant plusieurs fois son application autour d'une même division a', la coïncidence moyenne ainsi obtenue ramène la règle variable A'B' à des positions si exactement identiques, que toute la délicatesse du comparateur n'y fait pas découvrir de variations appréciables. Il y aurait de l'intérêt à examiner si ce procédé ne pourrait pas être transporté aux grands cercles astronomiques, où les fractions des divisions parcourues sur le limbe sont mesurées en ramenant le fil transversal du microscope sur la division unique, la plus prochaine qui le précède ou le suit dans le sens du mouvement opéré. Mais l'expérience seule pourrait apprendre si cette modification y conserverait ses avantages propres.

Au reste, quelque artifice que l'on emploie pour fractionner les échelles de divisions, tracées sur des limbes ou sur des règles métalliques, il est évident que l'application n'en sera exacte qu'autant que les parties mesurées et celles de l'appareil mesureur seront employées avec une température commune, ou ramenées par le calcul à cette condition. Or, comme les éléments des corrections que leurs indications exigeraient dans ce dernier cas seraient fort incertains, on doit toujours prendre toutes les précautions imaginables pour maintenir, dans toutes les parties des appareils, l'égalité de température qui les rend nulles ou négligeables pratiquement.

Section II. — *Les niveaux.*

195. On appelle communément *niveau à bulle d'air* un tube de verre scellé à ses deux bouts, portant sur une de ses arêtes une échelle de divisions tracées à intervalles égaux, et rempli en partie seulement d'un liquide facilement mobile, tel que l'eau, l'alcool ou l'ether. Ces deux derniers sont préférables, parce qu'ils mouillent plus completement le verre. L'espace qui n'est point rempli par le liquide est occupé par l'air, ou au moins par la vapeur du liquide si l'on a fait bouillir celui-ci dans le tube avant de le sceller; et cette dernière pratique excluant l'air intérieur contribue, comme

ncevra tout à l'heure, à la sensibilité ainsi qu'à la régularité
areil. Le liquide, en vertu de sa pesanteur, tendant toujours
er la partie la plus basse de l'espace qui le renferme et à s'y
le niveau, si l'on dispose l'arête divisée du tube dans une
n exactement ou à peu près horizontale, la bulle d'air ou
ur se déplace aussi, et se porte dans la partie de la cour-
ıtérieure qui se trouve actuellement la plus haute. Si l'on
l'inclinaison du tube sur la ligne horizontale, la bulle
aussi en conséquence et se transporte au nouveau som-

lier ces déplacements aux variations de l'obliquité, consi-
d'abord le cas où la bulle d'air serait assez petite pour
r être considérée comme un point. Si l'intérieur du tube
arfaitement cylindrique, il n'y aurait à la rigueur qu'une
osition du niveau où la bulle pût se trouver immobile au
du tube; ce serait la position horizontale, et la plus petite
son la déplacerait indéfiniment, de manière qu'elle se por-
out entière aux extrémités. Il faut donc, pour prévenir ces
ments, que l'intérieur du tube soit légèrement arqué, suivant
e courbe continue, qui n'offre pas d'inflexion. Alors la
e place de manière que son milieu réponde au point *unique*
ngente à la courbure intérieure du tube est actuellement
ıtale: telle est toujours la condition mathématique de son
tuel. Donc, si l'inclinaison du tube sur la ligne horizontale
:, la bulle se déplace et se porte au point de la courbure qui
venu le plus élevé, c'est-à-dire où la tangente est devenue
le à l'horizon.

. Parmi toutes les formes de courbure où ce parallélisme ne
jamais se réaliser qu'en un seul point, la plus avantageuse
ıer au tube est celle du cercle, parce qu'alors les déplace-
de la bulle mesurent immédiatement sur le tube les change-
de l'inclinaison. En effet, soit, *fig.* 41, VB un arc de cercle
gueur finie qui représente la courbe supérieure de section du
ar un plan vertical; soient C le centre de cet arc, et CZ une
ıle menée par ce centre, laquelle ira couper l'arc en un cer-
oint X. Dans cette position du niveau, la bulle d'air, que

nous supposerons encore infiniment petite, ira se loger en X, puisque c'est là seulement que la tangente est horizontale. Marquons ce point sur le tube, et sortons le rayon CX de la verticale, en l'inclinant quelque peu vers le bout V, comme le représente la *fig.* 42. Alors, si nous menons par le centre C une nouvelle verticale CZ, elle coupera l'arc BV en un point S′ différent de X; et la bulle, quittant le point X, ira se loger en S′. L'arc SX, qu'elle aura décrit, sera donc la mesure de l'angle au centre SCX, qui est l'inclinaison actuelle du rayon CX sur la verticale. Ainsi, ayant marqué les deux points X et S′ sur le tube, dans chacune des positions précédentes, on en conclura cette inclinaison, ou l'angle SCX, si l'on sait convertir l'arc SX en mesures angulaires dans le cercle dont le rayon est CX.

197. Dans tout ceci nous considérons l'arc BV comme une ligne circulaire mathématique. On réalise cette conception en donnant à l'intérieur du tube la forme d'une surface annulaire, décrite par une courbe rentrante circulaire ou elliptique, de dimension constante, dont le plan, perpendiculaire à l'arc BV et passant par son centre, se meut ainsi le long de cet arc, en le touchant toujours par le même sommet. Pour cela, on prend un tube de verre à parois épaisses, déjà à peu près cylindrique à l'intérieur; puis, ayant fixé, dans le prolongement de l'axe d'un *tour*, un cylindre d'acier bien calibré, plus long que ce tube, mais d'un diamètre un peu moindre, on le recouvre d'une couche d'émeri imbibée d'huile, et on l'introduit ainsi dans le tube que l'on tient à la main. On imprime alors à ce cylindre un mouvement de rotation très-rapide; et, tenant toujours le tube pressé sur lui par une même arête, on le frictionne ainsi longitudinalement dans toute son étendue, d'autant plus efficacement que l'axe d'acier a été pris plus long. Après avoir opéré ainsi pendant quelques minutes, on retire le tube; et, l'intervertissant, on y fait rentrer le cylindre par son bout opposé, puis on le frictionne de nouveau en maintenant toujours le contact sur la même arête. Quand ces alternatives ont été suffisamment réitérées, il en résulte que le tube et le cylindre se sont usés mutuellement, de manière à se mettre en contact complet dans toute la longueur de l'arête commune, quelle que soit

tendue de leur transport longitudinal, et le sens suivant lequel est opéré. Or, cette double condition ne peut être remplie que l'arête de contact constant est devenue exactement rectiligne ou rculaire sur les deux corps. Mais, comme la première solution est ı cas unique, c'est généralement la seconde qui se réalise; et ın obtient ainsi des courbures circulaires dont le rayon est déterıiné par les grosseurs relatives des cylindres dont on a fait usage, ır la multiplicité des retournes que l'on a effectuées, et par l'énergie ıs frictions opérées dans chacune d'elles. Quand on croit le avail suffisamment parfait, on trace une division de parties égales ır toute la longueur de l'arête qui doit servir de sommet, puis ı introduit dans le tube la quantité de liquide que l'on juge conınable pour obtenir une bulle qui n'était ni trop longue ni trop ırte pour l'usage, et on le ferme avec de simples bouchons ovisoires. Il ne reste plus qu'à vérifier l'exactitude de la circurité supposée, et à déterminer la mesure angulaire des arcs que bulle y parcourt en passant d'un trait à un autre. Il y a pour la une méthode qui, à l'avantage d'une extrême précision, joint lui de s'effectuer avec les cercles mêmes auxquels le niveau doit appliquer, de sorte qu'elle est toujours à la disposition de l'asonome. Mais je ne pourrai la décrire qu'après avoir exposé le ıode d'observer avec ces instruments; et je dois conséquemment ıe borner ici à indiquer celle qui est habituellement employée ar les artistes, quoique moins parfaite. L'appareil qui leur sert onsiste en deux plans métalliques qui se coupent dans une charière commune autour de laquelle on peut les faire tourner, pour arier l'angle dièdre qu'ils comprennent; et ce mouvement est péré par une vis bien régulière, à filets très-fins, qui porte sur ı tête un cadran divisé ainsi qu'un index, comme les vis de microètre. Celle des deux faces de l'angle dans laquelle le pivot de la is s'insère, se pose sur un plan poli rendu horizontal par l'appliation d'un niveau à base plane; et, sur l'autre, amenée d'abord lui être parallèle, ou au moins très-peu oblique, on fixe, avec uelque enduit, le tube travaillé, en rendant supérieure celle de ses rêtes qui porte l'échelle de parties égales. Alors on règle l'angle des leux plans de manière que la bulle se porte vers l'une des extrémi-

tés des divisions; et, notant sa position à ce point de départ, on fait successivement tourner la vis de quantités connues, pour l'amener ainsi progressivement dans toutes les autres portions de l'échelle. On voit par là si la marche de la bulle est proportionnelle aux variations de l'angle formé avec l'horizon par le plan sur lequel le tube est appliqué; et comme les amplitudes de ces variations peuvent être individuellement calculées d'après la longueur des pas de la vis, que l'on est censé connaître, on en conclut la valeur angulaire des parties tracées sur le tube, c'est-à-dire le changement d'inclinaison qui fait parcourir à la bulle cet intervalle. Si la marche ainsi observée n'est pas suffisamment régulière, ou si elle paraît soit trop lente, soit trop rapide pour l'usage auquel le niveau est destiné, on ôte le liquide et on recommence le travail. Si, au contraire, les conditions désirées sont bien remplies, on ferme les deux bouts du tube par des obturateurs exactement calibrés, préparés d'avance, et que l'on y fixe définitivement. On scelle aussi quelquefois ces bouts à la lampe d'émailleur; mais pour cela, il faut chauffer successivement chaque extrémité du tube jusqu'à la fusion, ce qui ne peut se faire sans le ramollir sur une certaine étendue vers ces extrémités, où il est presque impossible qu'il ne se déforme pas; de sorte qu'on doit soigneusement éviter d'y amener la bulle quand on se sert du niveau, et il devient alors nécessaire d'étudier de nouveau sa marche après qu'on l'a scellé, pour savoir dans quelle amplitude de course elle est restée régulière.

198. Le mode de travail que je viens d'expliquer fait obtenir des rayons de courbure d'une dimension surprenante. Fortin a construit ainsi pour un de ses cercles répétiteurs, un niveau très-régulier, sur lequel la bulle se déplaçait de 3 millimètres pour une variation de 1″ sexagésimale dans l'inclinaison. De là on déduit que le rayon de courbure n'avait pas moins de 619 mètres de longueur (*); mais il n'est pas nécessaire de leur donner une si grande

(*) Cette déduction est très-facile. Sur le niveau dont il s'agit, un arc de 1″ sexagésimale est exprimé par une longueur de 3 millimètres. Or, on sait par les calculs trigonométriques, que le rayon du cercle plié en arc occupe sur son contour 57°17′44″,8 de la division sexagésimale, ou, ce qui revient

et même l'excessive mobilité que la bulle acquiert alors
ante pour l'observateur. J'ai employé avantageusement
era, en 1825, un excellent niveau de Gambey, sur
marche de 1^{mm} répondait à une variation de $1'',78223$
naison; ce qui suppose un rayon de courbure égal à
Je lui ai trouvé une sensibilité parfaitement suffisante.
les appareils si délicats conservent la régularité de leur
nterne, il ne faut pas les enfermer dans des enveloppes
, dont les dilatations et les expansions propres contra-
s modifications du même genre, mais beaucoup plus
les changements spontanés de la température ambiante
ver au verre, dont le tube est fait. Ce tube doit rester
oute sa longueur, et être simplement retenu à ses extré-
la monture métallique qui le supporte de manière qu'il
as s'y déplacer. Celle-ci ensuite se suspend ou s'attache
aux axes rigides, dont le niveau doit mesurer l'incli-
nelle sur la ligne horizontale ou verticale, et déceler
es mouvements. Les diverses constructions employées
niveau, ont pour but de donner au tube cette liberté
ité tout à la fois. Elles se composent essentiellement
e épaisse de métal, aux extrémités de laquelle deux
t saillie perpendiculairement à sa longueur; et celles-ci
nt par des anneaux circulaires qui soutiennent les
tube, ou par des supports en forme de V sur lesquels
e. Une de ces tiges terminales est formée de deux
nt la supérieure est enchâssée dans l'inférieure et peut y
n petit mouvement de course au moyen d'une vis de
ui éloigne ou rapproche ainsi de la base commune le
rrespondant, afin que la bulle puisse être amenée dans

06264",8, nombre dont le logarithme tabulaire est 5,314425133....
que seconde vaut 3 millimètres, le rayon vaudra 3 millimètres
par 206264,8, ou, en mètres, $618^{m},7944$.
mple que j'ai rapporté quelques lignes plus bas, la multiplica-
as si simple. Alors il faut soustraire le logarithme de $1'',78223$ de
yon réduit en secondes; et le produit en mètres est $115^{m},734$,
ai dit.

la partie divisée du tube, lorsque cette base est fixée au système rigide, dont le niveau doit définir la position ou déceler les moindres mouvements. Encore, avec cette liberté de suspension, les tubes des niveaux ne doivent pas être réputés absolument exempts de tout changement de forme : il faut y constater de temps en temps la marche de la bulle pour découvrir les petites variations qu'ils pourraient occasionnellement subir ; ce qui se fait par des procédés d'observations que je décrirai plus tard.

199. L'échelle de division tracée par le tube est numérotée par intervalles pour en faciliter la lecture. Le mode le plus simple consiste à placer le zéro de l'échelle à un des bouts du tube et de faire suivre continûment la numération jusqu'à l'autre bout. Comme le niveau s'emploie toujours dans des sens successivement contraires, il est bon de définir chacun de ces bouts par quelque caractère physique, dont l'énoncé puisse toujours le rappeler sans incertitude, par exemple en y collant des bandes de papier de couleurs différentes, dont on leur transporte la dénomination. Je supposerai que l'on ait appliqué ainsi une bande verte au bout sur lequel la division commence, et une bande blanche sur le bout où elle se termine ; de sorte que j'appellerai toujours le premier le bout *vert*, le second le bout *blanc*.

200. Jusqu'ici nous avons décrit les mouvements de la bulle d'air ou de vapeur, intérieure au tube, comme si elle était un simple point. Cette abstraction était commode pour simplifier l'exposé des raisonnements ; mais elle n'existe pas en réalité, et l'on évite, avec raison, de s'en rapprocher dans la pratique. Car l'expérience apprend qu'une bulle très-petite se meut avec une extrême lenteur, et que le moindre obstacle, la plus petite irrégularité du tube, suffit pour l'arrêter. Au contraire, on fait la bulle assez longue pour occuper une portion notable de l'échelle divisée, par exemple le quart ou même le tiers, parce que l'on a observé qu'avec ces proportions elle se déplace plus promptement, et revient aussi plus promptement à sa position finale d'équilibre. Dans tous les cas, lorsqu'elle y est arrivée, sa configuration est toujours telle, que son milieu se trouve au point de la courbure où la tangente est horizontale, comme cela aurait lieu si elle était réduite à un simple

int; et autour de ce milieu sa forme est symétrique; de sorte e ses deux extrémités en sont également distantes. Ce sont celles nt on lit la place sur l'échelle des divisions, et je leur donnerai s dénominations pareilles à celles du bout du tube dont elles se prochent. Ainsi, j'appellerai *verte* l'extrémité de la bulle qui rapproche du bout vert; *blanche*, celle qui se rapproche du ut blanc, et je désignerai aussi par les lettres analogiques v et es numéros respectifs des divisions auxquelles elles répondent. Le peu de mobilité de la bulle lorsqu'elle est très-petite, est un énomène qui dépend des attractions réciproques du liquide et du re : il est du genre de ceux que l'on nomme phénomènes capil- res, parce qu'ils ont été d'abord observés dans des tubes très- oits, où l'on sait que les liquides susceptibles de mouiller le verre èvent au-dessus de leur niveau naturel, en formant une petite co- ne terminée par une surface concave à l'extérieur. Les bords de te surface, composés de molécules adhérentes au tube, s'élèvent ong de ses parois; et leur inclinaison dépend de l'action plus moins grande du tube sur le fluide, et aussi de la fluidité plus moins parfaite. Un effet analogue se produit dans les niveaux, les extrémités de la bulle qu'ils comprennent. Ces extrémités it relevées le long du tube. Conséquemment, la forme de la bulle ir est arrondie dans les endroits où la surface du liquide touche verre : elle l'est surtout aux deux bouts plus que sur les côtés, elle l'est plus dans un tube étroit que dans un tube large. Cela nt à la nature des forces capillaires qui, partant de la surface, et ayant d'action sensible qu'à une très-petite distance, ont un effet utant plus intense que les surfaces qui les exercent sont plus prochées. C'est pour cela que l'élévation des liquides dans les es étroits et verticaux augmente à mesure que leur diamètre érieur diminue, de manière que la colonne liquide ainsi sou- ée est réciproque à ce diamètre, comme l'expérience et le calcul ccordent également à le prouver. D'après cela, on conçoit que ffet de ces forces doit surtout être considérable sur une très- tite bulle, autour de laquelle le fluide formerait une surface ncave d'un très-petit rayon. Alors la moindre aspérité du tube ut changer considérablement les attractions qui déterminent

cette forme, et allonger la bulle dans un sens plus que dans un autre, ou même la retenir absolument; au lieu que ces effets seront beaucoup moindres sur une longue bulle et dans un tube large, où le relèvement du fluide, par l'effet de la capillarité, sera beaucoup moindre. Tels sont les avantages des grands niveaux. Mais, pour que cette longueur soit utile, il faut que les tubes soient bien travaillés et exactement calibrés à l'intérieur par des frictions longitudinales associées à des retournes nombreuses; précautions que le commun des artistes ne prend pas d'ordinaire, se contentant d'y suppléer par les courbures naturelles que les tubes de verre creux acquièrent toujours dans la fabrication.

Les niveaux sont surtout employés dans les instruments d'astronomie pour assurer et constater la verticalité ou l'horizontalité des axes de rotation autour desquels leurs mouvements s'exécutent. Je les considérerai ici successivement dans ces deux sortes d'emploi.

Usage du niveau pour constater la verticalité des axes de rotation. Application spéciale aux instruments ayant un axe vertical, qui mesurent les distances zénithales par retournement.

201. Les instruments d'astronomie qui ont un axe de rotation vertical sont compris dans le type général dont j'ai indiqué les conditions abstraites, tome Ier, page 44, et qui s'y trouve représenté, *fig.* 18, par ses simples linéaments. Je rendrai plus tard sensibles, par d'autres figures, les modes de construction les plus habituels par lesquels cette abstraction se réalise. Ici je considérerai seulement un axe rigide PA, *fig.* 44, fixé invariablement sur la direction PA, mais pouvant tourner librement sur lui-même, et lié aussi invariablement avec un niveau BV, d'une longueur indéfinie, qui partage son mouvement de rotation. Puis, concevant cet axe déjà rendu à peu près vertical par des procédés approximatifs, par exemple en l'alignant sur un fil-à-plomb qu'on lui comparerait, je vais chercher, à l'aide du niveau, la valeur exacte de l'angle APZ, qu'il forme avec la verticale PR menée par un de ses points, lequel sera, si l'on veut, celui où il est retenu inférieurement au centre du cercle azimutal qui le supporte.

Pour cela, considérons d'abord l'axe PA en coïncidence *rigou-*

use avec la verticale PZ comme le représente la *fig.* 41. BAV est section circulaire du niveau, sur laquelle est tracée l'échelle de s divisions, et C est son centre de courbure. En tournant le tube r lui-même, jusqu'à ce que la dimension transversale de la bulle trouve bissectée en deux moitiés symétriques par l'axe longitunal de l'échelle, le plan central CBV qui contient la section cirlaire devient vertical, conséquemment parallèle à l'axe PA dans position que nous lui attribuons; et l'on peut le concevoir transorté sur cet axe même en coïncidence, sans troubler l'équilibre : la bulle. L'artiste qui a construit l'instrument a toujours disposé monture du niveau de manière que l'axe PA, ou la projection de t axe sur le plan de la section centrale du niveau, rencontre idéament le tube à peu près au milieu de sa longueur, et lui soit à eu près perpendiculaire. Si ces conditions étaient exactement remlies, le centre C de la courbure se trouverait amené sur le prongement de l'axe AP. Mais nous devons le supposer généralement ors de cette situation exceptionnelle, et je l'ai figuré ainsi. Menant onc par le point C une verticale CZ, elle coupera le cercle de courure au point X où la tangente est horizontale, et ce sera là que le ilieu de la bulle ira se placer. Pour simplifier les énoncés, je condérerai d'abord cette bulle comme un simple point, et je rétablii ensuite la réalité de ses dimensions dans les résultats que cette bstraction nous aura fournis. D'après les dispositions préparatoires rises par l'artiste, la bulle ne se jettera point vers l'une ou l'autre xtrémité du tube dans la position verticale que nous attribuons à 'axe PA. Elle se portera vers sa partie moyenne, de sorte que cette ondition de verticalité étant réalisée, le point X pourrait généraement être observé et noté sur l'échelle des divisions. Cependant, i l'on supposait ou si l'on trouvait effectivement qu'il est alors trop loigné du milieu de cette échelle, on pourrait toujours l'en rapprocher en tournant ou en détournant la vis de rappel qui soulève ou baisse l'un des bouts du tube relativement à l'autre; et cette faculté le déplacement suffit pour qu'on ait la liberté d'attribuer au point X une position réellement observable sans limiter en rien le raisonnement. Mais cette condition générale est la seule que l'on puisse légitimement lui assigner. Car, lorsque le niveau est attaché

par sa monture à un instrument, les deux points A et X sont, en réalité, tout à fait inconnus, le premier, comme étant sur le prolongement idéal de l'axe de rotation rectiligne et mathématique, qui n'est pas physiquement saisissable avec ces caractères d'abstraction; le second, comme étant le lieu où la bulle doit se placer quand cet axe est rendu exactement vertical; condition qui le détermine en effet dans chaque cas particulier d'application, mais que l'on ne peut pas supposer actuellement satisfaite, ou immédiatement réalisable, lorsque l'instrument est remis dans nos mains avec son niveau.

202. Considérant donc les deux points A et X comme inconnus dans la *fig.* 41, je désigne par ces mêmes lettres les arcs OA, OX qui marquent respectivement leur distance à l'origine O des divisions que je suppose placée au bout V du tube, et numérotée continûment jusqu'au bout B. Du point A, je mène AC dirigée au centre de courbure C, et je nomme I′ l'angle PAC, qui est l'inclinaison de l'axe de rotation fixe sur le rayon CA du niveau. Dans la condition de verticalité de PA, que la figure suppose, cet angle est égal à ACX. Comme le niveau est invariablement lié à l'axe PA par sa monture, le système des droites PACX reste pareillement invariable dans toutes les positions que l'on peut donner à l'instrument autour de cet axe, soit que celui-ci conserve la verticalité que lui attribue la *fig.* 41, soit qu'on l'incline sur la verticale, ainsi que le représentent les *fig.* 42 et 43. Mais, entre la première supposition et les deux dernières, il y aura une différence de résultats caractéristiques. En effet, si l'axe PA est vertical, et qu'on le fasse tourner sur lui-même en entraînant le plan PACX, la bulle restera fixe au point X dans tous les azimuts lorsqu'elle sera revenue à l'équilibre, puisque ce point sera toujours le sommet le plus élevé du tube qui la contient. Supposez au contraire que l'on incline l'axe dans le plan PAC, en l'abaissant par exemple du côté du bout V, comme on le voit *fig.* 42, de sorte qu'il forme alors l'angle ZPA ou + I avec la verticale PZ menée par son pied. La bulle quittera évidemment le point X pour se porter au nouveau sommet S′ où la tangente est devenue horizontale; et ce sommet se trouvera encore à l'intersection de l'arc BV par la verticale CZ, menée du centre C, dans sa nouvelle

›sition. En outre, puisque les points A et X sont fixés sur le tube, s angles PAC, ACX, resteront encore égaux entre eux et à I′ ›mme précédemment; ainsi CX étant encore parallèle à PA, ıngle S′CX sera égal à ZPA ou I. Ceci reconnu, faites décrire à ut l'instrument une demi-révolution autour de l'axe PA, ce qui ımènera l'arc BV dans le plan PAC, en intervertissant sa position lativement à cet axe, comme on le voit *fig.* 43. La bulle quittera point S′ qui s'est abaissé, dans cette inversion, et elle se porra au nouveau sommet S″ marqué sur l'arc BV par l'intersection : la verticale CZ; de sorte que CX restant toujours parallèle à PA ır construction, et CZ parallèle à PZ comme verticale, l'angle 'CX sera encore égal à ZPA qui est l'inclinaison constante de l'axe ɛprimé par I. L'arc actuel S″X sera donc égal à X′2 ou S′X qui ıesurait précédemment ce même angle. Or, à la vérité, chacun de ɜs deux arcs est individuellement inconnu, puisque l'on ignore la ›sition du point X sur l'échelle des divisions; mais on peut conıître leur somme S″S′ qui est l'arc total décrit par la bulle en pasınt de la première position à la seconde; et la valeur de cet arc, ıesuré en parties de la division tracée sur le tube, est OS′— OS″. renant donc la moitié de sa valeur observée, ce sera l'inclinaison I.

203. Pour rendre ce résultat d'une application générale et sûre, faut l'exprimer en langage algébrique. Conformément aux conentions précédemment faites, je désigne l'arc constant et inconnu 'X par + X, en le comptant comme positif à partir de l'origine O, ans le sens de numération de l'échelle. J'emploie aussi l'angle 'PA ou + I comme positif, lorsqu'il se forme, *dans la première bservation,* du même côté de la verticale où se trouve le bout V, uquel cette numération procède. Alors, si l'on exprime les deux valuations successives de l'angle I par les arcs qui le mesurent sur : contour du tube, on aura :

1re observation. *Fig.* 42. $I = OS' - X.$

2e observation. *Fig.* 43. $I = X - OS''.$

:n combinant ces deux équations, d'abord par somme, puis par ifférence, on en tire

ı) $2I = OS' - OS''; \qquad 2X = OS' + OS''.$

204. Pour simplifier les raisonnements, nous avons considéré la bulle comme réduite à un point sans dimension sensible. Il faut lui restituer sa longueur réelle. Je la désigne par $2l$ et je la supposerai la même dans les deux observations, ce qui revient à admettre que la température ne change pas sensiblement pendant l'intervalle de temps qui les sépare. Alors rien n'est plus facile que de l'introduire dans nos deux équations. Car les points S′, S″ y désignent généralement le *milieu* de la bulle quelle que soit sa longueur; de sorte qu'il reste seulement à exprimer les arcs OS′, OS″, qui le définissent, par les arcs observables auxquels les deux bouts de la bulle se terminent. Pour cela je désignerai généralement ceux-ci par les lettres v et b, prises en correspondance avec les bouts du tube que nous avons affectés de lettres analogues, et je spécifierai par un ou deux accents celles qui appartiennent à la première ou à la seconde observation. Évaluant donc OS′, OS″ en fonction de ces éléments nouveaux, associés à la longueur $2l$ de la bulle, on aura évidemment :

1re obs. *Fig.* 42. $OS' = b' - l$, ou bien $OS' = v' + l$.
2e obs. *Fig.* 43. $OS'' = b'' - l$, ou bien $OS'' = v'' + l$.

Ceci, étant substitué dans les expressions de 2I et de 2X, les transforme dans les suivantes :

$$(2)\begin{cases} I = \frac{1}{2}(b' - b''), & \text{ou bien } I = \frac{1}{2}(v' - v''), \\ X = \frac{1}{2}(b' + b'') - l, & \text{ou bien } X = \frac{1}{2}(v' + v'') + l. \end{cases}$$

Les seconds membres se trouvent maintenant exprimés en fonction de quantités immédiatement observables. Il ne s'agit plus que d'en bien régler l'application.

205. Je considère d'abord l'inclinaison I. Dans les *fig.* 42 et 43 qui nous servent de type, le sommet A de l'axe de rotation s'écarte de la verticale en s'abaissant vers le bout V du niveau, d'où les divisions partent. Pour ce cas, l'arc OS′ est nécessairement plus grand que l'arc OS″; ainsi notre expression de I, donnée par la première des équations (1) ou (2), se trouve avoir alors le signe positif. Supposons, au contraire, que nous eussions figuré l'axe PA *penchant* vers le bout B, en conservant toujours le même ordre

d'indices aux deux opérations successives. Il est facile de prévoir, et de constater, que nous aurions encore obtenu pour I une expression exactement pareille. Seulement le premier arc OS′ s'y trouverait moindre que le deuxième OS″, de sorte que l'expression numérique de I se présenterait avec le signe négatif. Conservant donc toujours aux nombres lus sur le niveau le système progressif d'indices que nous leur avons appliqué, et qui correspond à l'ordre de succession dans lequel ils sont obtenus, nous pourrons, dans tous les cas, interpréter le sens d'application de l'angle I d'après le signe positif ou négatif que prendra son expression numérique; c'est-à-dire que I *étant positif*, le sommet A de l'axe *penchera* vers le bout V du tube *où la division commence;* et I étant négatif, cet axe *penchera* vers le bout B, *où elle finit*.

206. Les distances zénithales employées aux recherches astronomiques doivent toujours être comptées à partir de la verticale menée par l'œil de l'observateur. Mais les instruments à limbe vertical, qui opèrent par retournement, ne les donnent pas telles; ils les mesurent à partir de leur axe de rotation PA, indéfiniment prolongé. Alors, en prenant pour exemple le sens de déviation attribué à cet axe dans la *fig.* 42, ces distances seront trop faibles si elles sont mesurées du côté du faux zénith Z_c où se trouve l'origine O des divisions; et, dans ce cas, il faudra leur *ajouter* l'inclinaison +I mesurée par le retournement du niveau, pour obtenir leur valeur véritable comptée à partir du vrai zénith Z. Mais si on les observe du côté opposé du faux zénith Z_c, vers le bout B, elles seront trop fortes; et il faudra en *soustraire* ce même angle I. Or nous pouvons encore faire concorder cette inversion d'emploi de l'angle I avec l'inversion de signe que son expression algébrique comporte. Car, pour cela, il n'y a qu'à convenir de faire *toujours* la première observation, la troisième, la cinquième, et généralement toutes celles de rang impair, en tournant le bout O ou V du niveau vers la plage du ciel où se trouve l'astre que l'on observe. Car, avec cette seule précaution, l'inclinaison calculée I s'appliquera toujours, avec son signe propre, à la fausse distance zénithale observée, lui devenant additive ou soustractive selon que ce signe l'indiquera; et les expressions de I tirées des équations (2) s'emploieront aussi dans tous les

cas de la même manière, avec le même avantage d'uniformité.

207. Pour que ces résultats de nos démonstrations puissent être toujours appliqués facilement et sans hésitation, je les traduis en une règle générale que l'on n'aura plus qu'à suivre :

On a une série de distances zénithales, observées par retournements successifs, avec un instrument muni d'un niveau divisé, dont le plan de courbure est parallèle au plan de limbe sur lequel les arcs de distance se mesurent. Les deux bouts de ce niveau sont caractérisés physiquement par des papiers colorés. L'échelle de divisions tracée sur son contour commence au bout *vert*, et se continue de là jusqu'au bout *blanc* par une numération progressive. Dans toutes les observations de rang impair, le bout *vert, origine des divisions*, a été tourné du côté du zénith apparent où se trouvait l'astre observé : on demande la valeur, et le sens d'application de l'angle I, que l'axe de rotation de l'instrument forme avec la verticale vraie. Voici la règle.

Écrivez sur deux colonnes verticales les quantités b', b'', v', v'', *propres à chaque couple d'observations : la série étant terminée, formez les différences successives* $b' - b''$, $v' - v''$, *pour chacun des couples, afin qu'elles se vérifient mutuellement, et prenez dans chaque colonne leur somme totale, où vous les combinerez avec le signe algébrique individuel qu'elles se trouveront avoir occasionnellement. Prenez la moyenne de ces sommes que je désignerai par* M, *en la supposant traduite en mesures angulaires, d'après l'évaluation antérieure des parties du niveau. Alors l'inclinaison* I, *propre à chaque couple, étant* $\frac{1}{2}(b' - b'')$ *ou* $\frac{1}{2}(v' - v'')$, *si* n *désigne le nombre total des observations, qui sera pair, et double du nombre des couples, la valeur moyenne de* I *sera*

$$I = \frac{M}{n}.$$

Lorsque I *se trouvera positif, le sommet de l'axe de rotation penchera vers l'astre observé ; lorsque* I *sera négatif, ce sommet s'écartera de la verticale en s'éloignant de l'astre. Quel que soit celui de ces deux cas qui se réalise, si* A *est la distance zénithale moyenne observée sur le limbe à partir de l'axe de rotation de l'in-*

strument, la distance correspondante Z, *comptée de la verticale vraie, sera*

$$Z = A + I = A + \frac{M}{n},$$

I *ou* $\frac{M}{n}$ *s'ajoutant toujours ainsi, avec son signe propre, à la distance moyenne observée* A.

208. L'échelle tracée sur les niveaux astronomiques contenant toujours un grand nombre de divisions, il serait incommode de la numéroter continûment d'un bout à l'autre. Pour la simplifier, on l'interrompt vers le milieu de la longueur du tube où les bouts b, v, de la bulle ne doivent jamais être amenés dans les applications, parce que l'autre bout s'en trouverait rejeté trop près des extrémités du tube. Puis, au delà de cette partie nue, on recommence une autre division de même sens, spécialement affectée au bout de la bulle que nous désignons par b; c'est ce que représente la *fig.* 45. Cette identité de sens suffit, en effet, pour nos formules, puisque la constante propre à la position de la nouvelle origine disparaît dans les différences $b' - b''$, $v' - v''$, qui servent seules dans le calcul, et qui se trouvent toujours comptées sur une même branche de la graduation, dans les limites restreintes de déplacement que chaque bout de la bulle est supposé recevoir. Par cet artifice, les nombres que l'on a besoin de lire sur la partie de l'échelle la plus éloignée de l'origine, en deviennent plus simples.

209. Je rapporterai comme exemple, deux séries d'observations faites à Formentera, le 7 juin 1825, des deux côtés du zénith, avec un niveau ainsi disposé, dont chaque partie évaluée en arc valait, en moyenne, 1″,78223. Mais, à l'époque où ces observations furent faites, la valeur d'une partie se trouvait être 1″,7797. Je désignerai cette valeur par a.

1re *série : β de la petite Ourse au nord du zénith, composée de cinq couples, comprenant en somme* 10 *observations.* (Voici le tableau des indications successives du niveau dans chacune d'elles, avec le calcul de l'inclinaison I qui s'en conclut.)

Bout blanc. b	Différences pour chaque couple $b' - b''$	Bout vert. v	Différences pour chaque couple $v' - v''$
38 33	+ 5,00	43,50 38,50	+ 5,00
38 33	+ 5,00	44 39	+ 5,00
37 32,50	+ 4,50	43 38,50	+ 4,50
38 31,50	+ 6,50	44 37,50	+ 6,50
38 32	+ 6,00	44,25 38	+ 6,25
$\Sigma(b' - b'') =$	+ 27,00	$\Sigma(v' - v'') =$	+ 27,25

Report de la colonne des b.. $\Sigma(b' - b'') =$ + 27,00

Différence des sommes.. 0,25

Somme moyenne M = + 27,125

Calcul de l'inclinaison I. Log. M = 1,4333697 +
Log. a = 0,2503468

1,6837165 +

Nombre des observat. $n = 10$. Log. n = 1,0000000

Log. I = 0,6837165 + donc I = + 4",827

Distance moyenne observée, comptée à partir de l'axe de rotation du cercle vers le nord..... A = 36°12' 7",704

Valeur de I..... + 4",827

Somme ou distance zénithale moyenne comptée à partir de la verticale vraie : vers le nord.... Z = 36°12'12",531

La valeur trouvée pour I étant positive, le sommet de l'axe de rotation de l'instrument penche vers le côté du zénith où se trouve l'étoile, conséquemment ici vers le nord.

210. Si l'on avait jugé cette inclinaison trop forte pour vouloir la laisser subsister dans les séries suivantes, on aurait pu aisément la rendre moindre, ou même tout à fait nulle, en se servant des valeurs de X données par les équations (2). En effet on en tire

$$X + l = \tfrac{1}{2}(b' + b''), \quad \text{ou encore } X - l = \tfrac{1}{2}(v' + v'').$$

l est la longueur totale de la bulle, et X est l'arc qui exprime la distance de son milieu à l'origine des divisions, *lorsque l'axe de rotation de l'instrument est rendu exactement vertical.* D'après cela, $X + l$ et $X - l$ marquent respectivement les positions des bouts b et v de la bulle, dans *cette même supposition de verticalité.* Trouvant donc ici ces deux arcs exprimés en quantités calculables, puisqu'elles sont données par les observations de retournement du niveau, il n'y a qu'à faire mouvoir l'axe de rotation au moyen des vis de rappel du cercle azimutal sur lequel il repose, dans le sens et de la quantité qui sera expérimentalement nécessaire pour amener les deux bouts de la bulle sur les divisions qui leur sont assignées par ces expressions. Si on le fait exactement, l'axe sera rendu exactement vertical. Si l'on met seulement la bulle très-près de cette position, l'inclinaison I n'aura plus qu'une très-petite valeur que l'on déterminera en lisant le niveau dans les retournements que chaque double observation de distance nécessite; et en l'appliquant à ces distances selon la règle que nous avons établie, on les obtiendra comptées à partir du zénith vrai, comme dans l'exemple précédent.

Ce même soir, 7 juin, on fit encore trois autres séries d'observations, sur différentes étoiles, dans ce même état de l'axe de rotation. La dernière eut lieu sur Antarès, au sud du zénith. J'en rapporterai le détail sous la même forme que celle de β. L'inclinaison I de l'axe de rotation se trouvait ainsi être de sens inverse relativement à l'étoile observée. Mais, conformément à la règle, le bout vert du niveau, d'où partent les divisions, était de même dirigé vers elle dans toutes les observations impaires, ce qui rend I toujours immédiatement applicable avec son signe propre, comme précédemment.

Bout blanc b	Différences pour chaque couple $b' - b''$	Bout vert. v	Différences pour chaque couple $v' - v''$
33 39	— 6,00	37,50 43,50	— 6,00
33 38,75	— 5,75	37,50 43,25	— 5,75
32,50 39	— 6,50	37 43,50	— 6,50
33 39,25	— 6,25	37,25 44	— 6,75
$\Sigma(b' - b'') =$	— 24,50	$\Sigma(v' - v'') =$	— 25,00
		Report de la colonne des b, $\Sigma(b' - b'') =$	— 24,50
		Différence des sommes..	— 0,50
		Somme moyenne M =	— 24,75

Calcul de l'inclinaison I, $\log M = 1,3935752 -$
$\log a = 0,2503468$
$1,6439220 -$
Nombre des observat. $n = 8$, $\log n = 0,9030900$
$\log I = 0,7408320 -$ donc $I = -5'',506$

Distance moyenne observée, comptée à partir de l'axe de rotation du cercle vers le sud..... $A = 64°40'36'',221$
Valeur de I..... $-5'',506$

Somme algébrique, ou distance zénithale moyenne, comptée à partir de la verticale vraie vers le sud. $Z = 64°40'30'',715$

La valeur négative trouvée pour I indique que le sommet de l'axe de rotation penche vers le côté du zénith opposé à celui où se trouve l'étoile, conséquemment ici vers le nord, comme précédemment. On voit en outre que son inclinaison dans ce sens est restée presque la même que dans la première série, puisque la différence accusée par le niveau est seule de 0'',679. Une variation si

petite peut aisément être produite par les mouvements réitérés qu'un instrument de dimension restreinte, comme celui qui me servait, doit recevoir autour de son axe pendant une succession d'observations qui dure plusieurs heures. Mais il est, je crois, vraisemblable qu'ici elle résulte, au moins en partie, des flexions presque insensibles que l'on faisait subir à cet axe en touchant les vis de rappel de l'instrument, pour amener l'étoile observée sous le fil horizontal du réticule, comme on le fait d'ordinaire. Et c'est pourquoi je me suis, plus tard, affranchi de ces effets en laissant les bissections s'opérer spontanément par la seule conséquence du mouvement diurne de l'étoile, sans aucun contact manuel, comme je l'expliquerai plus loin.

On peut remarquer que, dans les deux séries, les déplacements des bouts b et v de la bulle opérés par le retournement sont toujours exprimés pour chaque couple par des nombres à peu près égaux. Cette égalité devrait être rigoureuse si les positions alternées de chaque bout pouvaient être toujours observées sans aucune erreur. Les petites différences accidentelles qu'on y remarque résultent de la légère incertitude que présente cette appréciation, et leur effet s'affaiblit par compensation dans leur somme totale.

211. Les distances zénithales moyennes rapportées au zénith vrai, que j'ai désignées ici par Z, appartiennent à la dernière tangente que les éléments lumineux partis de l'astre décrivent depuis leur entrée dans l'atmosphère terrestre jusqu'à l'œil de l'observateur. Ce sont donc des distances zénithales *apparentes*. Pour les transformer en distances zénithales *vraies*, telles qu'on les aurait observées aux mêmes instants à travers le vide, il faut y *ajouter* l'élévation angulaire que le premier élément de la trajectoire a subie par l'action réfringente de l'atmosphère, progressivement continuée : c'est ce que nous avons nommé *la réfraction atmosphérique*. Elle s'évalue théoriquement par les Tables dont j'ai expliqué la formation dans le premier volume, lorsque l'on connaît la distance zénithale apparente, ainsi que les indications du baromètre et du thermomètre qui en ont accompagné l'observation. Je rapporterai plus loin des exemples de cette application numérique ; mais, en attendant, pour attacher une idée de réalité aux procédés

de retourne qui viennent d'être décrits, on peut jeter les yeux sur une des planches annexées à ce volume, laquelle donne, pour ainsi dire, un corps au type général que j'avais seulement indiqué, t. Ier, page 44, dans la simplicité de son abstraction. Cette planche représente un cercle répétiteur portatif, à niveau fixe, dont je décrirai plus loin le mode spécial d'application, quand j'aurai achevé d'expliquer les divers procédés de rectification qu'il nécessite.

Emploi du niveau pour constater l'horizontalité des axes de rotation. Applications spéciales à l'instrument des passages et au secteur zénithal.

212. Les instruments d'astronomie qui ont un axe de rotation horizontal sont généralement destinés à maintenir l'axe optique d'une lunette dans un plan vertical que l'on puisse lui faire librement décrire sans l'en dévier. Or, cet axe optique tel que nous l'avons défini dans le tome Ier, page 517, est déterminé physiquement, dans l'intérieur de la lunette, par les occultations qui s'opèrent au centre d'un réticule, fixé dans le plan focal de l'objectif; et sa direction dans l'espace coïncide avec celle du faisceau incident qui va se rassembler après la réfraction sur ce centre même. Le problème pratique ici proposé exige donc, d'abord, que l'axe de rotation qui porte la lunette soit rendu exactement horizontal; et ensuite, que la direction du faisceau incident qui va s'occulter au centre du réticule lui soit perpendiculaire. La première condition se réalise en agissant sur l'axe de rotation; la seconde en faisant mouvoir transversalement le réticule dans le plan focal de l'objectif, après que l'horizontalité de cet axe est établie. Pour caractériser sans équivoque le but et la limite de ce transport, j'appellerai désormais *axe optique mathématique*, ou simplement *axe optique*, la direction intérieure suivie par l'axe du faisceau incident qui est perpendiculaire à l'axe de rotation, considéré indépendamment de sa position horizontale ou non horizontale; et j'appellerai *axe optique physique* la direction du faisceau incident qui forme son foyer au centre actuel du réticule, quelque part que celui-ci soit placé dans le plan focal.

213. Les instruments à axe horizontal sont employés pour trois

sortes d'observations, qui nécessitent des particularités de constructions différentes, lesquelles exigent des procédés de différente nature pour amener leur axe à l'horizontalité. Dans la première, on veut seulement que l'axe optique physique puisse décrire toute la partie visible d'un vertical quelconque, où il doit rester fixe, afin de saisir les *instants* auxquels ce vertical est atteint par les astres qui le traversent successivement ou simultanément, dans leur course diurne. L'instrument prend alors le nom spécial d'*instrument des passages*, et il est surtout, même presque uniquement, employé pour mesurer le temps par le mouvement apparent du ciel, comme je l'expliquerai bientôt. Pour un tel genre d'opération, la lunette est adaptée normalement par le milieu de sa longueur à un axe matériel, dont les extrémités sont toujours accessibles et apparentes ; de sorte qu'on peut leur appliquer immédiatement les épreuves du niveau, comme je le dirai tout à l'heure, pour régler ou constater l'horizontalité de l'axe idéal et géométrique autour duquel la rotation s'effectue. Dans le second genre d'observations, l'amplitude du mouvement de la lunette est bien plus restreinte. On veut seulement faire décrire à l'axe optique un très-petit arc autour de la verticale, et presque toujours dans le plan du méridien, pour mesurer, sur un limbe divisé parallèle à ce plan, les distances zénithales des astres qui le traversent à de très-petites distances du zénith, ce qui les rend moins dépendantes de la réfraction qu'à toute autre hauteur. L'instrument s'appelle alors un *secteur zénithal*; et l'axe de rotation de sa lunette se place au bout le plus élevé de celle-ci, près de l'objectif; le tuyau, ainsi que l'oculaire qui le termine, restant pour ainsi dire suspendus au-dessous. Toutefois, les deux extrémités de cet axe sont encore accessibles et apparentes, de sorte qu'on peut le rendre horizontal, comme celui de l'instrument des passages par l'application immédiate du niveau. La même possibilité pratique existerait évidemment pour un instrument ayant un axe de rotation dont les bouts seraient libres, quelle que fût l'étendue du limbe divisé qui mesurerait les mouvements de la lunette dans le sens vertical.

214. Mais il en est d'autres auxquels l'épreuve du niveau n'est plus applicable. Dans ceux-ci, un cercle complet concentrique et

normal à l'axe de rotation, est porté par lui simultanément avec la lunette; et tout ce système, qui a, dans certains cas, de grandes dimensions, ainsi qu'un poids considérable, est placé, non plus au milieu, mais à l'un des bouts de l'axe. Alors, si l'instrument doit rester fixe, cet axe est inséré dans un fort cylindre métallique exactement de même diamètre, où il peut tourner avec une faible friction; puis ce cylindre est introduit dans de gros anneaux métalliques, scellés à l'intérieur d'une muraille épaisse, formée de pierres massives; et il est contenu latéralement, en plusieurs points de sa longueur, par de fortes vis butantes, traversant le contour des anneaux en des sens rectangulaires. De sorte, qu'étant dirigé par construction, à peu près horizontalement, et perpendiculairement au plan vertical que le cercle doit décrire, la rotation des vis butantes dans leurs écrous fournit un mouvement de rappel qui, agissant sur le cylindre enveloppe, et se communiquant par lui à l'axe de rotation intérieur, permet d'amener celui-ci dans la situation exacte qu'il doit avoir, tant pour l'horizontalité que pour la direction azimutale. Mais ces rectifications ne peuvent plus s'opérer ni se vérifier par l'épreuve du niveau, puisque l'axe de rotation matériel n'est plus découvert, et l'on est forcé d'y suppléer par d'autres artifices que je décrirai plus tard.

215. Revenant donc aux instruments où l'axe de rotation est découvert, je vais exposer la manière d'amener à l'horizontalité par l'apposition du niveau, non-seulement cet axe matériel et visible, mais plutôt, et ce qui est surtout nécessaire, la droite idéale et géométrique autour de laquelle la rotation de la lunette doit s'effectuer. Comme l'opération est la même dans toute cette classe d'instruments, je la décrirai en prenant pour type l'*instrument des passages*.

Dans le mode de construction qui lui est le plus généralement adapté, le tuyau de la lunette désigné par LL, *fig.* 46, est renflé, vers le milieu de sa longueur, en deux cônes creux, de forme symétrique et de direction inverse, terminés extérieurement par deux cylindres AA′, RR′, de métal très-dur, et d'un diamètre égal. Ces deux cylindres doivent être rigoureusement disposés sur le prolongement l'un de l'autre; en sorte que leurs axes propres soient situés

sur une même droite mathématique HH'. On parvient à les confectionner ainsi, avec une approximation presque idéale, par des procédés d'art que ce n'est pas ici le lieu de décrire, mais dont l'astronome peut toujours vérifier les résultats par ses observations propres, comme on le verra dans un moment. Je supposerai donc d'abord leur exécution parfaitement exacte, et nous procéderons ensuite à la détermination de leurs erreurs. L'artiste a donné au tuyau de la lunette une direction sensiblement perpendiculaire à l'axe HH'. Il ajuste l'objectif, toujours convergent et achromatique, à l'une des extrémités; l'oculaire, toujours positif, à l'autre; et, intérieurement, dans le plan focal principal de l'objectif, il établit un réticule contenant des fils parallèles en nombre impair, sensiblement équidistants, traversés centralement par un autre qui leur est perpendiculaire, comme le représente la *fig.* 47. La monture métallique qui porte cet appareil lui permet trois sortes de mouvements d'une amplitude très-restreinte, que l'observateur peut lui imprimer à son gré par l'intermédiaire de vis de rappel faisant saillie au dehors. Le premier de ces mouvements est longitudinal; il sert pour transporter quelque peu le plan du réticule, dans le sens de l'axe du tuyau, afin de le mettre en coïncidence exacte avec le plan focal principal de l'objectif. Le second est circulaire, et concentrique au tuyau; il sert pour faire tourner le réticule dans son propre plan, jusqu'à ce que le fil transverse devienne exactement horizontal, quand l'axe de rotation HH' est rendu tel. Le troisième enfin est latéral et agit suivant la direction de ce même fil; il sert à transporter le réticule transversalement dans le plan focal principal où on l'a placé, afin d'amener le point central de croisement des fils dans une position telle, que l'axe géométrique du faisceau incident qui y forme son foyer, soit rigoureusement perpendiculaire à l'axe de rotation idéal HH'. J'expliquerai tout à l'heure comment on accomplit pratiquement ces trois conditions qui constituent ce qu'on appelle *régler l'axe optique*. Ici je me bornerai à dire que le constructeur de l'instrument le dispose toujours de manière qu'elles soient, à fort peu près, remplies, et que l'astronome n'ait plus que les dernières rectifications à y faire. Quand il les a effectuées, le réticule reste invariablement fixé dans le tuyau

de la lunette par ses vis de rappel même, que l'on ne touche plus. Supposant donc tout l'appareil préparé pour que ces trois sortes de rectifications soient finalement possibles, il ne reste qu'à rendre l'axe de rotation HH′ exactement horizontal. Car, s'il est tel, l'axe optique *physique* de la lunette lui étant ensuite rendu perpendiculaire, décrira certainenement un vertical, comme on le désirait.

216. La première condition à remplir pour atteindre ce but, c'est de donner à l'axe réel et matériel AA′RR′ de l'instrument, un système de supports parfaitement stable, sur lequel il puisse tourner en toute liberté, son axe idéal et géométrique HH′ restant fixe. Pour cela on le fait reposer par ses bouts sur des plans de métal dur, légèrement convexes, disposés en forme de V, lesquels sont scellés dans de grosses colonnes de pierre, érigées sur un épais massif de maçonnerie qui enveloppe leurs bases. Les plans de ces supports, représentés *fig.* 48, sont établis parallèlement l'un à l'autre, et perpendiculairement à la ligne centrale qui les traverse tous deux. Alors, quand on y pose les bouts du cylindre matériel AA′RR′, il se trouve soutenu seulement par deux de ses arêtes; et, s'il est exactement cylindrique, comme nous l'admettons d'abord, les arêtes de contact qui se succèdent ainsi, quand on le fait tourner sur lui-même, touchent toujours les supports dans les mêmes points; de sorte que l'axe idéal et géométrique HH′ reste absolument fixe, comme on le demandait. Mais un pareil ajustement ne pourrait pas être employé avec utilité si l'on ne se donnait quelque moyen de suppléer à la rigidité invariable des parties qui le constituent, afin de pouvoir amener l'instrument dans le vertical précis où l'on veut le fixer. C'est pourquoi on prend d'abord soin d'ériger les colonnes sur un alignement perpendiculaire à cette direction, aussi approximativement qu'une telle observation le comporte; puis on y trace les entailles des supports avec plus d'exactitude encore, conformément à cette condition. Quand leur place est ainsi faite, on les y ajuste sans les sceller encore et l'on y pose l'axe, afin de s'assurer qu'il restera très-peu à faire pour compléter son horizontalité et rectifier sa direction. Ces deux choses constatées, on les scelle invariablement, et l'on y pose aussi définitivement l'axe AA′RR′. Mais l'un des supports admet

encore quelque déplacement dans sa monture fixe. Car il y est retenu par un double système de coulisses métalliques, où de fortes vis de rappel le conduisent, et peuvent, au gré de l'observateur, le soulever tant soit peu dans le sens vertical, ou le mouvoir tant soit peu azimutalement. On amène ces deux vis au milieu de leur course dans les épreuves préparatoires que j'ai tout à l'heure expliquées; et l'on ne scelle définitivement les supports dans leurs entailles, qu'après avoir constaté que les amplitudes de course des deux rappels seront surabondamment suffisantes pour achever d'amener l'axe de rotation AA'RR' aux conditions rigoureuses d'horizontalité, et de direction azimutale, qu'on veut lui donner.

217. L'horizontalité s'obtient et se constate d'après les indications d'un niveau très-régulier et très-sensible, que l'on met en relation de direction et de mouvement *avec l'axe* matériel AA'RR', par l'intermédiaire d'un appareil de suspension représenté en projection verticale, *fig.* 49. EE' est une règle métallique un peu moindre que AR en longueur; elle est préservée inférieurement de la flexion par une autre, soudée de champ au-dessous d'elle. BV est le niveau, fixé à quelque distance de EE', sur deux supports T, T', dont l'un, T', peut recevoir une petite variation de longueur par une vis de rappel qui en fait partie; de manière à soulever ou abaisser quelque peu le bout qu'il supporte, afin que la bulle puisse être amenée vers le milieu du tube, quand EE' est à peu près horizontal. Aux deux bouts de la règle EE' s'élèvent perpendiculairement deux bras métalliques EQ, E'Q' de longueurs sensiblement égales, terminés en crochets, par lesquels tout l'appareil se suspend aux extrémités de l'axe AR, quand le tuyau de la lunette a été suffisamment écarté de la verticalité, pour permettre au système du niveau et de la règle de prendre la position naturelle d'équilibre qui leur est assignée par la gravité. Mais en outre, afin que les frictions exercées dans les points de contact ne gênent point ce retour vers l'équilibre, et surtout, afin que le mode de suspension soit toujours identiquement semblable à lui-même, la surface intérieure des crochets par laquelle s'opère le contact n'est pas circulaire, ni même continûment courbe. Elle est formée de deux plans en équerre l'un sur l'autre, comme on le voit *fig.* 50; de sorte que

la suspension n'a jamais lieu que par leur contact tangentiel avec les surfaces terminales du cylindre AR, et s'effectue ainsi par deux arêtes de son contour. Aussi, quand cet axe est exactement ou à très-peu près horizontal, et qu'il est d'ailleurs rigoureusement cylindrique, comme nous le supposons, si l'on fait tourner quelque peu la lunette pour changer les points de contact de l'appareil de suspension, la bulle du niveau BV, *fig.* 49, en revenant à l'équilibre, se replace toujours aux mêmes traits de sa division longitudinale. On assure l'identité de ce retour en fixant sur la règle EE' un second niveau très-sensible que l'on dispose transversalement à sa longueur; et, ayant reconnu le point de son échelle propre, où sa bulle se fixe, quand le plan de l'appareil de suspension est arrivé le plus exactement possible à la verticalité, à la suite des petites oscillations que la gravité lui fait faire autour de cette position finale d'équilibre, on le ramène toujours à ce même plan dans toutes les observations ultérieures, par la condition que la bulle du niveau transversal se trouve aussi ramenée entre les mêmes traits.

218. Ces dispositions étant admises, et le cylindre AR, *fig.* 46, ayant été amené à une direction déjà peu éloignée de l'horizontalité par les précautions préparatoires prises dans l'établissement des supports, le niveau suspendu BV va faire aisément connaître la quantité angulaire dont il s'écarte de cette condition. Ce sera une application très-simple et immédiate des équations (2) de la page 252, en désignant par la même notation les deux bouts physiques du tube, ainsi que l'ordre de numération de son échelle. Pour cela, je suppose d'abord l'axe AR exactement horizontal, et l'appareil de suspension ajusté sur lui, dans la position de repos que la pesanteur lui assigne (voyez *fig.* 49). Alors, par le centre C de courbure du niveau, si l'on conçoit une verticale CZ, le point X, où elle coupera l'échelle de divisions tracée sur le tube, sera le lieu où le milieu de la bulle ira se placer dans cette circonstance; et le rappel adapté au support T' permettrait d'amener ce milieu dans la partie moyenne du tube où sa position serait observable, si l'artiste n'avait pas tout ajusté d'avance pour qu'il en fût ainsi. Généralement, on ne connaît pas, ou l'on n'est pas censé connaître la distance OX de ce point d'é-

quilibre à l'origine O des divisions, dans l'hypothèse de l'horizontalité de l'axe AR. Je la nomme X en la comptant sur le tube, dans le sens VB, à partir de l'origine O, placée au bout V, comme précédemment. Inclinons maintenant l'axe AR sur l'horizontale, vers le bout V, comme l'indique la *fig.* 51, de manière qu'il fasse avec elle un angle I. La bulle quittera le point X, et son milieu ira se fixer au nouveau sommet S′, où l'échelle des divisions sera coupée par la verticale actuelle CZ, menée du centre C dans sa nouvelle position. Donc l'arc S′X, pris sur le tube, serait, si l'on pouvait le lire, la mesure de l'angle S′CX, égal à I. Le point S′ étant observé, intervertissons le sens de suspension du niveau, l'axe AR restant fixe, comme le représente la *fig.* 52; la bulle quittera le point S′, et son milieu viendra se fixer au nouveau sommet S″, où l'échelle des divisions est actuellement coupée par la nouvelle verticale CZ. De sorte que l'arc S″X mesurera encore l'angle S″CX ou I, ce qui le rend égal à S′X. En écrivant ces deux résultats, on aura donc

1re *observation :* $I = OS' - X$; 2e *observation :* $I = X - OS''$,

exactement comme nous l'avons trouvé dans la page 251 pour les axes verticaux. Ainsi on en déduira encore

$$(1) \qquad 2I = OS' - OS'', \qquad 2X = OS' + OS'';$$

et, en exprimant les déplacements successifs du milieu de la bulle, par les déplacements de ses extrémités combinés avec sa longueur totale $2l$, on aura, comme dans la page 252 :

$$(2) \quad \begin{cases} I = \frac{1}{2}(b' - b''), & \text{ou bien} \quad I = \frac{1}{2}(v' - v''); \\ X = \frac{1}{2}(b' + b'') - l, & \text{ou bien} \quad X = \frac{1}{2}(v' + v'') + l. \end{cases}$$

Ces expressions devront s'interpréter exactement de la même manière que nous l'avons fait alors pour les axes verticaux. Les valeurs de I mesureront l'inclinaison actuelle de l'axe AR sur la ligne horizontale, et elles en indiqueront le sens par le signe algébrique dont elles se présenteront affectées. I positif indiquera un abaissement relatif du bout R, comparativement au bout A, primitivement le plus éloigné de l'origine O des divisions. I négatif indiquera, au contraire, une élévation relative de ce même bout R.

Si l'on ne veut pas laisser subsister ces inégalités, les valeurs de $X + l$ et de $X - l$ indiqueront les points de l'échelle des divisions où il faudra amener les extrémités de la bulle, en élevant ou abaissant le support mobile de l'axe par sa vis de rappel verticale, pour donner à l'axe AR une parfaite horizontalité.

219. On ne peut jamais réaliser ce dernier résultat avec une rigueur mathématique. La seule élasticité des vis métalliques, par lesquelles on fait mouvoir le support, suffirait pour l'écarter de cette position idéale où l'on voudrait vainement le fixer. Mais une telle exigence serait en outre complétement inutile. Car, lorsque les valeurs de I sont devenues extrêmement petites, ainsi qu'on peut les réduire à l'être, il est facile d'en tenir compte dans les applications par une petite correction de calcul, comme j'aurai occasion de l'expliquer. La même considération s'applique aux déviations azimutales de l'axe AR. Quand il est dirigé de manière que l'axe optique *physique* de la lunette, après lui avoir été rendu perpendiculaire, suit un vertical très-peu différent de celui que l'on voulait lui faire décrire, on l'y laisse fixe; et l'on ramène les résultats à ce vertical par des formules de corrections, qui ne les modifient jamais que de quantités très-petites, puisqu'elles sont de l'ordre de l'écart que l'on n'a pas voulu, ou que l'on n'aurait pas pu, avec sûreté, anéantir.

220. Les épreuves précédentes attestent seulement l'horizontalité, ou la presque horizontalité, des arêtes de contact, par lesquelles les branches du niveau sont suspendues à l'axe AR, *fig.* 46. Mais, si les tourillons qui terminent cet axe n'ont pas tous deux une circularité rigoureuse, les inégalités de leur section centrale se feront sentir, par différence, sur la position de la bulle, lorsque, laissant le niveau suspendu à l'axe AR, on amènera le tuyau de la lunette à diverses distances d'un côté et de l'autre du zénith, ce qui changera les arêtes de contact des branches de suspension, ainsi que celles par lesquelles l'axe repose sur ses supports. Ces positions successives du tuyau sont faciles à noter, parce qu'il porte toujours un appareil extérieur spécialement destiné à cet usage, afin que l'astronome puisse d'avance l'amener à chaque distance zénithale assignée, avec une approximation telle, que l'astre qu'il veut observer, et auquel cette distance est propre, se

présente de lui-même dans le champ de la lunette, par l'effet du mouvement diurne, et qu'il reste seulement à relever ou abaisser quelque peu le tuyau pour le mettre en coïncidence avec le fil transverse du réticule sur lequel on suit son passage. Dans les instruments que l'on construit aujourd'hui, cet appareil préparatoire est tel que le représente la *fig.* 53. Il se compose d'abord d'un demi-cercle métallique gradué, fixé latéralement au tuyau vers son bout le plus proche de l'oculaire, et parallèlement au plan que la lunette doit décrire, son diamètre terminal étant perpendiculaire à l'axe du tuyau. Au centre de ce cercle est ajustée une alidade, concentriquement mobile, dont le long bras, marqué d'un index, parcourt la division graduée, tandis qu'à l'opposé du centre, l'autre bras, plus court, porte un niveau ayant sa courbure parallèle au plan du cercle. L'artiste a tracé le zéro de sa division sur le rayon central qui est parallèle à l'axe du tuyau. Pour régler l'appareil, on ramène l'index de l'alidade sur ce zéro, et l'on rend le tuyau vertical en l'alignant sur un fil-à-plomb; puis on ajuste le niveau par ses vis de rappel propres, de manière que le milieu de la bulle arrive dans la partie moyenne du tube où l'on note ses extrémités. Si la verticalité du tuyau est exacte, et si l'artiste a placé exactement son zéro sur le prolongement de son axe, cet axe se dirige alors vers le zénith. Maintenant supposez qu'on l'écarte de cette position pour le porter vers une distance zénithale quelconque d'un côté ou d'autre de ce point, l'index de l'alidade restant fixe sur son zéro, comme précédemment. La bulle du niveau quittera ses repères; et, pour l'y ramener, il faudra faire tourner l'alidade sur le limbe d'une quantité exactement égale à la déviation angulaire qu'on aura donnée à l'axe du tuyau autour de sa position verticale primitive. Donc, inversement, pour amener cet axe à une distance zénithale assignée, il faudra placer et fixer l'index de l'alidade sur le point de la graduation qui marque cette distance, puis faire tourner le tuyau jusqu'à ce que la bulle du niveau revienne dans ses repères primitifs. Sans doute, les résultats de ces déterminations n'auront pas une exactitude mathématique; mais ils fourniront une approximation suffisante pour amener avec certitude dans le champ de la lunette l'astre que l'on

idéal et mathématique HH′ autour duquel la rotation s'opère, il faut le supposer parallèle à ces arêtes, ou constater qu'il est, en effet, tel. Or, cela n'aura lieu que si les tourillons AA′, RR′ appartiennent rigoureusement à un même cylindre, dont les arêtes superficielles se continuent de l'un à l'autre, et leur sont communes à tous deux. L'artiste qui construit les tourillons prend toutes les précautions possibles pour qu'il en soit ainsi. Il les travaille simultanément, étant montés sur un même tour, et il constate l'égalité ainsi que la constance de leurs diamètres transverses, au moyen du comparateur, ou de quelque autre procédé équivalent. Mais l'astronome qui emploie l'instrument doit toujours constater par lui-même que ces conditions indispensables ont été exactement remplies, et heureusement rien n'est plus facile. En effet, supposez que les deux tourillons AA′, RR′, après avoir été ainsi travaillés et taillés circulairement autour d'un axe de rotation commun, se trouvent effectivement appartenir, non pas à un même cylindre, mais à un cône circulaire très-allongé, dont les arêtes formeraient entre elles un très-petit angle comme le représente la *fig.* 54. Alors, quand l'arête supérieure, AR par exemple, aura été rendue exactement horizontale au moyen du niveau de suspension, si l'on fait tourner ce cône sur ses supports, chaque arête qui deviendra successivement supérieure remplacera identiquement AR, de sorte qu'elle se trouvera de même horizontale; et ainsi la bulle du niveau reviendra toujours se fixer au même point de l'échelle, sans aucun déplacement. Cependant la rotation aura été réellement opérée autour de l'axe idéal HH′ du cône, lequel sera oblique à l'horizontale AR, et le niveau ne décèlera pas cette obliquité. Mais on la découvrira facilement si, ayant enlevé le niveau, on retourne l'axe conique, et qu'on le repose interverti sur ses supports fixes, *fig.* 55. Car son bout le plus mince étant ainsi transporté sur le support qui soutenait d'abord le plus épais, et celui-ci éprouvant un échange inverse, l'arête supérieure AR ne se trouvera plus horizontale. Donc, si l'on y replace le niveau de suspension dans sa situation première sans l'intervertir, sa bulle se déplacera d'un nombre de divisions équivalent au double de l'inclinaison primitive de l'axe idéal HH′. On aura donc ainsi la preuve de

cette inclinaison et sa mesure ; de sorte qu'en replaçant l'instrument dans sa position première, *fig.* 54, on saura ce qu'il faut ajouter ou ôter aux indications du niveau suspendu sur AR, pour avoir l'inclinaison réelle de l'axe HH′, autour duquel la rotation s'opère effectivement. Mais, dans les instruments construits par d'habiles artistes, cette inégalité des tourillons sera à peine appréciable, et je l'ai trouvée tout à fait insensible dans mes opérations de Fiume, pour celui qui me servait.

222. Toutes les épreuves précédentes sur l'axe de rotation étant supposées faites, il ne reste plus qu'à appliquer au réticule les trois genres de rectifications dont j'ai indiqué précédemment la nécessité. Je vais exposer ici les procédés par lesquels on les réalise, pour n'avoir plus à revenir sur ce sujet.

1°. La manière d'amener le plan du réticule dans le plan focal principal de l'objectif a été décrite tome Ier, page 687, et j'ai expliqué alors les caractères que l'observation de la parallaxe des fils fournit, pour constater la réalisation de cette coïncidence avec une suffisante précision. Je n'ai rien à dire de plus sur ce sujet (*).

2°. Pour assurer l'horizontalité du fil transverse, il faut considérer que l'anneau métallique qui contient l'objectif a été établi par l'artiste dans un plan normal aux arêtes du tuyau de la lunette ; de manière que l'axe central de l'objectif se trouvât très-approximativement, sinon exactement, perpendiculaire à l'axe de rotation des tourillons. Et l'anneau réticulaire a été aussi centré autour du même axe longitudinal, de manière qu'en le faisant tourner dans le tuyau par la vis de rappel, qui lui imprime le mouvement circulaire, le fil transverse se maintînt toujours dans un plan diamétral du système objectif. Admettons d'abord que ces dispositions préparatoires ont été rigoureusement effectuées, sauf à

(*) Je saisis cette occasion pour signaler deux fautes d'impression, d'ailleurs évidentes, qui se sont glissées dans les expressions de deux résultats numériques rapportés à la fin de ce même premier volume, page 690, § 260. A la ligne 9 de ce paragraphe, on a écrit 100° au lieu du nombre abstrait 100 ; et trois lignes plus bas, on a écrit pour le diamètre de l'anneau oculaire, $0^{mm},6$ au lieu de $0^{mm},06$, qui est la centième partie de 6 millimètres, que l'on avait pour but d'exprimer.

déterminer plus tard les dernières et très-petites rectifications qui pourraient y paraître nécessaires. Alors, l'axe de rotation étant amené à l'horizontalité, dirigez la lunette vers les objets terrestres situés dans l'horizon, à une assez grande distance pour que leurs images focales se forment sensiblement dans le plan des fils. Puis, sur la direction de l'axe optique *physique*, déjà à peu près centré par l'artiste, placez un signal dont la direction visuelle se trouvera ainsi sensiblement comprise dans le plan vertical que cet axe décrit et que je prendrai pour le plan des xz de nos formules générales. Cette ligne visuelle étant reconnue par les objets qu'elle rencontre, tracez au-dessus du sol, à cette même distance, une droite horizontale qui lui soit perpendiculaire, ce que vous pourrez effectuer avec un niveau d'ingénieur; et placez-y de distance en distance des disques blancs dont les centres soient tous exactement compris sur sa direction. Ceux de ces disques qui pourront être vus simultanément, dans le champ de la lunette, constitueront, par la suite de leurs centres, un objet rectiligne, perpendiculaire aux coordonnées x, z de nos formules, par conséquent situé sur l'ordonnée transversale y qui les complète, laquelle sera ici horizontale par notre construction. Or, d'après ce qui a été démontré tome Ier, p. 461, toute droite perpendiculaire à l'axe d'un objectif, et placée sur le prolongement de cet axe, y donnera pour image une autre droite parallèle à sa propre direction, conséquemment ici horizontale. Faites donc tourner l'anneau réticulaire dans son propre plan, au moyen de la vis de rappel qui lui imprime le mouvement circulaire, jusqu'à ce que le fil transverse s'aligne sur cette image; et quand cette condition sera remplie, il se trouvera lui-même horizontal comme elle, ce qui le rendra pour toujours perpendiculaire au plan que l'axe optique physique décrira autour de l'axe de rotation, dans tous les azimuts où celui-ci pourra être dirigé.

3°. Enfin, pour achever de rendre l'*axe optique physique* de la lunette exactement perpendiculaire à l'axe de rotation, choisissez dans l'horizon, sur les objets terrestres que le champ de la vision embrasse, quelque point de mire bien distinct, dont l'image se forme à peu de distance du centre du réticule, déterminé par le croisement central des fils rectangulaires, tels que l'artiste les a

placés par ses procédés approximatifs. Puis, détournez l'axe de rotation de sa direction actuelle, au moyen de sa vis de rappel azimutale, précisément autant qu'il est nécessaire pour amener l'image de la mire en coïncidence rigoureuse avec ce point central de croisement ; et constatez de nouveau que ce déplacement n'a pas dérangé l'horizontalité de l'axe, ou, s'il est nécessaire, rectifiez-la. Cela fait, ôtez le niveau, soulevez la lunette, et, après avoir interverti la direction de son axe de rotation, replacez chaque bout sur le support opposé à celui où il se trouvait primitivement. En supposant cet axe matériel exactement cylindrique, comme il doit l'être, l'inversion n'aura pas troublé son horizontalité; mais, dans tous les cas, vous pourrez la vérifier, et au besoin la rétablir, en y replaçant le niveau de suspension. Or, si l'axe optique de la lunette, dans la position actuelle du réticule, est déjà fortuitement perpendiculaire à l'axe de rotation, l'inversion de cet axe aura fait seulement tourner la ligne visuelle sur elle-même, de sorte que l'image du point de mire devra encore se retrouver au centre des fils, comme dans la première observation. Mais, pour peu que cette ligne ait été oblique à l'axe de rotation, l'inversion lui aura fait décrire un cône, et la mire paraîtra déviée à droite ou à gauche du centre des fils, d'une quantité évidemment égale au double de son obliquité. Ainsi, en faisant marcher le réticule par sa vis de rappel latérale, de manière à bissecter exactement cet écart de la mire, on devrait ramener l'axe optique à une exacte perpendicularité sur l'axe de rotation. Mais comme une telle bissection ne peut pas s'effectuer à vue, avec rigueur, on la considérera seulement comme une première rectification approximative. L'ayant donc faite le mieux possible, on emploiera le mouvement azimutal de l'axe pour ramener de nouveau l'image de la mire au centre du réticule ainsi transporté ; puis on recommencera une seconde épreuve par retournement qui donnera une déviation de la mire beaucoup moindre, que l'on corrigera encore par une bissection nouvelle; et l'on réitérera ces alternatives jusqu'à ce que l'inversion de l'axe de rotation n'imprime plus à l'image de la mire aucune déviation appréciable autour du centre des fils. Alors, le faisceau lumineux incident, qui formera son foyer à ce centre, aura son axe géométrique exactement perpen-

diculaire à l'axe de rotation, comme on le demandait. Ainsi, quand on fera tourner la lunette autour de ce dernier, cet axe géométrique amené par la réfraction au centre des fils décrira un plan qui lui sera normal, ce qui est la condition spéciale qu'on voulait remplir.

223. Lorsqu'elle se trouve remplie après ces épreuves, il faut constater de nouveau l'horizontalité du fil transversal, pour s'assurer que le déplacement imprimé au réticule n'a pas altéré sa direction. Alors, l'axe de rotation de l'instrument étant toujours maintenu horizontal aussi, on dirigera la lunette vers les objets éloignés situés dans l'horizon visible, et l'on y choisira quelques points bien définis, sur lesquels chacun des autres fils du réticule se projette. Puis, faisant mouvoir doucement la lunette dans son vertical, on examinera si, pendant le mouvement, chaque point suit le fil auquel il est affecté. Si cela a lieu, tous les fils se trouvent verticaux, conséquemment parallèles entre eux, et perpendiculaires au fil transversal, comme ils doivent l'être. L'artiste les dispose toujours suivant cette condition, et il trace sur l'anneau métallique du réticule des repères qui marquent les points sur lesquels il faut les appliquer pour les remettre dans leurs positions respectives, s'ils venaient à se détendre ou à se casser. Mais l'observation que je viens de décrire est toujours essentielle à faire pour constater qu'il les a dirigés exactement; et elle devient surtout indispensable lorsqu'on est forcé par quelque accident de les replacer soi-même. Les fils les plus convenables pour cet usage se tirent du cocon des araignées, surtout de certaines variétés, qui se distinguent par leur égalité et par leur finesse. Ceux du ver à soie, même dédoublés, présentent presque toujours des irrégularités de configuration qui en rendent l'emploi moins parfait. Malheureusement la nature de ces fils les rend sujets à des variations hygrométriques qui altèrent accidentellement leur rectitude, ce dont il faut extrêmement se défier. C'est pourquoi on leur préfère quelquefois des fils de platine qui ont été tirés à la filière, après avoir été enveloppés d'un cylindre d'argent, dont on les débarrasse par les acides, ce qui permet de leur donner à la fois une grande finesse avec une grande régularité de configuration; et s'ils n'atteignent pas tout à fait la ténuité des fils d'araignée, la permanence de leur

constitution compense amplement ce faible désavantage. Quel que soit le choix auquel on s'arrête, il faut toujours que les occultations des points lumineux, opérées par chacun des fils parallèles, soient observées à travers l'oculaire, dans une même situation de l'œil. C'est pourquoi le tuyau qui porte l'oculaire a un petit mouvement de course qui lui est imprimé par une vis latérale, au gré de l'observateur ; de sorte que celui-ci peut transporter successivement son axe central de vision devant chaque fil, pour l'observer au centre du champ de cet appareil. J'ai prouvé dans le tome Ier, page 512, que ce mouvement de transport, borné à une petite amplitude de course, n'altère pas les conditions essentielles de la visibilité.

224. De tous les signaux que l'on peut employer pour effectuer ces dernières rectifications des fils, comme aussi pour constater ensuite la persistance de l'axe optique de la lunette, dans une direction azimutale fixe, le meilleur est la flamme d'une lampe à courant d'air, placée au foyer d'un miroir métallique concave de quelques décimètres d'ouverture, que l'on établit invariablement à une grande distance sous un abri qui la protége, et sous lequel habitent aussi les gardiens qui doivent l'entretenir. Un tel établissement, toutefois, ne convient qu'à de grands observatoires fixes, ou occasionnellement dans les voyages géodésiques, pour des déterminations très-délicates ; et, dans ces deux cas, il n'y faut recourir qu'après que l'axe optique, déjà soigneusement réglé sur des mires terrestres, est amené à quelques secondes près dans la direction azimutale où l'on veut le maintenir. Alors, pour amener aussi le signal de feu sur cette direction même, ou sur une autre si voisine qu'il soit indifférent de la choisir, on peut employer un système d'essais très-rapides, que j'ai eu l'occasion d'appliquer en 1825, à la station Scarpa, près de Fiume, et dont l'exposition deviendra, je crois, plus aisément intelligible, en lui conservant ses caractères de localité. Le Gouvernement du roi avait mis au service de l'opération la goëlette *la Torche*, commandée par M. Le Goarant de Tromelin, aujourd'hui capitaine de vaisseau. Cet officier, qui se montra toujours disposé à nous être utile, vint à notre station et reconnut avec beaucoup de soin tous les points d'une petite île appelée Veglia, située à plusieurs lieues de dis-

tance, laquelle se voyait dans le champ de notre lunette. Celle-ci, d'ailleurs, avait déjà son axe optique très-approximativement réglé sur des mires naturelles prises dans cette île; et cet axe était en outre amené dans une direction azimutale presque méridienne, dont nous ne voulions pas notablement nous écarter. Pour satisfaire à cette exigence, M. Le Goarant se rendit dans l'île de Veglia, sur la direction qu'il avait approximativement signalée à travers la lunette : il y fit dresser une tente, établir un poste de matelots; et, le même soir, les épreuves convenues entre nous commencèrent sous sa direction personnelle. Notre mire, comme je viens de l'indiquer, devait consister en une lampe à courant d'air placée au foyer d'un miroir argenté concave, dont l'ouverture avait environ 3 décimètres. On l'alluma d'abord en un point du rivage que l'on put juger avec assurance être à l'occident du vertical décrit par notre lunette. Après cinq minutes d'apparition, ne recevant aucun signal de nous, on l'éteignit, puis on la reporta vers l'est, en un autre point distant du premier de 50 mètres, et on l'y alluma de nouveau. Ne recevant toujours pas de réponse, on continua de procéder ainsi vers l'est, par intervalles de 50 mètres, jusqu'à ce qu'enfin le signal fût vu par nous à l'ouest de notre fil central. Cela montrait, qu'en réalité, il était trop à l'est, parce que notre lunette renversait. Nous lançâmes aussitôt une fusée pour annoncer ce fait; d'où il résultait que la direction de notre fil central passait entre cette dernière station et la précédente. On fit donc revenir la lampe vers celle-ci, par intervalles moindres, qui comprenaient seulement 10 mètres; et quand son image fut passée, dans ces nouvelles épreuves, à l'est de notre fil, une seconde fusée, lancée par nous, l'arrêta. Alors on la ramena vers l'est par des intervalles qui n'étaient plus que d'un seul mètre; et l'une des positions ainsi essayées ayant rendu la flamme presque tangente à notre fil central, nous allumâmes un grand feu dont les matériaux étaient tout préparés, pour signifier que l'on s'arrêtât à cette position définitive. Un pilier de pierre fut aussitôt enfoncé dans le sol, en ce point précis; la lampe y fut fixée à l'abri d'une tente, et pendant les nuits suivantes elle fut tenue constamment allumée sous la surveillance d'un poste de matelots, établi dans l'île pour ce service

spécial. Notre premier soin fut de régler notre axe optique pendant la même nuit, sur ce signal, par des renversements multipliés; après quoi nous amenâmes le fil central à bissecter exactement cette étoile artificielle, en transportant tout l'instrument dans ce sens, par sa vis latérale de rappel. Sa stabilité le maintint depuis lors dans cette coïncidence; ou, quand nous y soupçonnions quelque petit écart, nous la rétablissions. Dans les instruments de ce genre, attachés en permanence à de grands observatoires fixes, il serait utile que l'anneau réticulaire contînt un fil mobile parallèle au fil central, et mené par une vis micrométrique à tête divisée, comme cela a lieu dans la lunette de Dorpat, que j'ai décrite tome Ier, page 676. Car, à l'aide de cette addition, il ne serait pas nécessaire de détruire préalablement, à chaque observation, le petit écart azimutal que la lunette pourrait avoir éprouvé; puisqu'on pourrait alors mesurer l'intervalle qui en résulterait entre le fil central et la mire, ce qui permettrait d'en tenir compte dans le calcul des observations. Mais je ne sache pas que cette utile addition ait été jusqu'à présent faite à aucun instrument de ce genre, quoiqu'ils éprouvent toujours occasionnellement des déviations azimutales, quelquefois beaucoup trop considérables pour qu'on puisse en négliger impunément l'effet quand les observations ont été faites avant qu'on les ait reconnues ou corrigées. Même, la rectification azimutale réalisée mécaniquement ne persiste pas toujours après qu'on l'a faite, parce que l'effort que les pièces de rappel exercent les unes sur les autres pour l'opérer, se continue encore après qu'on les a abandonnées, et trouble la fixité que l'on croyait avoir établie. On remarque des perturbations pareilles dans l'horizontalité de l'axe de rotation par la réaction des pièces qui le soulèvent. C'est pourquoi, en général, il faut éviter de toucher souvent aux rappels des instruments qui doivent rester fixes. Et, pour des recherches spéciales, qui exigent une grande précision, lorsque les instruments qui y sont employés sont amenés aux conditions presque exactes qu'on veut leur donner, il vaut infiniment mieux achever de les rendre rigoureuses par des corrections de calcul, que de chercher à les obtenir manuellement.

225. L'emploi des mires de nuit exige que l'on puisse voir simultanément, dans le champ de la lunette, le point lumineux qui

sert d'objet, et les fils du réticule qu'on y rapporte ou que l'on veut amener à se projeter sur l'image focale de ce point. Cette simultanéité de perception s'obtient à l'aide d'un artifice qu'il est très-essentiel de décrire puisque l'occasion s'en présente; car il est indispensable dans tous les cas où des réticules à fils sont employés à des observations faites pendant la nuit, soit sur des objets terrestres, soit sur le ciel.

Lorsqu'on regarde, pendant le jour, à travers une lunette qui contient un appareil de ce genre, le champ de l'instrument se trouve rempli par la lumière venue du ciel ou des objets terrestres que la vision embrasse, et les fils du réticule se projettent en lignes noires sur l'image lumineuse qui parvient à l'œil. Mais, lorsqu'on observe de nuit des points lumineux isolés, les fils du réticule, n'émettant pas de lumière propre, ne sont pas visibles par eux-mêmes, et chacun d'eux ne peut le devenir que dans le cas infiniment particulier où il se trouverait exactement sur la direction du pinceau envoyé par l'un des points rayonnants compris dans le champ de l'instrument. Pour en avoir une perception constante, on rétablit artificiellement la condition d'une illumination complète. On fixe en avant de la lunette, *fig.* 56, ou dans son intérieur, *fig.* 57, un diaphragme annulaire, formé d'un métal blanc et mat, dont la portion pleine couvre seulement la portion du champ la plus voisine des bords et la moins nécessaire à l'observation; puis, on éclaire latéralement ce diaphragme par la lumière d'une lampe qui est renvoyée par radiation dans l'intérieur du tuyau sans former d'image focale. Alors elle porte au fond de l'œil une impression générale, simultanée avec celle du point radieux qu'on observe, et qui n'est interrompue que sur la projection de chaque fil; de sorte que la place qu'ils occupent, dans ce champ artificiel, devient perceptible par occultation, comme lors des observations de jour. Évidemment, cette lumière surajoutée affaiblit la sensation que le point radieux aurait produite s'il eût été observé seul sur le fond noir du champ. C'est pourquoi on se donne les moyens d'en tempérer la force pour ne pas le faire disparaître. Pour cela, si le diaphragme est antérieur à la lunette, comme dans la plupart des instruments portatifs, on confie la lampe éclairante à un aide qui l'éloigne ou la rapproche au besoin. Mais, s'il doit être intérieur, comme cela a lieu en général pour tous

grands instruments fixement établis, on fait arriver la lumière la lampe par une ouverture pratiquée dans leur axe de rotation izontal, comme on l'a représenté, *fig.* 48, pour un des bouts de te d'un instrument de passages. Alors, en deçà de la lampe, on éta- t comme appareil modérateur, un diaphragme à ouverture varia- , composé de deux plaques métalliques qui peuvent se recouvrir tuellement et diminuer l'ouverture par laquelle la lumière arrive qu'à l'intercepter si l'on veut en totalité. Cette sorte de pupille ificielle est mue par une tige de renvoi, dont l'extrémité aboutit s de l'oculaire et se trouve sous la main de l'observateur. Enfin, illumine quelquefois directement les fils du côté de l'œil par la nière d'une lampe placée près de l'oculaire. Alors ils se voient vertu de leur propre radiation et se projettent sur le fond noir champ. Mais ce procédé est moins employé que les deux autres.

226. D'après la définition que j'ai donnée du secteur zénithal commencement de ce chapitre, on conçoit que l'horizontalité de axe de rotation pourra, et devra, se régler au moyen du niveau, les mêmes procédés de suspension et de retournement qui vent pour l'instrument des passages. La perpendicularité de l'axe ique de la lunette à l'axe de rotation qui n'y est pas moins néces- re, s'obtiendra également par des observations de retourne ctuées sur des mires terrestres, avec la seule différence qu'il dra employer une disposition particulière, et transitoire, pour ner à la lunette l'horizontalité approchée que ce genre de rec- cation exige. Ces deux conditions une fois établies, il ne restera s qu'à en constater l'exacte conservation. Mais comme, par la nstruction de l'instrument, l'axe de rotation se trouve éloigné de bservateur, la répétition fréquente de ces épreuves serait incom- de; aussi, une fois qu'il est exactement réglé, on s'assure seulement l conserve sa fixité, par un mode d'observation que je vais dé- ire, et l'on se donne les moyens de la rétablir, si elle se dérange.

CTION III. — *Emploi du fil-à-plomb pour constater la verticalité des droites ou des plans.*

227. Au chap. III du tome Ier, j'ai exposé les conditions physiques ui, dans chaque lieu de la terre, assurent la fixité de direction un fil-à-plomb librement suspendu par un point supérieur, rigide-

ment lié à la masse terrestre, et qui le font coïncider avec la verticale perpendiculaire à la surface libre des fluides en repos. Pour constater la verticalité d'une droite ou d'un axe cylindrique solide, à l'aide de cette propriété, on trace en deux points de la droite, ou d'une des arêtes du cylindre, deux très-petits points ronds que l'on amène à se trouver simultanément sur la direction d'un fil-à-plomb très-fin, suspendu près d'eux à une distance aussi petite que possible, et seulement suffisante pour que sa liberté ne soit pas gênée. Ce résultat s'obtient en faisant mouvoir coniquement la droite, ou le cylindre solide, autour de la verticale, par des vis de calage attachées à leur pied, ou au cercle azimutal qui ordinairement les supporte, jusqu'à ce que le fil se projette simultanément sur les deux points qui servent de repère. Pour apprécier exactement cette coïncidence, on établit au devant de ces points deux petits microscopes, simples ou complexes, dont l'axe est horizontal, et à travers lesquels l'image du fil se voit en projection sur leur disque amplifié, qu'elle doit couvrir centralement. Mais, afin d'être assuré que l'occultation est précisément centrale, il faut qu'elle ne soit pas complète, c'est-à-dire que le fil suspendu doit être assez fin pour ne couvrir qu'une portion du disque sur lequel il doit se projeter; et alors la centralité se juge très-bien par l'égalité des deux segments qui débordent des deux côtés du fil. Lorsque la condition de verticalité doit être permanente, on suspend à l'extrémité inférieure du fil un poids cylindrique en métal qui plonge *totalement* dans un bain d'huile, d'eau, ou d'alcool, dont la faible résistance amortit l'amplitude des petites oscillations que le fil tend toujours à faire, sous l'influence des agitations que l'air ambiant lui communique. Le vase qui contient le liquide doit avoir assez de largeur pour soustraire le fil à l'adhérence que la capillarité exercerait sur lui s'il passait très-près des bords de la surface libre; et toute la portion du fil intermédiaire entre les repères extrêmes peut aussi avantageusement être entourée d'un tuyau cylindrique qui le préserve des mouvements brusques de l'air, pourvu que l'on ait soin de constater fréquemment qu'il ne s'est formé dans cette enveloppe aucun obstacle accidentel qui s'opposerait à la liberté de ses oscillations.

228. Lorsqu'un semblable appareil doit avoir trop de longueur pour que l'observateur puisse constater l'exactitude de

coïncidence des deux repères par le seul déplacement de son œil, ce qui arrive toujours dans les grands instruments astronomiques auxquels on adapte ce mode de vérification, l'obligation de se transporter de l'un à l'autre est fort pénible, et d'autant plus incommode qu'elle doit être souvent répétée. C'est pourquoi, dans le grand secteur zénithal que Ramsden avait construit pour la triangulation de l'Angleterre, et qui a malheureusement péri dans le dernier incendie de la Tour de Londres, où il était déposé, ce célèbre artiste avait suppléé au transport de l'observateur par une disposition optique, qui faisait voir la coïncidence du fil sur les deux repères, d'un même coup d'œil, l'inférieur pouvant être ainsi observé par vision directe, et le supérieur par son image réfléchie inférieurement. A cet effet, le fil attaché aux parties solides les plus élevées de l'appareil pendait librement au devant d'un petit disque de nacre de perle, fixé à l'un des bouts de l'axe de rotation du secteur, lequel était percé de part en part comme celui d'un instrument de passages; et l'extrémité inférieure du même fil pendait devant un autre disque pareil, où l'observateur pouvait le voir directement à travers une petite lunette horizontale. Les centres des deux disques avaient été préalablement réglés de manière que la droite qui les joignait était exactement perpendiculaire à l'axe de rotation de l'instrument, ce qui la faisait coïncider avec la verticale menée par une division connue du limbe, quand cet axe était amené à l'horizontalité par un niveau de suspension; et de très-petits mouvements de rappel, opérés par des tiges de renvoi, donnaient à l'observateur le moyen de rendre cette coïncidence tout à fait rigoureuse en ramenant les centres devant le fil, s'il y survenait quelque dérangement. Pour effectuer cette vérification sans déplacement, Ramsden avait mis à profit la radiation de la lampe, qui, dans son secteur, éclairait le champ du micromètre oculaire, en illuminant, à travers une ouverture latérale, un diaphragme de métal blanc et mat, fixé obliquement à l'axe du tuyau. La lumière rayonnée horizontalement par la lampe, du côté opposé à cette ouverture, était reçue par un miroir oblique à la verticale, qui la rejetait vers le haut du secteur sur un second miroir, parallèle au premier, et placé de niveau avec l'axe de rotation. Ce deuxième miroir restituait ainsi au faisceau lumineux sa direction horizontale

primitive, et le rassemblait focalement sur la face du disque supérieur, opposée au fil-à-plomb. Alors ce disque, à cause de sa minceur, étant vu à travers l'axe de rotation évidé, devenait comme un petit cercle, brillant d'une lumière propre, dont le diamètre vertical était seul occulté par le fil-à-plomb suspendu au devant de lui. Mais au lieu d'être observé ainsi immédiatement, la lumière qu'il transmettait à travers l'axe de rotation était reçue par un troisième miroir oblique à la verticale, lequel la rejetait vers le bas sur un quatrième, disposé dans une situation parallèle, au niveau du disque inférieur. Ce dernier miroir, lui restituant son horizontalité primitive, la rassemblait en une image focale que l'observateur pouvait percevoir sans se déplacer, et examiner avec la même lunette microscopique qui lui servait pour le disque inférieur. De sorte qu'il pouvait, à chaque instant, constater si chacun de ses disques, le réel comme le réfléchi, était traversé exactement à son centre, par la portion du fil-à-plomb, vertical et opaque, qui pendait librement au devant de lui; et, s'il s'était opéré quelque petit écart dans ces coïncidences, des tiges de rappel placées sous sa main lui donnaient les moyens de la rétablir. Quoique ce système de réflexions successives puisse sembler assez complexe, et qu'il eût fallu beaucoup d'art pour produire ainsi deux images nettes d'objets si diversement distants, les observateurs qui ont employé l'instrument dont il s'agit, ont toujours trouvé la comparaison des deux disques aussi exacte que facile. On peut voir une description détaillée de ce chef-d'œuvre de l'art dans le tome II de l'ouvrage du général Mugde, intitulé *Trigonometrical survey of England and Wales.*

229. Nous venons d'employer le fil-à-plomb pour rendre des droites verticales, et leur assurer, ou leur restituer, cette spécialité de direction. On peut aussi s'en servir, et l'on s'en sert en effet, dans certaines opérations astronomiques, pour rendre des plans verticaux. J'en ferai d'abord l'application aux instruments portatifs.

Alors ces plans sont des limbes circulaires, pouvant tourner autour d'un axe de rotation qui passe par leur centre et qui est perpendiculaire à leur surface, comme le représente la *fig.* 58, qui offre le profil d'une telle disposition. La construction même de ces appareils fournit le moyen d'amener leur axe de rotation AA très-près de l'horizontalité, ce qui rend leur limbe LL'

presque vertical. Cette première opération s'effectue au moyen des vis de calage adaptées au contour du cercle azimutal, du centre duquel s'élève un axe normal qui les supporte ; je ne l'expliquerai point ici, devant l'exposer plus loin avec détail, quand je traiterai des cercles répétiteurs portatifs, auxquels le mode de rectification que je vais décrire s'applique spécialement.

230. Le limbe LL′ étant ainsi rendu presque vertical, il s'agit de rendre cette verticalité rigoureuse. Pour cela, ayant choisi à volonté un des diamètres du limbe circulaire, indiqué par les numéros complémentaires des degrés de sa division, on fixe à ses deux extrémités l'appareil auxiliaire, représenté *fig.* 59. Il consiste en une tige métallique TT′, plus longue que le diamètre LL′, et portant à ses deux bouts des divisions rectilignes GD, G′D′, perpendiculaires à sa direction longitudinale. Cette condition de perpendicularité a dû être établie préalablement par l'artiste, avec toute l'exactitude qu'une construction mécanique comporte; mais on verra que sa réalisation n'a pas besoin d'être mathématiquement rigoureuse. La tige TT′ a deux bras égaux BP, B′P′, qui lui sont également perpendiculaires, et dont l'intervalle est égal au diamètre LL′. Ils sont munis de pinces qui se serrent aux bords du limbe par des vis de pression. Alors, si la construction de l'appareil auxiliaire était absolument rigoureuse, les divisions GD, G′D′ seraient exactement perpendiculaires au plan du limbe LL′. Mais ici, comme dans leur relation avec TT′, il suffira que la condition de perpendicularité se trouve à peu près remplie.

231. Les choses étant ainsi disposées, supposons d'abord, *fig.* 59, que le limbe LL′ soit tout à fait vertical, ce qui rend GD, G′D′ horizontales. Par un point quelconque *s*, choisi à volonté sur la division supérieure, suspendons un fil-à-plomb *sm*. Ce fil viendra battre sur la division inférieure en un certain point *x*, que je considérerai comme inconnu, mais que nous devons désormais concevoir comme fixé par cette condition sur la division inférieure, et comme déterminant avec le point connu *s*, une droite *sx* exactement parallèle au limbe LL′.

Maintenant donnons à ce limbe une petite inclinaison sur la verticale, dans le sens que représente la *fig.* 60. Le fil-à-plomb *sm*,

conservant toujours sa verticalité, s'écartera de la droite sx, en *s'éloignant du limbe* LL'; et il viendra, je suppose, battre sur la division inférieure en un certain point s', que l'on pourra observer. Alors la déviation angulaire $s'sx$ exprimera l'inclinaison actuelle du limbe sur la verticale. Nommons X la distance $o'x$ du point x à l'origine o' de la division G' D', et nommons S' la distance analogue $o's'$, ces distances étant considérées comme positives en *s'éloignant du limbe* LL'. Alors $s'x$ sera S' — X ; et si l'on représente par Δ la distance connue des deux divisions supérieure et inférieure, le triangle rectangle $s'sx$ donnera

$$(1) \qquad \text{tang I} = \frac{S' - X}{\Delta}.$$

232. Du point s' menez *idéalement* à la division supérieure une droite $s'x'$, parallèle à sx; elle sera aussi parallèle au limbe LL'; conséquemment l'angle $ss'x'$, égal à $s'sx$, représentera encore l'inclinaison I. Soit o l'origine de la division supérieure; et nommons S, X' les distances os, ox', comptées de cette origine avec le signe positif, en s'éloignant du limbe, comme nous l'avons adopté pour la division inférieure. On aura ici pareillement, par le triangle $ss'x'$,

$$(2) \qquad \text{tang I} = \frac{X' - S}{\Delta};$$

mais X' sera inconnu dans cette équation comme X était dans la première.

233. Ces deux inconnues peuvent s'obtenir par une opération de retournement. Pour cela, enlevez le fil-à-plomb $ss'm$; puis, sans changer l'inclinaison de l'axe AA, donnez au limbe LL' une rotation de 180° autour de cet axe, *fig.* 61. Ce mouvement intervertira les situations relatives des deux divisions GD, G'D' en les retournant. Mais les droites sx, $s'x'$ conserveront leur parallélisme avec le limbe; et comme celui-ci n'a fait que tourner dans son propre plan, puisque l'axe AA est censé lui être exactement perpendiculaire, il s'ensuit que $s'x'$ exprimera la direction que devrait suivre un fil-à-plomb suspendu en s', si le limbe retourné ΓΓ, était ramené à la verticalité. Maintenant, si l'on suspend en effet un fil-

-plomb au point s' dans sa situation nouvelle, il ne viendra plus battre en x', puisque le limbe n'est pas vertical. Mais il s'écartera de cette direction en s'éloignant du limbe; et il viendra battre en un autre point de la division GD, qui sera, je suppose s''; de manière que la déviation angulaire $s''s'x'$ égale l'inclinaison I. Or, déjà tout à l'heure nous avons trouvé l'angle $ss'x'$ pareillement égal à I. Conséquemment, le point x' sera exactement intermédiaire entre s' et s'' qui sont tous deux observables; de sorte qu'en désignant la distance os'' par S'', conformément à la notation que nous avons adoptée, on aura par cette nouvelle épreuve,

$$(3) \qquad \operatorname{tang} I = \tfrac{1}{2}\,\frac{(S''-S)}{\Delta}; \qquad X' = \tfrac{1}{2}\,(S''+S).$$

En combinant l'équation (1) avec (3), on obtiendrait pareillement l'inconnue X; mais sa valeur nous devient inutile, puisque celle de X' détermine le point x', sur lequel le fil-à-plomb suspendu en s' doit battre lorsque le limbe LL' est vertical, ce qui suffit pour le ramener à cette position.

254. L'exactitude de ce procédé dépend de la précision avec laquelle on peut évaluer la distance ss'', *fig.* 61, sur la division GD. Or, on peut doubler cette précision si, ramenant de nouveau le limbe à sa position primitive par un mouvement de rotation inverse, on recommence la première épreuve, en prenant cette fois le point s'' de la *fig.* 61 pour premier centre de suspension. Car alors le fil-à-plomb $s''m$, parti de s'', marquera d'abord sur la division G'D' un nouveau point de verticalité s^{IV} analogue à s'. Puis, tournant de nouveau LL' de 180° et suspendant le fil-à-plomb en s'', on obtiendra s^{IV} analogue à s''; et cette fois la distance totale $s^{\text{IV}}s$ ou $S^{\text{IV}} - S$ mesurée sur la distance GD à partir de la même origine, toujours en s'éloignant du limbe, sera quadruple de la distance que doit soutendre la déviation I; on aura donc alors

$$(4) \qquad \operatorname{tang} I = \tfrac{1}{4}\,\frac{(S^{\text{IV}}-S)}{\Delta}.$$

En recommençant à prendre s^{IV} pour point de suspension primitif,

on trouverait, après deux retournes :

$$(5) \qquad \text{tang I} = \frac{1}{6}\,\frac{(S'' - S)}{\Delta};$$

et ainsi de suite. De sorte qu'en réitérant les doubles retournes, le diviseur numérique du second membre ira toujours en augmentant. Ce diviseur affaiblira donc de plus en plus les erreurs que l'on peut commettre sur la lecture des divisions qui répondent aux extrémités de l'arc total dont l'on conclut tang I.

235. Dans les figures qui ont servi à établir nos formules, les points s, s', s'',... sont tous représentés plus loin du limbe que les origines o, o', des deux divisions. Cette disposition avait pour but de présenter toutes les distances S, S′, S″,... comme positives, *en s'éloignant du limbe*. Il faudra donc les employer comme négatives dans les cas inverses, où elles se rapprocheraient du plan du limbe plus que les origines o, o'.

Avec cette seule attention aux signes algébriques, les formules (3), (4), (5) donneront le sens de l'inclinaison I, en même temps que sa quantité. La valeur de tang I se trouvera positive lorsque le sommet du cercle s'écartera de la verticale vers la droite de l'observateur, dans la disposition représentée dans les figures où le limbe est situé à sa gauche. Au contraire, tang I sera négative lorsque dans cette même épreuve, le haut du limbe penchera vers la gauche de l'observateur.

236. Il me reste à indiquer quelques détails de construction qui concourent à l'exactitude des résultats.

D'abord il convient, pour la liberté du fil-à-plomb, que les deux divisions GD, G′D′, soient un peu en saillie sur la règle TT, comme le montre la *fig.* 62, qui représente le profil de l'appareil.

Ensuite, il faut un mécanisme particulier pour pouvoir marquer avec précision, sur les divisions supérieure et inférieure, les points successifs sur lesquels le fil-à-plomb vient battre, et qui doivent être pris tour à tour pour points de suspension.

A cet effet, chacune des lames GD, G′D′, portera un curseur rectangulaire, qui, placé dans une languette creuse, comme on le voit à la *fig.* 63, pourra être mené successivement tout le long de

la division, au moyen d'une longue vis v qui le traversera comme un écrou. Un petit cercle d'argent incrusté dans la surface de ce curseur, marquera le point précis s, s', s'' où le fil-à-plomb vient battre dans chaque opération; et sa position dans chaque cas sera marquée sur la division par un trait tracé sur le curseur même. Pour pouvoir prendre ensuite les mêmes points s, s', s'' comme centres de suspension, les lames GD, G′D′, porteront un second curseur plus élevé, pareillement mobile à l'aide d'une vis de rappel v', et auquel le fil-à-plomb s'accrochera. Alors, en tournant la vis v', sans toucher à v, on amènera le fil devant le petit cercle d'argent, de manière à le bissecter avec toute la précision possible; pour rendre cette opération plus parfaite, on regardera le fil et le cercle d'argent avec un microscope que l'on emploiera aussi à lire les divisions successives auxquelles le curseur s'arrêtera.

Pour nous former une idée de l'exactitude que peut donner un semblable appareil, supposons que l'intervalle Δ des deux divisions m soit de 1 mètre, et que les lectures de l'index mobile comportent chacune une erreur égale à $\frac{1}{10}$ de millimètre. Ce sera $\frac{2}{10}$ pour la course totale de l'index, en supposant le cas le plus défavorable où les deux erreurs seraient de nature à s'ajouter. Mais, si cette course totale est seulement le produit d'une simple retourne, d'après la formule (3), elle n'entrera dans I qu'atténuée par le diviseur 2, c'est-à-dire réduite à $\frac{1}{10}$ de millimètre. Elle représenterait donc une erreur de déviation angulaire, dont l'expression, en secondes de degré, serait :

$$\frac{\frac{1}{10}}{1000} \cdot \frac{1''}{\operatorname{tang} 1''} \quad \text{ou} \quad \frac{1''}{10000 \operatorname{tang} 1''},$$

ce qui répond à un arc de 20″,63. Or, dans les observations astronomiques où l'on emploie des cercles portatifs, mobiles autour d'un axe vertical, on opère toujours dans des circonstances où des erreurs trois et quatre fois plus considérables n'auraient pas une influence sensible sur les quantités que l'on veut déterminer. Mais on n'en prend pas moins toutes les précautions imaginables pour les rendre aussi petites que possible. Au lieu d'évaluer l'inclinaison I, on rectifie la verticalité du plan après chaque retourne; et

l'on réitère ces rectifications jusqu'à ce que le point de suspension du fil-à-plomb au devant d'une des divisions, et celui où il vient battre devant l'autre, puissent être échangés par le retournement du limbe, sans qu'on y aperçoive le moindre écart. Cette condition de coïncidence s'apprécie avec une justesse infinie en employant pour suspenseur un fil de ver à soie dédoublé, tendu par un très-petit poids. Quand elle est obtenue, on note l'indication simultanée d'un niveau divisé, fixé sur l'axe de rotation dans le sens de sa longueur; et cette détermination sert ensuite pour ramener le plan du limbe à la verticalité, s'il s'en écartait occasionnellement. Mais on réitère de temps en temps l'application du fil-à-plomb pour constater la constance du niveau lui-même.

237. Dans tout ceci nous avons considéré les divisions GD, G'D', comme perpendiculaires à sx, conséquemment comme perpendiculaires au limbe LL'. Les appareils sont en effet construits pour cette condition. Mais, si elle n'était pas tout à fait observée, et que l'une des divisions, GD par exemple, fût inclinée sur sx de $90 + i$, i étant un très-petit angle, l'appareil pourrait encore servir, sans erreur sensible, pour rendre LL' vertical et déterminer l'inclinaison I. Car il en résulterait seulement que le triangle $ss's''$ de la *fig.* 61, au lieu d'être rigoureusement isocèle, aurait entre ses branches latérales une légère inégalité; de sorte que la ligne $s'x'$ qui bissecte l'angle du sommet s' ne serait plus exactement perpendiculaire sur la base ss''. En supposant les angles i et I restreints à de très-petites valeurs, il est aisé de voir que l'évaluation de ce dernier en serait très-peu altérée. Mais toute erreur disparaît si, au lieu d'évaluer I, on le rend nul par des retournements successifs.

238. Enfin, nous avons constamment supposé que l'axe de rotation AA était exactement perpendiculaire au limbe circulaire dont on veut mesurer ou corriger l'inclinaison sur la verticale. Cette perpendicularité est, en effet, une condition générale dans les instruments d'astronomie, et les procédés mêmes qu'on emploie pour les construire fournissent des moyens très-simples pour l'établir exactement. Toutefois il est essentiel, ou au moins satisfaisant, de pouvoir s'assurer qu'elle existe. Cela est très-facile à l'aide de notre appareil. En effet, si l'axe est oblique au limbe,

oncevez un plan mené par cet axe perpendiculairement au plan lu limbe ; il contiendra l'angle aigu i formé entre eux ; et toute autre droite menée dans le plan du limbe par le point d'insertion le l'axe fera avec lui un angle plus grand que i. Soit, *fig.* 64, le profil de cette section ; et supposons que le limbe LL′ se trouvant ncliné sur la verticale comme le représente cette figure, on applique notre appareil aux extrémités du diamètre compris dans la section verticale AALL′. Le fil-à-plomb suspendu en un point quelconque de la division supérieure marquera sur la division inférieure un certain point s', comme précédemment. Mais, lorsqu'on procédera à la retourne, *fig.* 65, l'angle aigu i, qui était d'abord inférieur, deviendra supérieur par l'effet de la rotation, et il diminuera l'inclinaison propre du limbe jusqu'à la faire passer ici en sens contraire. Alors, le fil-à-plomb suspendu en s' sera ramené, sur la division inférieure, vers un point s'', très-différent de celui qu'il aurait marqué si le limbe, tournant dans son propre plan, eût conservé dans la seconde épreuve la même inclinaison sur la verticale qu'il avait dans la première. L'intervalle ss'' se trouvera ainsi modifié par l'obliquité de l'axe AA sur le diamètre LL′ auquel on appliquera l'appareil de suspension. Et, comme cette obliquité est variable pour les différents diamètres du limbe, il s'ensuit que l'intervalle ss'' se trouvera avoir des valeurs différentes selon le diamètre que l'on choisira. Ce caractère de variabilité fera donc connaître que l'axe de rotation n'est pas exactement perpendiculaire au plan du limbe ; et si la diversité d'inclinaison qui en résulte pour les différents diamètres peut avoir quelque influence sensible sur les observations, il faudra rejeter l'instrument ainsi construit. Un pareil défaut se découvrirait surtout aisément, après que l'on aurait atténué autant que possible l'inclinaison I par les retournes successives, comme nous l'avons expliqué précédemment. Car, lorsque l'échange des points de suspension et de battement du fil aurait été exactement opéré, en attachant l'appareil d'épreuve à un des diamètres du limbe, on trouverait que cette condition ne subsiste plus pour aucun des autres. Heureusement les artistes ont des procédés très-exacts, plus exacts même que cette épreuve, pour dresser les plans des limbes perpendiculairement à leur axe de rotation. Mais pourtant on ne doit pas la négliger, ne fût-ce

que pour prendre confiance dans l'instrument dont on se sert.

239. Le même principe de double observation du fil-à-plomb, d'abord par une apposition directe, puis par retourne, s'emploie aussi pour constater la verticalité du plan des grands cercles astronomiques, qui sont destinés à rester fixes dans le méridien. Mais la longueur de leur lunette suffit alors pour que l'on puisse prendre les deux repères extrêmes du fil-à-plomb, sur des languettes métalliques divisées, fixées aux deux bouts de tuyaux de la lunette dans une direction normale au plan du limbe, avec l'addition d'un rappel qui sert à varier la distance des divisions à ce plan, dans la petite limite de course qui peut devenir nécessaire pour achever de l'amener à la verticalité exacte, après qu'on la lui a déjà donnée, à très-peu près, dans le posage mécanique. L'opération, ainsi conçue, s'effectue alors par des retournes alternatives, comme pour les instruments portatifs, et par des successions d'approximation exactement pareilles. Seulement, comme les grands cercles sont établis parallèlement à une muraille épaisse qui porte leur axe de rotation, le point de suspension du fil-à-plomb se prend sur cette muraille même au-dessus du limbe. On le fixe à l'extrémité libre d'un bras métallique qui, par son autre bout, tourne horizontalement dans une pièce à charnière scellée à la muraille, de sorte qu'il peut ainsi être à volonté approché ou éloigné du limbe autant que cela est nécessaire pour qu'il vienne se placer au devant des traits des divisions tracées sur les languettes que les deux bouts de la lunette portent, et sur lesquelles on peut étudier la coïncidence de ses projections.

A cette disposition, qui permettrait l'appréciation immédiate des coïncidences successives, on associe ordinairement à chaque bout de la lunette, un appareil optique, de l'invention de Ramsden, et qui est propre à les faire observer plus exactement. La *fig.* 66 le représente en projection horizontale, tel qu'on le verrait en le regardant de haut en bas.

Il est porté par deux branches métalliques BB, recourbées rectangulairement en forme d'accolade. Elles se rejoignent à son milieu en une languette T, qu'une vis de rappel V conduit avec un frottement ferme dans une pièce également métallique, qui se fixe invariablement à chaque extrémité de la lunette, que je suppose amenée dans une position à peu près verticale et fixée aussi invariablement au

rcle. Chacun de ces systèmes partage ainsi le mouvement rotaire que l'on peut imprimer au cercle par l'action de la main, uand il est libre; par ses rappels, quand il est fixé. L'appareil ptique porté par les branches BB est composé comme il suit.

DD est un disque mince de nacre de perle, ou de verre dépoli, que on éclaire extérieurement par la flamme d'une bougie ou d'une ampe, et qui devient ainsi un objet rayonnant. Une lentille biconvexe A, qui s'ajuste à une distance convenable de sa face opposée, en forme une petite image circulaire dans son plan focal actuel n F. Sur le prolongement de AF est placé un petit microscope dont objectif A′ reporte cette image à son foyer propre F′, où se trouve n réticule à fils fixes, dont le point de croisement est destiné à la issecter centralement; et sa coïncidence avec ce point s'observe à ravers un oculaire positif placé au delà, en O.

Concevez maintenant que les centres de figures du disque, et es quatre lentilles A, A_1, A_2, A_3, coïncident exactement sur un ième axe rectiligne, comme on peut les y amener par des rappels : le constater par l'observation. Puis, supposons toutes ces pièces xées invariablement aux branches BB, par les tiges métalliques ui y rattachent chacune d'elles. Alors le foyer F sera fixe relatiement au point du tuyau de la lunette où l'on a adapté la pièce T; t il le sera aussi relativement au plan du limbe, dans l'état de onnexion actuel de la lunette avec ce même plan. Laissant toutes es relations ainsi invariablement établies, on pourra prendre le oint focal F de chaque appareil pour repère fixe du fil-à-plomb, ans les opérations successives de suspension comme de retourne. t cela se fera, en l'astreignant toujours à être vu à travers l'oulaire, en coïncidence exacte avec le point de croisement des ls du microscope, le disque lumineux DD ne servant alors que our illuminer le champ apparent sur lequel le lieu du fil-à-plomb eviendra perceptible par son opacité. En admettant que toutes s particularités de relation et de fixité, supposées ici, sont exacement réalisées, la netteté de la perception obtenue à l'aide du icroscope semble promettre une précision bien plus grande u'on ne l'obtiendrait en observant immédiatement la coïncidence u fil-à-plomb sur des divisions linéaires, même avec des microopes fixes Toutefois, si l'on applique ici les considérations qui

ont été exposées à la fin de notre tome Ier, page 687, et qu'on les combine avec la condition nécessaire de fixité du point focal F, avec lequel le fil doit toujours coïncider dans les opérations successives, on pourra douter si la vision directe ne sera pas ici au moins aussi sûre que la vision complexe. Cette comparaison ne serait pas sans importance; car, à la vérité, on verra plus tard qu'une très-petite erreur sur la verticalité du plan du limbe n'aurait aucune influence appréciable sur les mesures des distances zénithales des astres qui traversent le méridien à quelque distance du zénith. Mais quoique les cercles fixes soient principalement destinés à cette application, ils sont pourtant censés pouvoir s'employer même pour les plus petites distances, quoique leur emploi puisse y devenir notablement fautif par le moindre défaut de verticalité de leur plan. Aussi, dans ce cas, devient-il beaucoup plus sûr d'employer le secteur zénithal qui y est spécialement approprié.

240. La méthode précédente a été employée par Troughton, pour régler la verticalité du premier grand cercle qui ait été établi à l'observatoire de Greenwich et qui avait été construit par lui. Je l'ai exposée d'après les conditions physiques auxquelles elle doit satisfaire, plutôt que dans la réalité de ses détails matériels qui n'ont été décrits que très-imparfaitement. M. Gambey en a appliqué le principe fondamental au grand cercle qu'il a construit pour l'Observatoire de Paris; mais il en a modifié l'exécution en plusieurs points. Il emploie un procédé d'observation microscopique, semblable à celui de Ramsden. Mais il n'a besoin que d'un seul appareil, placé au bout objectif de la lunette et qui y reste toujours fixé; la *fig.* 67 le représente réduit à la moitié de sa véritable grandeur (*). Il ne diffère de ceux de Troughton, qu'en ce que tout le système optique tourne autour de deux pointes pp', de manière qu'il peut à volonté venir s'appliquer contre le tuyau de la lunette et être de nouveau ramené en saillie, sans que la distance de la ligne de

(*) Elle m'a été communiquée par M. Faye, l'un des élèves astronomes attachés à l'Observatoire de Paris, le même qui a découvert la comète périodique à laquelle son nom restera attaché. Il avait joint à son dessin une exposition très-intelligente de l'emploi pratique de l'appareil, qui m'a tourni les détails que j'ai rapportés.

on à la lunette change; condition assurée par un petit ressort presse toujours le système total contre les pivots sur lesquels ère sa rotation. Le fil-à-plomb se suspend au-dessus du cercle, une pièce d'attache scellée dans la muraille, mais pourvue n rappel qui permet d'éloigner le fil du limbe du cercle, ou de rapprocher dans une petite étendue de course. Pour opérer, on tourner le cercle jusqu'à ce que la lunette devienne verticale, objectif étant dirigé en bas; puis on déploie l'appareil optique 'on fait mouvoir le point de suspension du fil-à-plomb, jusqu'à qu'il vienne se placer dans l'axe de vision. Ensuite le mou- nent de rappel du cercle en approche ou en éloigne les micros- es, de manière que l'image du fil se trouve exactement dans le n focal intermédiaire, et se voie à travers l'oculaire du micros- e, en coïncidence avec le point de croisement des fils du réticule érieur. Cela fait, on rabat l'appareil contre le tuyau qui le porte, qui permet de faire tourner le cercle et la lunette sans rencon- r le fil-à-plomb ni le déranger. L'objectif étant ainsi reporté haut, on rabat l'appareil, qui se trouve de nouveau contenir fil dans son espace libre; et, au moyen du rappel du cercle, ramène le microscope à en former de nouveau une image tte au point de croisement du réticule intérieur. Si ce point ncide encore avec l'image, le cercle est vertical, puisqu'il a nsporté la ligne de vision sur deux points du fil dont la verti- ité est assurée. Si la coïncidence n'existe pas, on agit sur les butantes qui fixent l'axe de rotation du cercle, de manière à secter l'écart. Alors on rabat de nouveau l'appareil optique ntre sa monture; on ramène l'objectif en bas, sans détacher le ; et l'on fait mouvoir le point de suspension ainsi que les micros- pes pour recommencer une nouvelle épreuve, suivie d'un second tournement, qui ne peut plus laisser voir qu'un écart bien moindre e la première fois. Après quelques alternatives pareilles, la verti- lité se trouve exactement établie. On ôte alors le fil-à-plomb, et ppareil optique est rabattu contre le tuyau, disposé pour recom- encer l'opération quand on le supposera nécessaire, ou quand voudra seulement constater que le cercle a conservé sa verti- lité.

CHAPITRE X.

Du concours des instruments nécessaires pour les observations astronomiques, et, en particulier, des horloges qui servent à la mesure mécanique du temps.

241. Ce n'est pas tout de reconnaître en général les phénomènes que la nature nous présente, il faut en déterminer les circonstances d'une manière rigoureuse, et les fixer avec assez de précision pour qu'il n'y reste plus rien d'arbitraire. Dans les chapitres que l'on vient de lire, nous avons reconnu l'existence du mouvement diurne commun à tous les astres, et celle des mouvements propres qui appartiennent à quelques-uns d'entre eux. La comparaison des apparences diverses que l'aspect du ciel présente dans les différents pays, nous a découvert la roudeur de la Terre et son isolement dans l'espace. Enfin, des expériences très-simples nous ont fait connaître la constitution et la forme de l'atmosphère dont la Terre est environnée. Il faut maintenant perfectionner ces premières notions. Il faut les compléter et en fixer les résultats par des mesures exactes. Ainsi le raisonnement seul, fondé sur des considérations générales, ne nous suffit plus, et nous sommes forcés de recourir aux procédés rigoureux et aux instruments précis employés par les astronomes.

242. L'astronomie exacte exige le concours de deux sortes d'instruments. Il lui faut des appareils optiques qui servent à perfectionner la vision, et des horloges qui servent à mesurer le temps. J'ai exposé la théorie des premiers avec plus de détails que ne semblerait le demander un ouvrage qui a principalement pour but leur application pratique. Mais cette application ne peut se bien faire, surtout dans les observations délicates, sans la connaissance approfondie des principes mathématiques sur lesquels les appareils optiques sont fondés. Or, malgré les efforts des physiciens et des géomètres qui ont concouru à les établir, ils m'ont paru n'avoir pas été jusqu'ici réunis dans un ensemble systématique, avec assez

netteté, de généralité, ni surtout sous une forme explicite, qui rmît d'en effectuer directement les applications comme on déloppe un problème abstrait d'algèbre. J'ai tâché de remplir ce le de la science. L'horlogerie est beaucoup plus avancée dans la ation, et l'emploi pratique, des principes mécaniques dont elle pend. Ses produits n'arrivent à l'astronome qu'à l'état de maines toutes faites, qui doivent fonctionner par elles-mêmes, sans n intervention, et il ne les emploie jamais que comme des compars temporaires, dont il se hâte de remplacer les indications inétablement imparfaites, par la marche abstraitement parfaite de orloge idéale que lui offre le mouvement diurne du ciel. J'aurai nc seulement à dire en quoi consiste le temps que ces machines esurent; comment les principes de leur construction les rendent tes à le mesurer; comment l'astronome peut reconnaître leurs perfections, inévitables dans toute œuvre manuelle; et enfin, par elles observations il peut parvenir à en corriger les effets dans résultats.

243. Le *temps* n'est pas un phénomène physique que l'on puisse médiatement percevoir. C'est une notion abstraite, résultante du pprochement que notre esprit peut établir entre deux idées endrées par l'expérience, celles de simultanéité et de succession. En voyant tous les jours que les choses physiques changent, en yant qu'elles ont un commencement d'existence, une période accroissement, et une fin, nous acquerrons l'idée *d'avant* et *après*. Tous les arbres d'une forêt, différents en grandeur et en oductions, les enfants, les hommes faits, et les vieillards rassemés dans une même enceinte, nous présentent des êtres dont xistence comparée se compose de phases simultanées pour les s, successives pour les autres. Cette distinction peut être rendue us précise et plus nette par des phénomènes de mouvement straitement considérés. Concevons, par exemple, deux points ométriques, A, B, placés au même point d'une droite mathématique. Leur existence sera simultanée dans cette position. Supsons-les tous deux lancés sur la droite, et comptons leurs déplaments à partir de l'origine commune. Il pourra arriver que A *écède* B, ou le *suive*, ou *coïncide* toujours avec lui. Dans les deux

premiers cas, l'arrivée de chacun d'eux à un même point de la droite sera *successive ;* dans le troisième cas, elle sera *simultanée.* La même alternative de notions se manifeste aux sens dans une expérience journalière. Marquez sur le clavier d'un instrument de musique, quatre touches correspondantes aux cordes qui donnent les sons désignés par *ut, mi, sol, ut,* celui-ci étant l'octave aigu du premier. Ces quatre touches, frappées *simultanément,* feront entendre à l'oreille un son unique, appelé l'*accord parfait;* frappées *successivement,* elles feront entendre un *chant,* composé des sensations successives produites par les quatre sons individuellement produits. La notion abstraite *du temps* résulte de cette distinction entre les sensations ainsi perçues ; et la diversité d'ordre de la succession peut être mesurée par la comparaison établie entre les mouvements qui l'opèrent.

Concevons, par exemple, un phénomène physique, composé de phases distinctes, et qui fût tel, qu'après leur entier accomplissement, la cause mécanique qui le produit se retrouvât opérer exactement avec les mêmes conditions qu'elle avait dans le principe de son action. Ce sera ce qu'on appelle un phénomène *périodique.* S'il peut être réalisé ainsi à volonté, autant de fois qu'on le voudra et avec les mêmes caractères de phases ainsi que de restitution, son accomplissement total fournira *une unité de temps,* à laquelle on pourra comparer tous les autres phénomènes successifs. Et il pourra servir aussi à mesurer les conditions relatives de leur succession, en comptant combien de fois le phénomène périodique pris pour type s'est accompli pendant que les autres parcourent leurs phases. Cette périodicité rigoureuse ne se réalise jamais complétement dans aucun phénomène naturel connu ; mais un grand nombre ne s'en écartent qu'en vertu de modifications physiques ou mécaniques, qu'il est facile d'apprécier : de sorte que chacun d'eux peut être employé comme exprimant une unité de temps, d'autant plus exacte et comparable avec elle-même, que les modifications qui la font varier seront moindres.

244. Prenons par exemple, *fig.* 68, un vase conique V, terminé par une ouverture supérieure O très-étroite ; et, après l'avoir complétement rempli d'un liquide pesant, tel que l'eau ou le mercure,

uchons son orifice avec le doigt; puis, renversons-le verticale-
ent, et, supprimant l'obstacle qui le ferme, laissons le liquide
écouler en vertu de la pesanteur qui le sollicite. Cet écoulement
opérera par phases successives; mais l'accomplissement total de
s phases sera toujours un phénomène pareil, pour le même vase,
mpli du même liquide, si l'on suppose idéalement l'expérience
itérée dans des circonstances physiques identiques entre elles.
et accomplissement total pourrait donc fournir alors une unité de
mps. Mais, dans la réalisation pratique, cette unité sera toujours
aparfaitement exacte; parce que l'identité des opérations, et des
rconstances intérieures ou extérieures, qui concourent à la pro-
uction du phénomène pris pour type, ne pourrait jamais être ri-
oureusement réalisée. Elle suffit cependant déjà pour des évalua-
ons grossières. Car c'est sur un principe pareil qu'est fondée *la
epsydre*, dont les marins se servent pour fixer l'unité de temps
ur laquelle ils règlent les observations du *loch*. Elle consiste en un
ouble cône de verre VV′, *fig.* 69, qui est hermétiquement
rmé, et dont l'une des moitiés, V′, est en partie remplie de sable
n. Lorsqu'on veut jeter le *loch*, qui consiste en un flotteur attaché
a bout d'une corde que l'on file pendant que le navire marche, un
atelot prend la clepsydre en main, par son centre C; puis, au
oment où on laisse tomber le flotteur, il la renverse le plus sou-
ainement qu'il lui est possible, et il fait un signal convenu pour
u'on arrête le dégagement de la corde, conséquemment le flotteur,
uand le sable est complétement écoulé.

245. L'écoulement des liquides, particulièrement de l'eau, a été
endant bien des siècles le seul phénomène que les hommes aient
mployé pour obtenir une unité constante de temps, en imaginant
ne infinité de combinaisons pour le rapprocher de l'exacte pério-
icité que cette constance suppose. La moins imparfaite a consisté
mesurer le temps par les volumes d'eau écoulés par l'orifice infé-
ieur d'un vase conique entretenu constamment plein de ce liquide
u moyen d'un courant supérieur horizontal. Tel fut le principe
les *horloges d'eau*, dites *à niveau constant*, qui ont été employées
ar les Grecs et les Romains, puis perfectionnées par les Arabes; et,
ien antérieurement, plusieurs siècles avant l'ère chrétienne, les

Chinois mesuraient des intervalles égaux de temps, par l'écoulement de l'eau, tombant dans des vases qui renfermaient des tiges divisées (*). Ce ne fut que bien tard, seulement vers le milieu du XIVe siècle de cette ère, que l'on commença à employer en Europe un procédé de mensuration incomparablement plus exact. Et, par une injustice du sort, heureusement rare dans l'histoire des sciences, ce procédé, qui est le principe fondamental de nos horloges actuelles, que l'on doit par conséquent considérer comme la source des découvertes sans nombre auquel elles ont donné naissance, on ignore le nom de l'homme de génie qui en fut l'auteur.

246. Il consiste essentiellement à remplacer l'écoulement du liquide par la descente d'un poids, dont l'accélération est périodiquement interrompue au moyen d'un mécanisme que ce poids même fait mouvoir, et qui est composé de pièces entièrement rigides, d'où résulte la constance de leur mode d'action. Tout l'appareil dans sa simplicité primitive est représenté, *fig.* 70, tel qu'on le voyait encore établi, et agissant, il y a moins d'un siècle, dans quelques anciennes horloges publiques, et en particulier dans celle de la tour du Palais de Justice, à Paris. Il est porté et maintenu invariablement par un système composé de barres métalliques, que désignent les lettres C. *Le moteur* est un poids M suspendu à une corde qui s'enroule autour d'un cylindre horizontal solide, lequel peut tourner autour de son axe central TT_1, celui-ci étant porté à ses extrémités sur des pivots percés dans les branches latérales de la monture. Si rien ne s'opposait à l'effort continu que le poids M exerce, il déroulerait la corde qui le retient, et ferait tourner le cylindre avec un mouvement pareillement continu, qui s'accélérerait tant que durerait sa descente. Mais cet effet est périodiquement interrompu par un mécanisme appliqué à l'une des extrémités du cylindre et qui lui sert de *modérateur*. Il se compose d'un cylindre métallique AA_1, maintenu vertical par des collets qui l'attachent à la monture sans le serrer, de sorte qu'il peut tourner librement sur les pivots qui le terminent. A sa partie supérieure, il porte une

(*) Édouard Biot, traduction du Tcheou-li, c'est-à-dire *Recueil des rites de la dynastie Tcheou.*

traverse métallique horizontale BB, appelée *balancier*, qui lui est fixement adhérente, de sorte qu'elle tourne avec lui; et, aux deux bras de cette traverse, qui sont égaux en longueur, on suspend des poids égaux, *m*, *m*, qui peuvent être, à volonté, placés plus ou moins près du centre de rotation. Tout ce système ainsi disposé, étant inerte, ne peut se mettre à tourner spontanément autour de l'axe AA_1. Il faut que le mouvement lui soit communiqué par l'action d'une force mécanique; et l'effort nécessaire pour lui faire décrire un même arc de rotation, dans une même unité de temps, dépendra de la quantité de masse qui le compose, ainsi que de la distribution des parties de cette masse autour de l'axe. C'est cet effort que l'on donne à faire au poids moteur M, non pas continûment, mais par intermittences, en rattachant le cylindre TT_1 à l'axe AA_1, par un mécanisme qui les rend dépendants l'un de l'autre, de sorte que le premier ne peut tourner sans faire tourner le second. Pour cela, l'extrémité du cylindre la plus voisine de AA_1 porte une roue dentée verticale, RR_1; et, à la hauteur des deux sommets, R, R_1, de cette roue, l'axe AA_1 porte deux petites plaques métalliques P, P_1, appelées *palettes*, lesquelles y sont fixées dans des directions rectangulaires entre elles, de manière qu'une seule peut se présenter à la fois, et s'insérer entre les dents du sommet auquel elle correspond. Les choses étant disposées ainsi, concevons la palette supérieure P, actuellement engagée entre les dents du sommet R, l'inférieure R_1 se trouvant hors des dents inférieures à ce même instant. Le cylindre TT_1 tendra à tourner dans le sens de la traction que le poids M exerce sur la corde qui l'enroule, et qui est ici désignée par une flèche courbe. Mais il ne pourra exécuter ce mouvement sans que la dent supérieure R pousse devant elle la palette P, qui lui fait obstacle, jusqu'à ce qu'enfin elle s'en *dégage*. Or, cette opération, qui la rend libre, ne s'accomplira qu'en une certaine quantité de temps, dépendante de la relation qui existera entre la force du moteur M, et le *momentum d'inertie* du système auquel la palette P est attachée, ce qui entraînera un abaissement correspondant du poids M. Mais le même mouvement qui pousse P, ramène la palette inférieure P_1 au devant de la dent inférieure R_1, et la lui donne en obstacle, au moment où la supérieure vient d'être rendue libre.

Alors, pour dégager R_1, il faut une nouvelle dépense de force motrice qui s'emploie à faire tourner l'axe AA_1 avec son appendice de masses inertes, en sens contraire du mouvement qui lui avait été communiqué précédemment. Cette seconde opération exige donc encore, pour s'accomplir, un nouvel intervalle de temps qui serait exactement égal au premier, si toutes les circonstances physiques et mécaniques pouvaient être supposées absolument pareilles. Quand elle est terminée, la palette supérieure P se trouve ramenée à sa position primitive au devant de la dent supérieure R, ce qui reproduit les circonstances primordiales du mouvement, d'où résulte une nouvelle alternative d'oscillations du balancier BB, semblable à la première que nous avions décrite; et le même effet se répète sans interruption, jusqu'à ce que le poids moteur M ait touché la terre, ou que la corde qui le suspend au cylindre soit entièrement déroulée.

247. Sans doute ce mécanisme est encore très-imparfait. La grossièreté des pièces qui le composent, leur lourdeur, leur volume relatif, et l'étendue ainsi que l'énergie des contacts qu'elles nécessitent, doivent y occasionner des frictions considérables, qui ne peuvent rester constantes. Les bras du balancier doivent changer de longueur selon les diverses températures qui leur sont communiquées par le milieu ambiant; et, en vertu de ces changements, non-seulement leur masse propre, mais encore les poids additionnels qu'on y attache, seront transportés successivement à des distances diverses de l'axe de rotation vertical, ce qui modifiera le *momentum d'inertie* du régulateur, en même temps que les résistances opposées par les frottements varieront. De tout cela il résulte que les intermittences opérées dans la descente du poids moteur ne s'exécuteront point par des phases exactement semblables; et ainsi leur accomplissement successif ne pourra pas fournir une unité fixe de temps, uniformément continuée. Mais ce qu'il faut voir et remarquer dans cet appareil, c'est d'abord sa composition avec des matières entièrement rigides, qui le rend moins altérable que tout autre système mécanique dont des liquides feraient partie; et ensuite son principe fondamental, qui consiste à transformer la descente continue d'un poids moteur en une succession de chutes intermittentes, périodiquement limitées dans leur amplitude par

'intervention d'un régulateur constant. Les découvertes de Galilée ur les lois qui règlent la chute des corps, et l'application que Huygens en fit aux horloges, complétèrent la réalisation de cette dée, en introduisant comme régulateur un système rigide mobile, ıyant, par lui-même, les conditions d'isochronisme qu'il devait ommuniquer aux intermittences de chute du poids moteur.

248. Lorsqu'on suspend un corps pesant à l'extrémité inférieure l'un fil rigide, fixé par son autre extrémité, ce fil prend naturellement la direction verticale, et le corps se place au point le plus bas. Si on l'écarte un peu de cette position, il tend à y revenir en vertu de sa pesanteur; enfin, si on l'abandonne à lui-même, il oscille de part et d'autre de la verticale; et, par une propriété extrêmement remarquable, ses oscillations, lorsqu'elles ont une amplitude extrêmement petite, sont toutes *isochrones* entre elles, c'est-à-dire d'égale durée. Leur parité, sous ce rapport, subsiste même, quoique la résistance, opposée par l'air ambiant au mouvement du corps, diminue continuellement l'arc total qu'il parcourt, et finisse par ne lui laisser qu'une étendue insensible. Mais, pourvu que cet arc variable soit très-petit, comme nous le supposons, la durée de la demi-oscillation descendante est augmentée par la résistance du milieu, autant que la durée de la demi-oscillation ascendante qui lui succède en est diminuée; ce qui rétablit, en somme, l'isochronisme de l'oscillation totale, comme si elle avait été effectuée dans un vide parfait, où son amplitude serait demeurée constante.

Cette propriété n'est pas seulement un résultat d'expérience, elle se prouve rigoureusement par le calcul (*). Il en est de même des petites oscillations d'un corps de figure quelconque, attaché à l'extrémité d'une verge de forme invariable. Des corps ainsi suspendus, et mis en mouvement de cette manière, se nomment *des pendules*. La durée absolue des oscillations dépend de la figure du corps suspendu, de sa grandeur, de sa masse, et de la longueur de la verge. Mais les géomètres ont trouvé des méthodes pour ramener tous les cas à celui d'un pendule dans lequel la masse

(*) *Voyez* le Traité de Mécanique de Poisson, 2e édition, t. II, p. 101.

de la verge serait nulle par rapport à celle du corps, considérée comme un point infiniment dense. Ce pendule idéal se nomme *pendule simple*. Les autres sont des *pendules composés*.

Lorsqu'on a observé les oscillations d'un pendule composé, on peut en conclure la longueur du pendule simple qui ferait son oscillation dans le même temps. De cette manière, on n'a jamais à comparer que des pendules simples de différentes longueurs, et le calcul fait encore connaître, d'après cette longueur, la durée de leurs oscillations (*).

(*) Ayant choisi à volonté une unité quelconque de temps, définie par l'accomplissement d'un phénomène rigoureusement périodique, nommons g le *double de l'espace* qui serait parcouru dans cette unité-là, par un corps pesant partant du repos, et abandonné à la seule action de la pesanteur, dans le vide, en un certain lieu de la terre, par exemple à l'Observatoire de Paris. Soit ensuite e l'espace que ce même corps aura décrit, dans les mêmes circonstances, et suivant la même verticale, lorsque son mouvement se sera continué pendant un nombre d'unités de temps exprimé par t. On aura généralement

$$e = \tfrac{1}{2}gt^2;$$

telle est la loi de la chute des graves, reconnue expérimentalement par Galilée. On la conclut encore directement de la notion abstraite de la pesanteur, considérée comme une force résultante de l'attraction exercée par toute la masse terrestre sur des points matériels placés hors de cette masse, à des distances de sa surface assez petites, comparativement à son volume, pour que l'intensité de la force attractive puisse être supposée sensiblement constante dans tous les points de l'espace parcouru.

Quand $t = 1$, e est égal à $\frac{1}{2}g$ par définition; quand il s'est écoulé deux unités de temps, $t = 2$; et l'espace total parcouru e devient $2g$. Otez de là $\frac{1}{2}g$, espace décrit dans la première unité de temps; puis encore $\frac{1}{2}g$ pour l'espace égal que la force accélératrice aurait fait décrire au corps pendant la deuxième unité, s'il fût parti du repos à la fin de la première. Le reste g exprimera la *vitesse acquise* par le corps après sa chute libre, pendant la première unité de temps; c'est-à-dire l'espace qu'il décrirait dans chaque unité ultérieure, par la seule conséquence des impressions qu'il a reçues pendant la première unité, si la pesanteur cessait subitement d'agir sur lui, quand cette première unité de temps est écoulée. Ceci fournit une seconde manière de définir la longueur g, en la désignant comme l'expression de la *vitesse acquise par le corps, après sa chute continuée pendant une unité de temps simple*, et c'est la signification qu'on lui attribue le plus ordinairement.

Concevons maintenant un pendule simple, ayant pour longueur l, qui

249. Ces oscillations régulières sont très-propres à remplacer mouvement alternatif du balancier, dans les horloges à roues, ossédant par elles-mêmes le principe de l'isochronisme, au lieu

---

cille dans le vide, entre des amplitudes d'arc infiniment petites, au même eu, et sous l'influence de la même gravité pour laquelle on a défini la lon-eur g. Nommons T le temps total d'une de ses oscillations, exprimé en rties de la même unité de temps à laquelle la définition de g s'applique. n désignant par π le nombre abstrait 3,14159265 35... qui exprime la lon-neur de la demi-circonférence dont le rayon est 1, on aura généralement

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}};$$

ci se démontre dans les Traités de mécanique. Le rapport $\frac{l}{g}$ est un nom-re abstrait, parce que l et g doivent être exprimés en fonction d'une même nité de longueur; et le nombre T donné par la formule se trouve exprimé 1 parties de la même unité de temps, qui est employé pour définir g dans n application phénoménale.

La formule montre qu'en un même lieu, et sous l'influence d'une même avité, les temps d'oscillation des pendules simples, de longueur diverse, nt proportionnels aux racines carrées de ces longueurs. Les pendules plus urts marchent donc relativement plus vite, et les plus longs plus lente-ent, dans cette proportion.

Cette même formule intervertie donne lieu à une application d'une extrême nportance. Concevons que, dans un lieu donné de la Terre, on ait déterminé *périmentalement* la durée T des oscillations d'un pendule simple, ayant ne longueur connue l; on en conclura aussitôt

$$g = \frac{\pi^2 l}{T^2}.$$

sera donc connu par cette expression; et, en répétant la même expérience 1 différents lieux de la Terre, on découvrira si l'intensité de la pesanteur t constante ou variable sur les diverses parties de sa surface. On a reconnu nsi qu'elle croît progressivement, en allant de l'équateur vers les pôles.

Pour réaliser cette application, il est évident que les durées des oscilla-ons observées doivent toujours être rapportées à une unité constante de mps, qu'il faut ainsi pouvoir reproduire toujours la même en différents aux. Le mouvement diurne du ciel offre cette unité identique, et partout servable, comme nous le prouverons bientôt. Il faut aussi pouvoir con-ure la longueur l des observations faites sur les oscillations d'un corps ma-riel, puisque le pendule simple est une abstraction mathématique qu'on saurait réaliser physiquement. Mais il y a pour cela des méthodes très-écises que nous exposerons dans la suite de cet ouvrage.

de le recevoir du moteur. Pour les employer comme phénomène régulateur, on fait porter au pendule les palettes d'échappement, ou d'autres moyens d'arrêt analogues, qui, à la fin de chaque oscillation, vont *rencontrer* les dents de la roue verticale que le poids moteur tend à faire tourner. Alors le mouvement de cette roue, et par suite la marche de toutes les autres, qu'elle conduit par des engrenages, se conforme à celui du pendule. Une dent échappe à chaque oscillation, et comme les oscillations sont toutes égales en durée, les pas de la roue conductrice sont parfaitement uniformes. Aussi n'emploie-t-on plus aujourd'hui, pour les observations, que des horloges à pendule, que l'on nomme vulgairement *pendules*, du nom de la pièce qui produit leur régularité.

Dans ces instruments, le pendule est ordinairement composé d'une verge métallique, au bas de laquelle on attache fixement une *lentille* aussi métallique, et ordinairement formée par deux segments de sphère. On fait cette lentille très-pesante, pour qu'elle perde moins de son mouvement par la résistance de l'air, et aussi pour se rapprocher du cas du pendule simple, dans lequel la verge est supposée n'avoir aucune pesanteur. L'action même du poids moteur, convenablement transmise au système d'échappement que le pendule porte, répare, à chaque oscillation, la diminution d'amplitude que la résistance de l'air tend à lui imprimer, et entretient ainsi l'égalité des arcs qu'il décrit, ce qui assure encore plus rigoureusement l'isochronisme des oscillations, en rendant leurs phases successives identiques entre elles.

250. La verge métallique qui porte la lentille est sujette à se dilater et à se raccourcir par les variations de la température. Alors la durée des oscillations du pendule devient différente. Car, pour les pendules simples de longueur inégale, les durées des oscillations très-petites sont entre elles comme les racines carrées des longueurs; et, quand les dimensions d'un pendule composé varient, cette proportion se reporte sur le pendule simple, qui lui est équivalent. De là naîtraient, dans la marche de l'horloge, des variations continuelles, si l'on n'avait trouvé le moyen de corriger cet inconvénient. C'est à quoi l'on réussit par divers mécanismes que l'on applique à la verge du pendule, et qui se réduisent tous, en dernière analyse, à reporter

haut une partie de la masse totale du système lorsque la verge s'al-
ge, et à la reporter en bas lorsqu'elle se raccourcit; de telle sorte,
n telle proportion, que ces effets contraires se compensent exac-
nent. Ces appareils, dont la description détaillée appartient à la
canique physique, se nomment des *compensateurs*. On a soin
n mettre à toutes les horloges destinées à des observations
actes. Si pourtant on se trouvait absolument forcé d'employer
e horloge qui n'en eût pas, on pourrait y suppléer encore en
servant avec beaucoup de soin les variations de la température,
en corrigeant par le calcul les effets de ces variations. La mécani-
e donne pour cet objet des méthodes que l'on trouvera dans les
aités de cette science, et qu'il n'est pas de notre ressort d'exposer.

281. Pour éviter l'embarras de compter une à une toutes les
cillations, ce qui ne manquerait pas d'occasionner de fréquentes
reurs, quelques-unes des roues de l'horloge portent des aiguilles,
i, se déplaçant avec elles à chaque oscillation, et d'une égale
antité, marquent, sur un cadran divisé, le nombre des oscilla-
ns qui ont eu lieu.

Les horloges sont *sexagésimales* ou *décimales* selon la division
leur cadran. Dans les horloges sexagésimales, une des aiguilles
t le tour entier du cadran en 60 oscillations. On la nomme
guille des *secondes*. La réunion de 60 oscillations, ou secon-
s, forme ce qu'on appelle une *minute*. Il y a pareillement une
guille des minutes. Celle-ci fait un pas sur le cadran, pendant
e l'aiguille des secondes fait son tour entier. Enfin la réunion
60 minutes forme ce que l'on appelle une *heure*. Il y a aussi
e *aiguille des heures*, qui fait un pas sur le cadran, pendant
e l'aiguille des minutes fait un tour entier. De cette manière,
eure sexagésimale contient 3600 *secondes*. Les *heures*, *minutes*
secondes se désignent, dans la notation écrite, par les carac-
res ^{h}, ^{m}, ^{s}, placés en exposant à droite du nombre qui les exprime,
mme ils sont ici figurés. On comprend, d'ailleurs, que ces dénomi-
tions sont tout à fait arbitraires; qu'elles n'indiquent pas des me-
res absolues de temps, mais des mesures relatives à la durée des
cillations du pendule qui fait marcher l'horloge, durée qui est diffé-
nte selon la longueur du pendule. Cependant, les habitudes nées

de nos besoins, ont introduit à cet égard des usages généraux dont on s'écarte peu. Les horloges sexagésimales sont toujours réglées de manière à marquer à peu près 24 heures dans l'intervalle d'un jour et d'une nuit. Alors les heures deviennent des périodes de temps, communes à toute la société, et en rapport avec ses besoins et ses travaux.

L'introduction si avantageuse du système décimal dans toutes les mesures a donné naissance aux horloges décimales. Dans celles-ci, l'intervalle entier d'un jour et d'une nuit est divisé en 10 heures, l'heure en 100 minutes, la minute en 100 secondes. Il y a de même une aiguille pour chacun de ces systèmes de division, et celles du cadran y sont conformes. On voit ainsi que 10 heures décimales répondent à 24 heures sexagésimales, et généralement il est très-facile de convertir un nombre quelconque d'heures, minutes et secondes d'une de ces divisions dans l'autre (*).

Quant à la valeur absolue de ces divisions, le ciel offre, comme on le verra tout à l'heure, des moyens très-précis pour la déterminer et pour la fixer. Notre but ici était seulement de considérer les horloges à pendules comme un moyen exact d'obtenir des intervalles de temps égaux, indépendamment des durées absolues de ces intervalles. En effet, au moyen des procédés que nous venons d'exposer, et en y joignant une extrême habileté dans l'exécution,

---

(*) Soit D un nombre donné d'heures décimales et de fractions de ces heures. En le multipliant par $\frac{24}{10}$, on le réduira en heures et fractions d'heures sexagésimales ; il sera ensuite facile de convertir ces fractions en minutes et secondes, au moyen de la multiplication par 60.

Soit, par exemple, en temps décimal.....	D =	$2^h,232$
Multipliant par $\frac{24}{10}$, on a les heures sexagésimales ..	S =	5 ,38368
Multipliant la fraction par 60, on a les minutes..		$23^m,02080$
Multipliant encore la fraction par 60, on a les secondes		$1^s,24800$
En réunissant ces termes, on a.....	S =	$5^h\,23^m\,1^s,248$

Si S était donné, on le réduirait en secondes sexagésimales ; et, en appelant N le nombre de secondes décimales équivalent, on aurait

$$N = S\,\frac{100000}{86400} \quad \text{ou} \quad N = S\,\frac{1000}{864}\,;$$

car 24 heures, ou 86400^s sexagésimales, valent 10 heures décimales, ou 100000^s décimales.

les artistes modernes sont parvenus à construire des horloges tellement parfaites, qu'elles varient bien rarement d'une oscillation entière sur 86400; c'est-à-dire que, lorsqu'elles ont exécuté ce nombre de battements, qui s'exprime sur leur cadran par 24 heures sexagésimales, la période totale de temps ainsi mesurée offre rarement des différences égales à la durée d'une seule oscillation du pendule qui est leur régulateur. Tout étonnante que puisse paraître une telle régularité, les astronomes en ont la preuve chaque jour, en comparant sans cesse, comme ils le font, la marche de leurs horloges au mouvement diurne de révolution du ciel. Mais, comme l'isochronisme rigoureux de ce mouvement se démontre, par l'emploi que l'on fait des horloges elles-mêmes pour en mesurer les phases, il ne sera pas inutile de montrer que l'isochronisme propre à ces instruments lorsqu'ils sont bien exécutés, peut se constater par leurs indications mêmes, afin d'éviter, dans l'établissement de ce fait capital, l'apparence d'un cercle vicieux, qui du reste n'existe pas, ainsi qu'on le verra quand nous ferons connaître l'emploi que l'on fait des horloges pour mesurer le mouvement du ciel.

282. Je suppose que l'on ait deux horloges astronomiques A, B, à pendule compensé, exécutées avec toute la perfection qu'on leur donne aujourd'hui. Ne nous inquiétons point des détails de leur mécanisme. Apprécions seulement leur marche par le coup sec et instantané, mais périodique, qu'elles font entendre à chaque oscillation de leur pendule. Ce son est produit par le choc que la palette, ou en général la pièce d'échappement du pendule, opère contre la dent de la roue conductrice, qu'elle *rencontre* à la fin de chaque oscillation. C'est ce qu'on appelle *les battements* de l'horloge. L'intervalle de temps qui les sépare doit être égal pour le sens de l'ouïe, lorsque l'horloge est bien réglée. Mais, si l'on trouve entre ces intervalles une inégalité appréciable, qui viendrait de ce que l'action de l'échappement n'est pas exactement symétrique de part et d'autre de la verticale, un mouvement de rappel soumis à la volonté de l'observateur donne le moyen de la détruire, et de rendre les intervalles des battements sensiblement égaux. Je dirai tout à l'heure en quoi ce procédé de rappel consiste, et

comment il agit. Pour le moment, je le prends comme un fait. Toutefois, afin de rendre l'appréciation que je vais faire, indépendante du petit reste d'inégalité que le sens de l'ouïe n'apprécierait pas, je supposerai que l'on compare chaque horloge à elle-même, par le retour d'un battement *de même sens*, ce que le sens correspondant du mouvement de sa lentille indiquera.

Ceci convenu, fixons nos deux horloges A, B, aux murailles solides d'une même salle, en les mettant assez distantes entre elles pour que les vibrations imprimées par chacune aux masses environnantes ne se transmettent pas de l'une à l'autre avec assez d'énergie pour modifier sensiblement leurs marches propres, et cependant assez rapprochées pour que l'observateur placé entre elles puisse entendre, de cette place, la succession des battements de toutes deux. S'il les écoute attentivement, il reconnaîtra des époques où ils lui arrivent sensiblement simultanés. Mais, à moins que les deux horloges n'eussent une marche rigoureusement pareille, ce qui serait un hasard infiniment rare, cette simultanéité de perception ne se soutiendra point, et les battements, perdant leur coïncidence, se sépareront d'autant plus promptement que les marches propres des deux horloges différeront davantage entre elles. Pour plus de simplicité, j'admettrai que ces horloges ont été fabriquées avec l'intention que leur marche fût à très-peu près pareille, ce qui suppose que les pendules composés qui leur sont appliqués ont été faits, aussi approximativement que possible, équivalents à un même pendule simple. Alors, chaque fois que leurs battements se seront trouvés en coïncidence sensible, ils tarderont quelque temps à se séparer; et l'on rendra cette séparation aussi lente que l'on voudra, en faisant descendre un peu la lentille du pendule qui va le plus vite, ou remontant un peu celle qui va le plus lentement. Toutes les horloges astronomiques portent sous leur lentille une vis de rappel annexée à la verge du pendule, et qui sert pour produire à volonté l'un ou l'autre effet.

L'accord des battements étant ainsi rendu plus durable, attendons une époque de coïncidence, et notons à cet instant, l'heure, la minute, la seconde marquée par chaque horloge sur son cadran propre. Pour fixer les idées, je supposerai ces cadrans sexagé-

simaux, et je convertirai tous les intervalles de temps que les aiguilles y mesurent en secondes de la division de l'horloge, c'est-à-dire en nombres d'oscillations simples. Peu à peu les battements se sépareront; et, après qu'il s'en sera opéré un certain nombre, ils recommenceront de nouveau à s'accorder. Mais je laisse passer cette deuxième coïncidence sans la noter, parce qu'elle a lieu entre des contacts des pièces d'échappement autres que ceux qui ont été d'abord comparés. J'attends donc que les battements se séparent de nouveau, puis soient revenus à une troisième coïncidence qui sera alors de même nature que la primitive, et je note les nouvelles indications des aiguilles des deux horloges à ces deux instants. Alors celle qui marche relativement le plus vite, B par exemple, aura gagné sur l'autre deux oscillations; de sorte que, si A en a fait N, B en aura fait $N+2$. D'après cela, si leurs marches propres sont individuellement uniformes, quoique différentes, lorsque A aura exécuté 86400 oscillations comprenant 24 de ses heures, B devra en avoir exécuté proportionnellement $86400\,\frac{(N+2)}{N}$ ou $86400 + 2.\frac{86400}{N}$. Nous allons bientôt vérifier s'il en est ainsi; mais auparavant, il faut apprécier l'étendue d'erreur que peut comporter individuellement une telle appréciation.

Pour cela, le mouvement de rappel des lentilles nous ayant permis d'éloigner les coïncidences autant que nous le jugeons convenable, supposons, comme exemple, que leur intervalle se soit trouvé comprendre 2 heures de A, ce qui donnera $N = 7200$. Alors le terme $\frac{2.86400}{N}$ sera égal à 24. C'est-à-dire, qu'à juger par cette seule épreuve, pendant que A exécutera 86400 oscillations, comprenant 24 de ses heures, B devra en exécuter 86424, et marquer conséquemment 24 secondes au delà de 24 heures sur son propre cadran.

La seule erreur qui pourrait affecter cette déduction résulterait des inexactitudes que l'on aurait pu commettre en appréciant les époques précises des deux coïncidences, dont l'intervalle donne le diviseur N. En effet, lorsque la simultanéité des battements s'éta-

blit, elle semble persister sans différence appréciable, pendant un certain nombre d'oscillations, qui, pour une oreille exercée, s'élèverait peut-être au plus à 40, dans l'exemple que nous avons choisi. Ainsi, l'on jugerait seulement avec certitude qu'au commencement de cet intervalle les battements ne sont pas tout à fait d'accord, et qu'ils ont cessé de l'être à la fin. Plaçons l'époque précise au milieu de ces extrêmes; et, opérant de même pour les deux coïncidences consécutives, admettons qu'il en puisse résulter une erreur finale de 20 unités sur l'évaluation du nombre N. Ce sera $\frac{1}{360}$ de sa valeur. Ainsi, l'erreur qui en proviendrait dans le quotient 24 serait une fraction proportionnelle, c'est-à-dire seulement $\frac{24}{360}$ ou $\frac{1}{15}$ d'oscillation, dont on se tromperait alors sur l'évaluation du nombre total exécuté par B en 24 heures de A. On voit par là combien ce mode de comparaison comporte de justesse.

Ceci reconnu, continuons de suivre nos deux horloges, et répétons la même évaluation après chaque couple de coïncidences de même nature qui se succéderont ultérieurement. Si les deux horloges sont bien exécutées, les valeurs partielles du terme correctif $\frac{2.86400}{N}$ se trouveront toutes égales; ou, du moins, il ne s'y rencontrera que de très-petites différences accidentelles, dont le signe n'aura rien de régulier, comme en doivent naturellement occasionner les erreurs partielles que l'on ne peut éviter sur l'appréciation expérimentale des intervalles N. De là on devra conclure que, pendant toute la durée de ces épreuves, les deux horloges A et B ont exécuté des nombres d'oscillations toujours proportionnels entre eux, dans un même intervalle de temps absolu, fixé par des phénomènes simultanés à ses deux limites; de sorte que, dans cet intervalle, leurs marches ont été constantes relativement l'une à l'autre.

De même que l'on a comparé ainsi l'horloge A avec l'horloge B, on peut comparer A à toute autre C, D, E,... qui serait construite pour avoir une marche à peu près pareille. Si elles sont construites avec toute la perfection que l'on sait aujourd'hui donner à ces instruments, ces épreuves conduiront toujours à une conséquence

semblable ; c'est-à-dire que leurs marches propres, quoique différentes, offriront une invariable proportionnalité entre les nombres d'oscillations qu'elles auront exécutées dans des temps égaux. Cette constance relative de mouvements périodiques, maintenue entre un nombre quelconque d'appareils, et pour des intervalles de temps quelconques, ne peut exister qu'en admettant que chaque mouvement accomplît la série continue de ses périodes, suivant des phases identiquement réitérées dans chacune d'elles ; ce qui les caractérise comme autant de phénomènes propres à servir d'unité constante de temps. On pourra donc légitimement les employer à un tel usage, jusqu'à ce que leur application fasse reconnaître et constater la périodicité aussi exacte, ou même plus exacte, de quelque phénomène naturel, qui, pouvant être également aperçu de tous les points de la Terre, fournisse aux observations une mesure commune et une expression universelle du temps. Nous prouverons plus loin que le mouvement diurne de révolution du ciel offre cette propriété et ces avantages.

253. Dans les épreuves précédentes, j'ai supposé, pour plus de rigueur, que les comparaisons s'établissaient entre les battements qui commencent ou qui terminent une oscillation de même sens. Mais, quand on emploie une horloge pour fixer l'époque d'un phénomène instantané, on ne peut pas faire cette distinction ; et il faut bien en rapporter l'observation au battement qui en est le plus proche, en évaluant, *par estime*, la fraction d'oscillation qu'il faut y ajouter ou en retrancher pour avoir l'époque précise, ce que l'expérience apprend à faire avec une exactitude surprenante. C'est pourquoi, étant obligé de rapporter les phénomènes indifféremment à l'un des battements ou à l'autre, suivant que le hasard les amène, il faut avoir bien soin de rendre préalablement leur intervalle si approximativement égal, que l'oreille n'y puisse reconnaître aucune différence ; ce que l'on obtient par un mouvement de rappel dont j'expliquerai l'effet dans un moment.

254. Afin qu'il ne reste rien de vague dans les notions qui précèdent, lesquelles doivent être toujours empreintes dans l'esprit de l'astronome, je joins ici, comme exemple, *Pl.* XIII, deux figures qui montrent les mécanismes, moteur et régulateur, d'une horloge

astronomique construite dans les ateliers de MM. Breguet. La première, n° 71, présente d'abord la roue dentée que le poids moteur tend à faire tourner dans le sens indiqué par la flèche courbe. Au-dessus d'elle, on voit l'échappement, de la nature de ceux que l'on appelle *à ancre*, parce que l'arc métallique EE qui le constitue a ses deux extrémités recourbées comme des ancres, qui s'engrènent tour à tour entre les dents de la roue à la fin de chaque oscillation. Cet arc EE est traversé centralement par une barre métallique CFC', qui fait corps avec lui, et qui peut tourner avec le moins de frottement possible autour d'un axe horizontal C, qui lui sert de centre de rotation. Concevez alors que le poids moteur tende la corde qui fait tourner la roue dentée; et qu'en même temps, plaçant la main au bas de la flèche CF, on lui donne alternativement de très-petits écarts des deux côtés de la verticale. Les deux bouts de l'ancre viendront tour à tour s'engrener entre les dents qui leur font face. Mais l'appareil est tellement disposé, qu'entre ces deux positions extrêmes, il y a une très-petite amplitude de course, où la roue est tout à fait libre. Alors, quand cette phase de l'échappement arrive, elle tourne en obéissant à la traction qui la sollicite, mais elle s'arrête au moment où l'une des deux ancres vient s'y engrener. Il ne reste plus qu'à opérer ces alternatives de liberté et de repos, de manière qu'elles se succèdent après des périodes de temps égales. C'est ce que fait le pendule régulateur représenté ici, *fig.* 72, avec le système de barres métalliques qui sert à compenser les changements de longueur que les variations de la température tendraient à lui imprimer. Quelquefois ce pendule porte sur sa tête un couteau d'acier poli, par lequel on le suspend sur un plan de même métal, fixé horizontalement au devant du centre de rotation C de la *fig.* 71. Celui qui est représenté ici est suspendu par une lame d'acier trempée à consistance de ressort flexible, laquelle est fixée, par en haut, dans une monture solide qui s'adapte par de grosses vis à la boîte de l'échappement. Le pendule ainsi placé se rattache à la flèche CF par une tige métallique horizontale, fixée en M, perpendiculairement au plan de ses barres compensatrices, laquelle tige vient alors s'insérer entre les branches par lesquelles la flèche CF, *fig.* 71, est terminée inférieurement. En vertu

de cette connexion, le pendule conduit la tige d'échappement, et lui fait suivre son mouvement d'oscillation propre; ce qui règle les rencontres des deux extrémités de l'ancre avec la roue dentée, conformément à la même période d'isochronisme. Et, pour que ce mouvement conserve toujours la même amplitude, malgré la résistance de l'air, les plans courbes qui terminent les ancres ont des formes, ainsi que des positions relatives, telles, que les dents les poussent toujours quelque peu en se dégageant, mais seulement autant qu'il le faut pour maintenir ces conditions d'égalité. Lorsque la connexion est ainsi établie entre le moteur et le régulateur, on écarte tant soit peu le pendule de la verticale où il resterait en repos, et on l'abandonne à lui-même; puis on écoute les battements produits par les chocs des ancres contre les dents de la roue, aux instants successifs où leur insertion s'y opère. S'ils semblent se suivre par intervalles égaux, on laisse le mouvement se continuer, et l'horloge est prête pour les observations. Mais, si l'on y aperçoit quelque différence, on fait mouvoir une vis de rappel placée en M, qui déplace latéralement la tige de communication; ce qui suffit pour rétablir l'égalité aussi approximativement que les sens peuvent en être juges. Quand on voit que la corde qui soutient le poids moteur approche de son développement complet, et avant qu'elle l'ait atteint, on l'enroule de nouveau autour de la roue qu'elle conduit, ce qui se fait par un mécanisme propre à chaque horloge. Mais, toujours, ce mécanisme met en action un poids ou un ressort, appelé *auxiliaire*, qui entretient le mouvement pendant que l'on remonte le moteur principal. C'est seulement pour cette opération que l'on doit ouvrir la caisse dans laquelle l'horloge est renfermée, et qui l'abrite contre les agitations de l'air. Il est bon que la paroi intérieure de cette caisse soit en glace, pour laisser voir non-seulement la marche des aiguilles, mais encore toutes les modifications accidentelles que l'horloge pourrait éprouver. Toutes les constructions que l'on a imaginées reviennent, pour le fond, à celle que je viens de décrire. Elles ne diffèrent entre elles que dans les détails. J'ai à peine besoin d'ajouter que, lorsqu'on établit l'horloge à la place où elle doit rester fixée, toutes les pièces qui la composent doivent être disposées

suivant les directions horizontales ou verticales que nécessite le mode d'action qui leur est propre. On les ajuste ainsi avec des fils-à-plomb et des niveaux, et l'on assure leur stabilité, tant absolue que relative, en les assujettissant par des vis de pression. Il faut ensuite prendre toutes les précautions imaginables pour que la caisse de l'horloge ne reçoive pas de chocs extérieurs qui pourraient les déranger; et l'on doit même éviter les plus petits mouvements de vibration qui pourraient se communiquer au pendule par l'intermédiaire des masses environnantes.

253. Je dois donner aussi une idée des *montres portatives*, appelées à bon droit *chronomètres*, c'est-à-dire *mesureurs du temps*, lorsqu'elles sont fabriquées avec un degré de perfection qui les rend assez exactes pour servir aux observations astronomiques. Leur isochronisme est fondé sur un principe pareil à celui des anciennes horloges, dont l'application est faite seulement par des procédés mécaniques différents, pour obtenir des effets pareils sous moins de volume. Le poids moteur est remplacé par un ressort d'acier trempé, appelé *grand ressort*, qui se tend au moyen d'une clef tournante, et qui exerce sa traction sur une chaîne d'acier composée d'anneaux très-fins. Mais, pour que cette traction reste constante à mesure que le ressort se débande, la chaîne est enroulée autour d'un barillet de forme conoïdale, auquel le ressort est fixé intérieurement; de sorte qu'il la tire par un bras de levier dont la longueur est toujours inverse de sa puissance. Le régulateur est un balancier circulaire, traversé par un axe garni de deux palettes, qui s'engrènent alternativement dans les dents d'une roue que le ressort tend à faire tourner continûment. Mais la petitesse nécessaire de cette pièce lui donnerait trop peu de masse pour que son *momentum d'inertie* pût suffire à balancer la force du grand ressort. C'est pourquoi elle est secondée, j'oserais presque dire animée, par un autre ressort beaucoup plus délié, qui est attaché par un de ses bouts à une platine fixe, et par l'autre, à une branche du balancier, autour de l'axe duquel il s'enroule; ce qui lui a fait donner le nom de *spirale*. Chaque fois qu'une des palettes de l'engrenage échappe, ce petit ressort s'arme par tension ou par extension; et sa force, dans ces deux cas, est calculée de manière à

lancer suffisamment celle du grand ressort pour déterminer ernativement l'engrènement ainsi que le dégagement des pa-tes. Ce mécanisme est complété par une infinité d'artifices de nstruction qui ont pour effet d'en rendre le jeu facile, uniforme, constant sous toutes les inclinaisons que l'on peut donner au ın de la montre, ainsi que dans les différents états de la tem-rature ambiante qu'elle peut être exposée à partager. Malgré rt infini avec lequel toutes ces précautions sont combinées, les ronomètres les plus parfaits n'ont jamais autant de régularité e les horloges à pendule. Aussi ne les emploie-t-on, pour des ıges astronomiques, que dans les circonstances où l'on ne peut s se servir des autres. Par exemple, à bord des navires, où le ›uvement de la mer rend impossible d'établir une horloge à ndule, on est trop heureux d'avoir des montres aussi perfec-nnées. Pour cet usage, on les fait beaucoup plus grosses que les ronomètres portatifs, ce qui rend plus facile d'assurer la régu-ité de leur marche, en les exécutant avec les mêmes soins; et on tient suspendues dans des boîtes par un système d'axes de :ation croisés rectangulairement, pour que leur propre poids ıintienne toujours, autant que possible, le plan de leurs rouages ns l'état d'horizontalité au milieu des agitations que le navire rouve. Ces instruments sont alors appelés *montres marines* ou *rde-temps*, parce que, lorsqu'ils ont été comparés, avant le part, avec une horloge à pendule compensé, établie à terre, ils rdent, ou du moins sont censés indiquer, pendant le voyage, le nps absolu que marquerait l'horloge au même instant physique. :anmoins, on ne se confie pas aveuglément à cette fixité de relation, elques soins que l'artiste ait pris pour l'obtenir, et l'on vérifie marche de la montre par des observations astronomiques, dans ıtes les occasions où elles sont praticables, comme nous l'expli-erons ultérieurement. Les chronomètres et les garde-temps se mparent entre eux, et aux horloges à pendule, comme celles-ci tre elles, par la coïncidence des battements que leur échappe-:nt fait entendre à chaque vibration du balancier qui leur sert de ;ulateur.

CHAPITRE XI.

De la manière d'associer les indications des horloges à celles des instruments des passages, pour étudier les circonstances générales du mouvement diurne du ciel.

256. Dans le chapitre IX, *section* II, pages 261 et suivantes, j'ai décrit la construction de l'*instrument des passages*, ainsi appelé parce qu'il sert à observer les passages simultanés ou successifs des astres dans un vertical constant. J'ai expliqué alors toutes les opérations de précision qu'il faut faire, pour que l'axe de rotation de l'instrument soit et se maintienne horizontal; pour que le fil central du réticule se trouve sur la direction de l'axe optique, et pour que, dans toutes les inclinaisons de la lunette, ce même fil suive toujours exactement le plan vertical qu'on veut lui faire décrire. Il ne reste plus qu'à mettre sous les yeux l'ensemble d'un pareil instrument établi en place, et c'est ce qu'offre la *Pl.* XIV, *fig.* 73, laquelle représente, de face et de profil, le plan de celui qui a été construit pour l'observatoire de Naples, par l'habile artiste Reichemback. Je le donne simplement comme exemple, et non pas comme un type universel ou nécessaire, les détails de construction qui réalisent l'effet général pouvant être infiniment diversifiés. Dans la figure que j'ai empruntée à la description publiée de cet observatoire, on voit les colonnes de pierre qui supportent l'axe de rotation de l'instrument, et les contre-poids, adaptés par des crochets autour de ses tourillons, pour diminuer la pression de sa masse, affaiblir ainsi la trop grande friction qu'elle exercerait sur les supports, si elle n'était pas en partie contre-balancée, et prévenir par là leur usure trop prompte. Une barre métallique fixée au tuyau, dans le sens de sa longueur, sert à prévenir la flexion que le poids de l'objectif pourrait y occasionner; et un contre-poids, attaché à l'extrémité de cette barre la plus proche de l'oculaire, sert à équilibrer les deux moitiés de la lunette autour de

l'axe de rotation, assez exactement pour qu'elle puisse rester immobile, dans toutes les inclinaisons qu'on lui donne autour de la verticale qui passe par son centre. On a aussi figuré le niveau qui se suspend aux tourillons de l'axe de rotation, pour établir ou constater son horizontalité; et enfin la lampe latérale qui éclaire le champ du micromètre, en réfléchissant sa lumière sur un diaphragme intérieur, oblique à l'axe longitudinal de la lunette. On n'a pas adapté à l'oculaire le petit cercle vertical, armé d'un niveau, que j'ai décrit *fig.* 53, et qui sert pour amener approximativement la lunette à la distance zénithale de l'astre dont on veut observer le passage. Mais la même indication est donnée par un cercle divisé, dont le plan est fixé aux supports de pierre, et dont le limbe est parcouru par une alidade que porte l'axe de rotation. Ce système, qui était autrefois généralement usité, a des inconvénients. Car, si l'extrémité de l'alidade porte sur le limbe, on doit craindre que la résistance ainsi développée ne réagisse sur la direction de l'axe qui la conduit; et, si elle ne touche pas le limbe, on apprécie difficilement avec exactitude la projection de son index sur la division. Aussi ce cercle latéral avait-il un autre but dans la construction ici représentée. L'artiste l'avait destiné à donner la mesure exacte des distances zénithales dans le vertical de passage, afin de pouvoir ainsi observer, à la fois, leur valeur angulaire, et l'époque où chacune se réalisait. Mais l'expérience n'a pas confirmé les avantages que l'on se promettait de cette association; et l'on est revenu, pour les instruments d'astronomie, à ce principe général, qu'il ne faut exiger de chacun d'eux qu'une seule fonction déterminée et spéciale, pour laquelle on a alors toute liberté de les adapter le plus avantageusement qu'il est possible. Il faut donc supprimer par la pensée le cercle latéral, dans la figure que nous donnons, et le remplacer idéalement par le petit cercle de direction attaché à l'oculaire. On aura alors un instrument des passages pur de tout mélange, tel que celui que le même excellent artiste a également construit pour l'observatoire de Naples, et qui y est effectivement employé. Mais j'ai cru devoir saisir cette occasion d'indiquer la tentative qu'on avait faite pour réunir les observations du temps et des distances, afin d'en dis-

suader l'exécution ultérieure, qui a été aussi infructueusement employée dans plusieurs autres instruments fabriqués par Reichemback, pour divers observatoires, par une espérance d'économie mal entendue.

257. Concevons donc un instrument des passages solidement établi, et bien réglé. Son axe optique décrira exactement le vertical quelconque dans lequel on l'aura dirigé. Je supposerai d'abord les observations faites seulement au fil vertical et central du réticule, qui coïncide avec l'axe optique. J'examinerai ensuite l'emploi des fils latéraux qu'on associe généralement à celui-là.

Parmi tous les plans verticaux dans lesquels l'axe optique peut être ainsi dirigé, choisissons celui dans lequel tous les astres atteignent leur plus grande hauteur sur l'horizon quand ils y sont amenés par le mouvement diurne du ciel. Ce vertical sera le *méridien*, tel que nous l'avons défini dans les chapitres III et IV du premier volume, d'après le seul aspect des apparences générales. Nous avons donné, dès lors, des procédés pratiques pour en déterminer la direction approximative en chaque point de la surface terrestre, soit en bissectant les directions azimutales des points de lever et le coucher d'un même astre fixe, soit en bissectant les directions des ombres solaires d'égale longueur, observées avec le gnomon, aux époques des solstices. Supposant donc la ligne méridienne du lieu d'observation déjà fort approximativement déterminée par ces procédés, plaçons-y une mire fixe et très-distante, sur laquelle nous dirigerons l'axe optique de notre instrument; et, après l'avoir ainsi fixement établi, tournons-le vers le ciel pendant une belle nuit. Puis, observons les phénomènes de mouvement qui s'offrent à nos yeux à mesure que les astres se présentent dans le champ de la lunette.

258. J'admets que nous sommes dans un climat situé au nord de l'équateur terrestre. Commençons par observer les astres qui passent au sud du zénith. Une étoile entre dans le champ de vision, *par la droite* : nous faisons mouvoir la lunette verticalement pour amener cette étoile sur le fil transversal du réticule, fil qui est alors horizontal. Elle le suit; elle parcourt successivement, sans le quitter, les intervalles des différents fils parallèles au fil

central, et, après quelques instants, elle sort de la lunette *par la gauche,* du côté opposé.

Ici nous voyons en un moment les effets du mouvement diurne dont nous avons reconnu l'existence d'une manière générale. La marche apparente de l'étoile de droite à gauche, dans la lunette, indique une marche réelle de gauche à droite, ou d'orient en occident; car les lunettes astronomiques renversent les objets.

De plus, la permanence de l'étoile sur le fil transversal du réticule montre que la direction de son mouvement était sensiblement perpendiculaire au plan vertical que la lunette décrit. Cette direction était donc horizontale. Ainsi l'étoile était au point le plus élevé de sa révolution.

Cependant nous ne devons pas accorder à cette conséquence une rigueur trop absolue. Il suffirait que le mouvement de l'étoile fût à peu près horizontal pour qu'il nous parût tel, dans le petit intervalle angulaire que le fil horizontal du réticule soutend dans le champ de la vision, à travers l'instrument.

Tous les astres situés vers le sud, et dont nous pouvons observer ainsi le passage, présentent les mêmes effets. Le méridien, déterminé par le soleil, est donc aussi le même pour les étoiles; c'est le plan du *midi* de chacune d'elles, au moins autant que nous en pouvons juger par ces effets.

Dirigeons maintenant la lunette du côté du nord, vers les étoiles qui ne se couchent jamais. Nous voyons les unes marcher dans la lunette, de gauche à droite, ce sont les plus hautes; les autres vont de droite à gauche, ce sont les plus basses. Les premières marchent donc en réalité de droite à gauche ou d'orient en occident; les dernières d'occident en orient. Voilà les effets de leur révolution circulaire; les supérieures sont au point le plus haut de leur course, les inférieures au point le plus bas.

D'ailleurs, on remarque évidemment une très-grande différence dans la rapidité des passages en général. Les étoiles situées du côté du sud parcourent beaucoup plus vite le champ de la lunette; celles qui se trouvent du côté du nord vont beaucoup plus lentement. Une d'entre elles surtout a un mouvement si lent, qu'on peut, pendant le temps qu'elle met à traverser le champ de la

lunette, observer un grand nombre de passages d'étoiles du côté du sud.

Ces différences indiquent évidemment que le mouvement général des astres s'exécute autour d'un axe dont un des pôles de rotation est situé du côté du nord; c'est encore ce que l'aspect général du ciel nous avait fait soupçonner.

259. Mais c'est l'admirable invention des horloges à pendule qui donne la mesure précise de ces mouvements divers. Quand on observe le passage d'un astre, on écoute en silence les battements de l'horloge, et l'on note exactement l'heure, la minute, la seconde et la fraction de seconde, où l'astre passe à chacun des fils.

Lorsque ces fils sont tous à égale distance, et l'on s'efforce toujours de les placer ainsi, une moyenne arithmétique entre les époques observées donne, en *temps de la pendule*, l'instant précis du passage de l'astre au fil central du réticule (*). Ce passage se trouve alors déterminé par les cinq observations plus exactement que par une seule, parce qu'il est toujours probable qu'on ne se trompe pas dans le même sens pour tous les fils, mais dans des sens différents; de sorte que, dans l'addition des cinq résultats, une partie des erreurs doit très-probablement s'entre-détruire.

(*) Soient T l'époque du passage au fil du milieu du micromètre; t le temps que l'astre emploie pour aller d'un fil à l'autre. Les époques des passages aux cinq fils successifs seront $T - 2t$; $T - t$; T; $T + t$; $T + 2t$; dont la moyenne est T. Toutefois, même en supposant les intervalles angulaires des fils exactement égaux, cette moyenne ne coïnciderait avec l'instant du passage au fil central que dans le cas où le vertical décrit par l'axe optique serait exactement le méridien. Car c'est seulement autour de ce plan que le mouvement diurne peut être symétrique avant et après le passage central. Aussi trouverait-on d'énormes différences entre l'époque réelle des passages au fil central et la moyenne T conclue arithmétiquement, si on l'appliquait à des étoiles voisines du pôle visible, pour peu que le vertical décrit par l'axe optique différât du méridien rigoureux. Mais je ne donne ici que des indications générales sur la manière d'observer, et j'exposerai plus loin des méthodes *exactes* pour réduire par le calcul, au fil central, les observations des passages faites aux fils latéraux, soit que ceux-ci se trouvent également ou inégalement espacés.

Si les distances des fils ne sont pas exactement égales, et il est bien difficile qu'il n'y ait pas sur cela quelque petite incertitude, la moyenne arithmétique des cinq observations ne s'appliquera pas au fil du milieu du micromètre, mais au milieu véritable, qui en sera du moins extrêmement rapproché. Ce milieu constituera donc comme une sorte de fil idéal, qui sera le même pour un même astre, quoique non pas exactement identique pour tous, à cause de leurs inégales distances au pôle et au zénith. Mais, en se bornant à comparer entre eux les passages successifs d'un même astre dans ses diverses révolutions diurnes, comme nous allons tout à l'heure le faire, il n'en résultera aucun inconvénient considérable tant que l'on ne dérangera point le réticule; condition indispensable, et dont l'oubli entraînerait les plus grandes erreurs.

Ayant ainsi appris à combiner les indications de la lunette méridienne avec la mesure du temps par les horloges, réunissons un système d'observations faites avec ces deux instruments, et voyons les conséquences positives que nous en pourrons tirer.

CHAPITRE XII.

De l'égalité des révolutions du ciel, et de leur usage pour la mesure du temps.

260. L'instrument des passages étant réglé, comme nous venons de le dire, si on le dirige plusieurs nuits de suite vers une même étoile, et que l'on observe chaque fois, avec une bonne horloge à pendule, l'heure, la minute, la seconde, et la fraction de seconde à laquelle le passage a eu lieu, les intervalles de ces retours, comptés en temps de la pendule, seront parfaitement égaux. Ce résultat, vérifié constamment par tous les observateurs, est la base de toute l'astronomie.

Pour en donner un exemple, et montrer ainsi par le fait que l'uniformité que l'on suppose ici aux horloges n'est point idéale, je rapporterai les passages suivants de l'étoile que l'on nomme α du Bélier, observés par M. Arago et moi, dans la petite île presque déserte de Formentera (*).

(*) J'aurais pu, sans doute, en consultant les registres de Delambre, ou de l'Observatoire, trouver des observations plus parfaites que celles que je rapporte, et plus dignes d'être citées. Si j'ai choisi les suivantes, ce n'est pas par un sentiment d'amour-propre, mais uniquement parce que les circonstances où elles ont été faites sont analogues à l'espèce d'isolement où je suppose ici un observateur, créant toute l'astronomie avec ses seuls instruments, sans aucun secours étranger.

On devra remarquer aussi que, dans cette première application, j'emploie les époques des passages dans leur état brut, telles qu'elles ont été observées, sans y introduire les petites corrections qui seraient nécessaires pour ramener les positions apparentes des étoiles à des conditions absolument fixes, qui les rendent rigoureusement comparables entre elles. Mais, outre que le peu de variabilité de ces corrections rend leur différence insensible, pour des étoiles très-distantes du pôle, quand on compare leurs retours entre des époques séparées par un petit nombre de jours, comme je le fais ici, leur emploi devient l'objet d'une approximation ultérieure, dont j'indique la nature dans ce chapitre même, et que j'enseignerai plus tard à effectuer rigoureusement.

DATES des observations.		ÉPOQUES des passages de α du Bélier en temps de la pendule.	INTERVALLES de deux passages consécutifs
		h. m. s.	
écembre.....	24	9.42.32,36	
			h. m. s.
	25	9.41.29,70	23.58.57,34
	26	9.40.26,72	23.58.57,02
	27	9.39.23,90	23.58.57,18
	28	9.38.21,38	23.58.57,48
	30	9.36.15,74	23.58.57,18
anvier.....	2	9.33. 7,68	23.58.57,31 (*)
	5	9.29.59,06	23.58.57,13
	6	9.28.55,88	23.58.56,82
	9	9.25.47,66	23.58.57,26

sand il se passe quelques jours sans que l'on puisse observer, du 30 au 2, on divise la différence des temps par le nombre des ons diurnes qui s'est écoulé dans l'intervalle. Par exemple, du a la différence est $71^h 56^m 51^s,94$ qui, divisé par 3, donne $57^s,31$ pour *la marche diurne moyenne*. Cela suppose les positions ile absolument fixes, ou n'éprouvant que des variations négli- pendant l'intervalle total de temps qu'embrassent les observa- mparées. Mais j'ai expliqué, dans la note précédente, les mo- m'ont porté à opérer ainsi pour ces premières déterminations.

hronisme de ces intervalles est si approché, les variations y remarque sont si petites et si peu régulières, qu'il est urel de le regarder comme rigoureux, et d'attribuer ces arts à de légères irrégularités de l'horloge, et aux erreurs rvations.

Ce qui confirme cette vérité, et ce qui achève de la rendre , c'est que l'intervalle compris entre deux passages consé- est pas seulement constant pour chaque étoile ; il est encore pour toutes. Voici par exemple les passages de plusieurs toiles aussi observées à Formentera, avec les mêmes in- ts.

DATES des observations.	NOMS des étoiles observées.	ÉPOQUES des passages au temps de la pendule	INTERVALLES des passages.
		h. m. s.	
1808. Janvier... 10	α du Bélier.....	9.24.43,02	
	Aldébaran	11.53.11,10	
	Rigel	12.33.37,92	
	β du Taureau....	12.43. 6,20	
	σ d'Orion.....	12.59 21,30	
	Arcturus.....	21.34.42,61	
			h. m. s.
Janvier... 11	α du Bélier.....	9.23 40,53	23.58.57,51
	Aldébaran... ...	11.52. 8,34	23.58.57,24
	Rigel.....	12.32.35,26	23.58.57,34
	β du Taureau . .	12.42. 3,52	23.58.57,32
	σ d'Orion.....	12.58.18,60	23.58.57,30

Après le passage de σ d'Orion, il arriva un accident à l'horloge; en la remontant, elle s'arrêta pendant un instant. Pour la raccorder avec elle-même, on prit soin d'observer la première des étoiles qui continuaient la série précédente. On eut ainsi

Arcturus. . . $21^h\,33^m\,38^s,08$.

262. Enfin, l'isochronisme de ces intervalles n'a pas seulement lieu dans le plan du méridien; on l'observe également dans tous les plans verticaux. Cette vérité est confirmée par l'expérience générale de tous les astronomes. On peut même en voir une preuve dans les dernières observations que je viens de rapporter. Car, lorsqu'on les fit, l'instrument avait été placé à dessein dans un vertical un peu différent de celui où on l'avait mis jusqu'alors. Il est facile de s'apercevoir de ce déplacement par la marche de l'horloge, qui du 9 au 10, ne donne pas, entre les passages de α, l'intervalle accoutumé.

263. Quel que soit le vertical dans lequel on veut observer ces phénomènes, il faut que les fils du micromètre auxquels on rapporte les passages soient exactement parallèles au plan vertical que

la lunette décrit. Cette condition est nécessaire pour éviter les effets de la réfraction qui, ainsi que nous l'avons reconnu, augmente les hauteurs apparentes des astres sur l'horizon, et non pas toujours d'une égale quantité ; de sorte qu'elle pourrait les amener plus tôt ou plus tard sur les fils du micromètre, si ceux-ci étaient inclinés à l'horizon. Cet inconvénient n'existe plus si les fils sont parallèles au plan vertical de l'astre. Car alors l'instant où il les atteint est le même que s'il n'y avait pas de réfraction; et il en résulte seulement qu'il les coupe un peu plus haut ou un peu plus bas.

284. Je dois cependant prévenir que, si l'on observait ainsi des étoiles situées très-près de l'axe de la rotation diurne, par exemple, l'étoile que l'on appelle *la polaire*, on devrait, si les observations étaient faites avec la dernière exactitude, trouver entre les passages consécutifs des différences appréciables, qui pourraient quelquefois s'élever jusqu'à $\frac{1}{2}$ seconde de temps; c'est-à-dire jusqu'à être environ $\frac{1}{172800}$ de la durée d'une révolution totale. Ces différences sont produites par de très-petits déplacements, qui s'opèrent dans la position apparente de tous les astres, même des étoiles, suivant des lois dont nous parlerons par la suite; pour le moment, il nous suffira de dire que la cause en est bien connue, et la marche exactement déterminée. On les nomme *la précession, l'aberration* et la *nutation*. Leur effet, sur la durée d'une seule révolution, ne saurait être appréciable que pour des étoiles très-voisines de l'axe de rotation du ciel. Mais, comme ces étoiles, décrivant un très-petit cercle, font leur révolution diurne avec une extrême lenteur, elles restent si longtemps sous les fils du micromètre, que l'instant précis de leur passage ne peut être saisi que très-difficilement; et les erreurs que l'on commettrait en les observant ainsi, couvriraient entièrement l'effet diurne des mouvements dont nous venons de parler. Aussi, pour régler les horloges, n'observe-t-on que des étoiles dont le mouvement diurne est assez rapide pour que l'on puisse saisir avec précision l'époque instantanée de leur passage derrière chacun des fils de la lunette; et pour ces étoiles, les mouvements dont nous venons de parler n'ont pas d'effet sensible dans l'intervalle d'une seule révolution diurne. Leur influence ne devient applicable qu'en comparant entre elles les époques de deux passages.

très-éloignés. Aujourd'hui que les causes et les lois de ces mouvements sont connues, les astronomes calculent les effets presque insensibles qu'ils doivent produire chaque jour sur la position des étoiles qu'ils observent. Ils peuvent par conséquent connaître la part qu'il faut leur attribuer dans les observations; et, par ce moyen, ils réduisent les phénomènes à ce qu'ils seraient si les astres n'étaient point affectés par ces petits mouvements. Quoique nous ne puissions entrer que plus tard dans l'examen de ces méthodes, j'ai voulu dès à présent les indiquer, afin de pouvoir donner tout de suite, à l'exposition des résultats, sa dernière rigueur; rigueur qu'elle n'a acquise que successivement, par des siècles d'observations et d'approximations réitérées.

On a découvert aussi dans plusieurs étoiles de très-petits mouvements propres, analogues à ceux des planètes. J'indiquerai par la suite les causes les plus probables auxquelles on croit devoir les attribuer. Pour le moment, cette connaissance ne nous est pas nécessaire. Car aucun de ces mouvements n'est sensible sur l'intervalle d'une seule révolution, et il en faut même accumuler un très-grand nombre pour pouvoir en apercevoir l'existence.

Ainsi, en supposant les positions des étoiles corrigées des petites causes de variation que nous venons d'y reconnaître, et dont l'effet sur une seule révolution est presque insensible, nous pouvons regarder les passages consécutifs d'une même étoile comme comprenant des intervalles de temps égaux, ou du moins aussi prochains de l'égalité qu'on peut espérer de le constater par des moyens mécaniques.

265. Cette égalité constante n'a pas lieu pour les astres qui ont des mouvements propres, comme les planètes et les comètes. La durée de leur révolution diurne est plus longue, ou plus courte, que celle des étoiles; plus longue, si leur mouvement propre est dirigé d'occident en orient, en sens contraire du mouvement diurne; plus courte si leur marche est dirigée d'orient en occident. On conçoit, en outre, que ces différences doivent être inégales pour les différents astres, selon la plus ou moins grande rapidité de leur mouvement propre. Mais, quelque petites qu'elles puissent être, des observations suivies pendant quelques jours, en les accumulant,

suffisent pour les faire apercevoir; et c'est ainsi que l'on distingue les astres doués de mouvements propres, d'avec ceux qui n'en ont point, ou qui n'en ont que de très-petits. Car il n'est peut-être pas une étoile au ciel, dans laquelle on ne découvrît quelques mouvements propres presque imperceptibles, par une application longue et suivie de ces procédés. Mais, quoique ces mouvements soient durables, leur excessive lenteur doit les faire distinguer des autres mouvements propres, tels que ceux des planètes et des comètes, qui sont incomparablement plus rapides. Ceux-ci, après deux jours d'observations consécutives, deviennent déjà sensibles : les autres le deviennent à peine après des mois entiers; et les changements qu'ils produisent, *sur deux retours consécutifs* d'une même étoile, ou de deux étoiles quelconques comparées entre elles, ne peuvent être aperçus directement par aucun moyen. C'est ce que prouvent même les observations d'étoiles que nous venons de rapporter.

266. Cette constante égalité de la révolution des étoiles s'observe dans tous les pays et dans tous les temps. En l'adoptant comme tout à fait exacte, et il est naturel de la supposer telle, sans s'arrêter aux petites irrégularités des observations, elle nous offre *l'unité de temps* la plus parfaite que l'on puisse désirer. Car le type de cette unité est commun à toute la terre, il est toujours présent aux observateurs. Enfin, ce qui est son avantage le plus précieux, il est absolument inaltérable; car on est parvenu à prouver, par des considérations théoriques, qu'il n'a subi aucune variation appréciable depuis les plus anciens astronomes jusqu'à nous.

L'unité de temps, exactement définie, sera donc l'intervalle de deux retours consécutifs d'une même étoile au même plan vertical, corrigé de la précession, de l'aberration et de la nutation. Cet intervalle se nomme *un jour sidéral*. On le conçoit partagé en 24 heures sexagésimales, ou en 10 heures décimales, selon que l'on veut adopter l'une ou l'autre de ces divisions : quant aux subdivisions de ces heures, elles sont telles que nous l'avons dit plus haut, § 251, page 307. Les étoiles, dépouillées ainsi, par le calcul, de leurs petits mouvements journaliers, se caractérisent, en astronomie, par la dénomination de *fixes*, comme étant alors ramenées à un état de fixité absolu. Elle leur convient d'autant mieux, que

ces trois genres de déplacements que l'on y corrige ne sont pas des réalités, mais des apparences, comme nous le reconnaîtrons plus tard.

267. L'enchaînement mathématique que l'on est parvenu à établir entre tous les résultats des mouvements celestes a fait voir que le jour sidéral est, par sa nature, un des éléments les plus invariables du système du monde. Pour concevoir comment on a pu réduire ainsi tous ces phénomènes à une *théorie* calculable, il faut savoir que les mouvements des astres sont assujettis à plusieurs grandes lois générales que la comparaison des observations a fait reconnaître, et qui sont susceptibles d'un énoncé mathématique. On les nomme les *lois de Képler*, parce qu'elles ont été découvertes par ce grand astronome. En partant de ces lois, Newton est parvenu à déterminer les expressions des forces mécaniques qui sont nécessaires pour les produire. Il a trouvé qu'il fallait que les corps célestes s'attirassent mutuellement, ou *semblassent s'attirer*, en raison directe de leurs masses, et inverse du carré de leurs distances, pour produire les résultats que Képler avait observés. Cette découverte, la plus belle que l'on ait jamais faite dans les sciences, a permis de calculer à priori tous les mouvements des corps planétaires, comme étant les conséquences d'une loi unique; et les indications du calcul se sont toujours trouvées si exactement conformes aux faits, que l'on a peine à concevoir un accord aussi merveilleux. Alors, on a dû regarder l'*attraction universelle* comme un premier fait plus exact que les observations mêmes, et on s'est attaché à en suivre les conséquences comme devant donner la clef de tous les phénomènes du système du monde. Tel a été l'objet principal vers lequel les plus habiles géomètres, Euler, Lagrange et Laplace, ont dirigé les travaux de toute leur vie. Enfin, Laplace a réuni toutes ces découvertes, et les siennes propres, dans le grand ouvrage qu'il a intitulé *Mécanique céleste*, parce que tous les phénomènes des mouvements célestes y sont déduits du premier fait de l'attraction, d'après les lois de la mécanique. Le même auteur, dans un autre ouvrage intitulé *Exposition du Système du Monde*, a réuni tous les résultats démontrés dans la *Mécanique céleste*, et il s'est attaché à développer leurs rapports sans le secours du calcul littéral, quoique

oujours par des raisonnements mathématiques. Ces deux ouvrages, que l'on pourrait appeler le code des lois du ciel, sont des autorités auxquelles nous devrons sans cesse recourir pour énoncer les résultats astronomiques avec la dernière précision. Car c'est la théorie seule, née de leur ensemble, qui peut les dégager complétement des causes secondaires qui les altèrent, les séparer pour ainsi dire les uns des autres, les montrer isolément, et découvrir par des calculs certains les variations que la suite des temps peut leur faire subir. Toutes ces choses auraient été éternellement inconnues aux hommes, sans la théorie de l'attraction universelle; par conséquent, elle seule peut en démontrer la réalité. Mais, comme on ne saurait s'élever jusqu'à cette hauteur dans un simple livre élémentaire tel que celui-ci, il faut, pour donner une idée exacte et entière des résultats auxquels l'observation nous a conduits, indiquer dès à présent les compléments que la théorie leur donne. Ainsi, nous venons de trouver par l'expérience que la révolution des fixes, ou le jour sidéral, a une durée sensiblement constante. La théorie confirme ce résultat; mais elle va beaucoup plus loin, et elle prouve, comme Laplace l'a fait voir dans la *Mécanique céleste*, que la durée du jour sidéral n'a pas varié d'un centième de seconde depuis Hipparque jusqu'à nous.

268. C'est donc aux révolutions des fixes, comme unité de temps, que nous allons désormais rapporter toutes les horloges astronomiques. Si nous reprenons, sous ce point de vue, les observations de la page 325, nous voyons d'abord que l'horloge a toujours marqué moins de vingt-quatre heures entre deux retours consécutifs de la même étoile, ou dans un jour sidéral. Ainsi, elle *retardait sur le temps sidéral*. Pour avoir la mesure de ces retards, il suffit de prendre la différence des heures qu'elle marquait aux époques de passages consécutifs; car, si elle avait marqué exactement vingt-quatre heures dans un jour sidéral, les passages consécutifs seraient toujours revenus aux mêmes heures. On trouvera ainsi, pour ses *retards diurnes*, les valeurs suivantes :

DATES des observations.		ÉPOQUES des passages de α du Bélier.	DIFFÉRENCE des époques ou retard diurne.	
		h. m. s.	m. s.	
1807. Décembre...	24	9.42.32,36		
	25	9.41.29,70	1.2,66	
	26	9.40.26,72	1.2,98	
	27	9.39.23,92	1.2,82	
	28	9.38.21,38	1.2,52	
	30	9.36.15,74	1.2,82	Moyenne des 3 jours, du 28 au 30.
1808. Janvier.....	2	9.33. 7,68	1.2,87	Moyenne des 3 jours.
	5	9.29.59,06	1.2,87	*Idem.*
	6	9.28.55,88	1.3,18	
	9	9.25.47,66	1.2,74	Moyenne des 3 jours.
Retard moyen....			1.2,72	

Ici, les époques marquées par l'horloge vont en diminuant, parce qu'elle marque moins de vingt-quatre heures entre deux passages. Ce serait le contraire si elle marquait plus de vingt-quatre heures; les époques des passages consécutifs iraient en augmentant. Le signe de ces différences montre donc si l'horloge *retarde* ou *avance* sur le temps sidéral, et leur valeur indique de quelle quantité.

Au reste, ces différences ne sont autre chose que le complément à vingt-quatre heures des intervalles marqués par l'horloge entre deux passages consécutifs.

En prenant la moyenne de toutes les observations précédentes, le retard diurne de l'horloge sur un jour sidéral sera, en secondes sexagésimales, $62^s,72$. Les écarts des résultats particuliers autour de cette moyenne sont si peu considérables, qu'on doit moins les attribuer à l'horloge qu'aux erreurs des observations. Si l'on adopte la division décimale du jour et des heures, le retard, en secondes décimales, sera $\frac{62,72.100000^s}{86400} = 72^s,59$, ou enfin,

en rapportant tout au jour sidéral, pris pour unité de temps,

$$\frac{62,72}{86400} = 0^{j},0007259.$$

269. Les retours consécutifs d'une même étoile au même vertical font ainsi connaître la marche diurne de l'horloge prise en totalité. Les passages successifs des étoiles différentes apprennent ensuite si cette marche est uniforme dans ses diverses parties; car les intervalles de ces passages pour deux étoiles quelconques, mais toujours les mêmes, sont égaux entre eux (*).

Par exemple, si l'on forme les intervalles des passages des différentes étoiles observés les 10 et 11 janvier, à Formentera, on trouvera :

NOMS des étoiles comparées.	INTERVALLES DES PASSAGES le 10.	INTERVALLES DES PASSAGES le 11.	DIFFÉRENCES
	h. m. s.	h. m. s.	s.
α du Bélier et Aldébaran.....	2.28.28,08	2.28.27,81	+ 0,37
Aldébaran et Rigel.....	0.40.26,82	0.40.26,92	— 0,10
Rigel et β du Taureau.....	0. 9.28,28	0. 9.28,26	+ 0,02
β du Taureau et σ d'Orion	0.16.15,10	0.16.15,08	+ 0,02
σ d'Orion et Arcturus.....	8.35.21,32	8.35.19.48	+ 1,84

Les quatre premières différences sont assez petites et assez irrégulières pour qu'on puisse les attribueraux erreurs des observations.

(*) Ceci est une conséquence de l'égalité de la révolution diurne pour toutes les étoiles. Soient H, H' les heures de deux passages consécutifs d'une étoile au même vertical; h, h' les heures de ces passages pour une autre étoile. Si la marche de l'horloge est uniforme, et que son retard diurne sur les étoiles soit R, la première étoile devra donner $H' - H = R$; la seconde $h' - h = R$; par conséquent, $H' - H = h' - h$, ou, en transposant, $H' - h' = H - h$; or, $H - h$, $H' - h'$ sont les intervalles des passages successifs des deux étoiles au même vertical; donc, si le mouvement de la pendule est uniforme, ces intervalles sont égaux.

Ainsi, dans tout cet intervalle de temps, le mouvement de l'horloge a été constamment égal. Mais il n'en est pas ainsi de la dernière différence. Elle indique évidemment une variation survenue dans l'horloge, variation qui l'a fait retarder de $1^s,84$ sur sa marche ordinaire, et qui est arrivée entre les passages de σ d'Orion et d'Arcturus. De plus, ce retard est purement accidentel; car on n'en trouve aucune trace dans les observations précédentes; et on n'en trouve pas davantage dans les observations du 11 qui ont suivi le passage d'Arcturus. Il en résulte donc qu'il faut ajouter $1^s,84$ à tous les temps marqués par l'horloge, depuis cette époque, pour les comparer aux observations antérieures, ce qui rétablira la continuité. En effet, on voit, par l'extrait des observations rapportées plus haut, que l'horloge s'était arrêtée un instant lorsqu'on l'avait remontée après le passage σ d'Orion, ce qui occasionne le retard observé. Mais, quand on n'aurait pas été prévenu de cet accident, on voit qu'on s'en serait aperçu par les observations; et, qu'en montrant son existence, elles donnent avec exactitude la correction qu'il nécessite. Si, par des discussions de ce genre, on étudie soigneusement la marche de l'horloge dans son ensemble et ses diverses parties, il est évident que l'on parviendra à la connaître avec exactitude, et que l'on découvrira infailliblement ses plus petites irrégularités. Quand nous serons plus avancés, nous verrons que l'on peut arriver au même but par des observations qui ne supposent point l'instrument des passages.

270. Lorsque l'horloge dont on fait usage est fort éloignée de suivre le temps sidéral, on peut l'en rapprocher en élevant la lentille, si elle va trop lentement, ou en l'abaissant, si elle va trop vite. En effet, par ce procédé, on rend le pendule régulateur plus court ou plus long. Il y a, pour cela, des vis de rappel dans toutes les horloges astronomiques. Quelques essais suffisent pour amener l'horloge à suivre le temps sidéral, sinon exactement, du moins à très-peu près. Le reste de son retard ou de son avance se corrige ensuite par le calcul. Il ne faut, pour cela, qu'une simple proportion. Soit r son retard diurne exprimé en secondes. Concevons une horloge idéale qui suive exactement le temps sidéral, et qui

parte de $0^h\ 0^m\ 0^s$ en même temps que la réelle. Si l'on veut connaître l'intervalle de temps sidéral qui s'est écoulé lorsque celle-ci a marqué l'intervalle de temps t, exprimé en heures, minutes et secondes sur son cadran, on aura la proportion : $86400^s - r$, mouvement diurne de l'horloge, sont à 86400^s, ou à vingt-quatre heures de temps sidéral, comme t est au nombre cherché, qui sera

$$\frac{86400^s\, t}{86400^s - r}, \text{ ou } t + \frac{tr}{86400 - r};$$

le second terme de cette valeur $\frac{tr}{86400 - r}$ exprime la correction qu'il faut faire à l'intervalle de temps t observé à l'horloge mécanique, pour avoir l'intervalle de temps sidéral qui y correspond. Si l'horloge avance sur les étoiles au lieu de retarder, r devient négatif, et alors la correction $\frac{-tr}{86400 + r}$ devient soustractive de l'intervalle observé. Il est clair que cette correction est toujours exprimée en unités de même ordre que t, puisque $\frac{r}{86400 - r}$ est un nombre abstrait. Ainsi, en réduisant t en secondes, ce sera en secondes que la correction sera exprimée; mais ces secondes seront de temps sidéral.

Si le mouvement de l'horloge était inégal, r ne serait pas le même à différents jours, ou dans les différentes parties d'un même jour; et alors il faudrait employer à chaque fois la valeur qui convient aux époques que l'on considère. Mais, quoiqu'il soit presque impossible qu'une horloge conserve invariablement la même marche, cependant, si elle est bonne, ses variations ne doivent jamais se faire d'une manière brusque et irrégulière; car, si cela avait lieu, il en résulterait toujours, dans les observations, des incertitudes inévitables. En général, il ne faut à l'astronome qu'un petit nombre d'instruments, mais il faut qu'ils soient parfaits.

271. En résumant ce qui a été dit dans ce chapitre, on voit que les révolutions constantes des étoiles nous donnent l'unité de temps, et que leur succession, aussi constante, nous offre les parties de cette unité. Toutes les horloges, rapportées à cette

mesure commune, deviennent comparables entre elles, quelle que soit leur marche; et l'on peut toujours leur substituer, par la pensée ou par le calcul, une horloge idéale, marquant exactement vingt-quatre heures dans un jour sidéral. Cette substitution n'exige que la connaissance du retard diurne r, et sa constance dans l'intervalle de temps que l'on veut considérer. Afin de ne pas interrompre la série des raisonnements, j'en expose ici en note le calcul très-simple, et je la supposerai toujours effectuée, ou possible à effectuer, dans ce qui va suivre (*).

(*) Soient H un intervalle de temps, exprimé en secondes de l'horloge mécanique, et S son expression équivalente en secondes sidérales de l'horloge céleste. Nommons K le facteur numérique par lequel il faut multiplier H pour obtenir S à l'époque considérée, en sorte qu'on ait alors

$$S = KH.$$

On sait, par les observations de passages, qu'à cette même époque, dans toute la période qu'embrasse la transformation proposée, S est 86400, ou, par abréviation, R, lorsque H est $R - r$; et l'on a reconnu, en outre, que r est constant, de quelque portion de la période qu'on le déduise. Cette constance s'appliquera donc aussi au facteur K qui lui est propre, et il devra alors satisfaire à la condition

$$R = K(R - r),$$

ce qui donne pour sa valeur

$$K = \frac{R}{R-r} = 1 + \frac{r}{R-r}.$$

Comme r est ordinairement très-petit relativement à R, la seconde forme est plus commode que la première pour le calcul numérique.

K étant ainsi connu, on obtiendra S par multiplication lorsque H sera donné. Réciproquement, si c'est S qui est donné, et qu'on demande H, on aura

$$H = \frac{1}{K} S = K'S,$$

en faisant

$$K' = \frac{R-r}{R} = 1 - \frac{r}{R}.$$

Lorsque S et H sont de petits nombres relativement à R et à $R - r$, ces multiplications peuvent s'effectuer par logarithmes avec une suffisante exactitude. Mais, s'ils sont dans une proportion un peu forte relativement à ces dénominateurs, ce qui a lieu lorsque S ou H embrassent des heures entières de l'une ou de l'autre horloge, il faut, pour effectuer exactement

2. Jusqu'ici nous n'avons employé la lunette méridienne pour observer des passages d'étoiles. En effet, aucun autre ent ne nous était nécessaire pour déterminer la durée du jour al, et la mesure du temps. La lunette méridienne sert égale- pour observer les passages de tous les astres; mais la plu- d'entre eux offrant un disque d'une étendue sensible, on ne pas apprécier le passage de leur centre, derrière chacun des a micromètre, ainsi qu'on le fait pour les étoiles, qui ne pa- nt que comme des points. Pour éluder cet inconvénient, on

---

version sans des calculs trop pénibles, en évaluer directement les s principales d'après un tableau d'équivalents subsidiaires, qui se pour ainsi dire à vue, et calculer seulement le reste de la réduction le des logarithmes. Par exemple, si S est donné et qu'il contienne rtain nombre d'heures entières, plus des minutes, des secondes et des ons de secondes, et que l'on veuille trouver H, ce tableau se formera ux colonnes comme il suit :

Valeurs de S.	Réduction à H.
24^h	$-r$
12	$-\frac{1}{2}r$
6	$-\frac{1}{4}r$
1	$-\frac{1}{24}r$
30^m	$-\frac{1}{48}r$
15	$-\frac{1}{96}r$

a correspondance de ces deux colonnes, que l'on pourrait pousser plus ans aucune peine, on ôtera de S les heures entières et les sous-mul- d'heures, auxquels on appliquera immédiatement les réductions s calculées que la seconde colonne exprime. Leur conversion se trou- ainsi effectuée. Alors on réduira le reste de S en secondes, et l'on era sa conversion par logarithmes, en le multipliant par le fac- K'.

H est donné, et que l'on veuille trouver S, il faudra, pour former un au analogue, calculer d'abord la valeur de S quand H = R. Ce sera mment KR, K étant le facteur de conversion de H en S, que nous avons

observe le passage du premier bord du disque, lorsqu'il vient toucher chaque fil, et le passage du second bord lorsqu'il quitte ce même fil. Le milieu arithmétique entre ces deux instants est évidemment le passage du centre. De cette manière l'opération devient la même que si l'on observait une étoile. On répète les deux observations pour les cinq fils du réticule; et, en les supposant espacés à égales distances, la moyenne arithmétique, entre toutes les époques, donne également le passage du centre de l'astre au fil du

---

vu être $1 + \frac{r}{R - r}$. Alors, pour faciliter ce calcul, il faudra le décomposer comme il suit :

$$KR = R + \frac{Rr}{R - r} = R + r + \frac{r^2}{R - r}.$$

Les deux premiers termes s'obtiendront par une simple addition, et le troisième pourra se calculer très-exactement par les logarithmes. Alors, en représentant par r' la somme des deux termes correctifs qui s'ajoutent à R, le tableau subsidiaire se formera comme il suit :

Valeurs de H.	Réduction à S.
24^h	$+ r'$
12	$+ \frac{1}{2} r'$
6	$+ \frac{1}{4} r'$
1	$+ \frac{1}{24} r'$
30^m	$+ \frac{1}{48} r'$
15	$+ \frac{1}{96} r'$

Par la correspondance des deux colonnes, on ôtera de H toutes ses parties principales, que l'on transformera directement en S, en leur appliquant les réductions exprimées pour chacune d'elles dans la seconde colonne. Puis on réduira le reste en secondes, et on achèvera sa conversion par logarithmes, en le multipliant par le facteur K.

Chacun de ces deux tableaux, une fois formé, servira pour toute la période de temps pendant laquelle r aura conservé une même valeur; et, par leur secours, on effectuera avec autant d'exactitude que de facilité toutes les conversions de S en H, ou de H en S, dont on pourrait avoir besoin.

milieu. Si c'est le soleil que l'on observe, il y a encore une précaution à prendre ; c'est de placer devant l'oculaire un verre noirci, pour affaiblir l'intensité de sa lumière qui, condensée par la lunette, aveuglerait infailliblement l'observateur. Cette précaution est également indispensable toutes les fois que l'on doit regarder le soleil avec des instruments optiques. Ordinairement le verre noirci est monté de manière à pouvoir s'adapter au tube de la lunette, devant l'oculaire, ce qui évite la peine de le tenir à la main. Il en résulte plus de facilité dans les observations, et c'est un avantage qui n'est jamais à négliger, car il influe sur la bonté des observations mêmes.

Enfin, lorsqu'on observe de nuit, il devient nécessaire d'éclairer les fils du micromètre. Car la faible lumière des étoiles dont on observe le passage, ne suffirait pas pour les faire distinguer assez nettement. J'ai exposé dans le ch. IX, page 280, comment on effectue cette illumination, et quels procédés on emploie pour la modérer convenablement, au gré de l'observateur, selon le degré d'éclat actuel de l'astre observé.

CHAPITRE XIII.

Détermination exacte du méridien par la mesure du temps. Définition exacte de la méridienne de la perpendiculaire et des azimuts.

273. L'instrument des passages étant placé dans un plan vertical, comme nous avons enseigné à le faire dans le chapitre IX, pages 262 et suivantes, et l'horloge étant bien réglée sur le temps sidéral, si l'on observe les deux passages supérieurs et inférieurs d'une même étoile, de celles qui ne se couchent point, on trouvera presque infailliblement une différence de temps entre les intervalles de ces passages; c'est-à-dire que l'un sera plus long qu'une demi-révolution du ciel, ou douze heures sidérales, et l'autre moindre que douze heures, de la même quantité. Cependant, si l'on n'a pas placé l'instrument au hasard, dans un vertical quelconque, mais si l'on a suivi exactement le procédé que nous avons décrit, p. 320, la différence des deux passages ne pourra pas être bien considérable, et elle s'élèvera tout au plus à quelques minutes de temps. Mais il est facile de la rendre moindre, en déplaçant tant soit peu les supports de l'axe, de manière à tourner la lunette d'une petite quantité vers l'orient ou vers l'occident, dans le sens nécessaire pour rétablir l'égalité. Ce déplacement des supports ne se fait pas avec la main, mais avec une vis munie d'un cadran divisé, et d'un index qui indique, sur ce cadran, les plus petits mouvements que l'on donne à la vis. Comme, au moyen de cet appareil, on sait à chaque fois dans quel sens et de quelle quantité on a fait marcher les supports, il suffit d'un petit nombre d'essais pour amener la lunette dans la position désirée. Nous supposons que l'on a soin de maintenir toujours l'axe horizontal, ce qui se fait au moyen d'une autre vis de rappel, qui soulève ou abaisse un des supports de l'axe, jusqu'à ce que le niveau d'épreuve indique sa parfaite horizontalité. Toutes ces conditions étant remplies, la lunette de l'instrument, ou, pour parler exactement, le centre des fils du

micromètre se trouvera placé dans un plan vertical, qui aura la propriété de diviser la révolution de l'étoile observée en deux parties, correspondantes à des intervalles de temps parfaitement égaux.

Or, on trouve, de plus, que cette bissection, ainsi déterminée par une seule étoile, a lieu également pour toutes celles dont on peut observer les deux passages opposés; de sorte que les intervalles de ces passages au centre des fils sont aussi de douze heures, comme pour la première. Ce résultat se vérifie dans quelque lieu de la terre que l'on soit placé. Par conséquent, si l'on suppose que le mouvement de révolution des étoiles soit uniforme et circulaire, supposition exactement conforme aux phénomènes, comme on le verra plus bas, le plan vertical, déterminé par ces procédés, contiendra l'axe de rotation du ciel; car c'est seulement autour d'un plan mené par cet axe, que l'égalité des passages peut avoir lieu.

Ce plan est le *méridien*. Nous l'avions déjà déterminé, par des procédés approximatifs, dans le chapitre IV du tome Ier. Mais il se trouve ici fixé, avec toute la précision désirable par la mesure du temps (*).

(*) Je me borne ici à indiquer cette méthode, parce qu'elle est très-simple, très-exacte aussi, lorsque la marche de l'horloge est bien connue par des observations de passages faites antérieurement dans le vertical voisin du méridien, où l'on avait d'abord fixé l'axe optique, et enfin parce qu'elle n'exige aucune notion astronomique anticipée. Mais, lorsqu'on a établi les lois du mouvement diurne, et qu'on peut logiquement les mettre en usage, l'observation des passages successifs de différentes étoiles, inégalement distantes du pôle visible, fournit des procédés plus expéditifs, parce que les différentes époques de ces passages varient avec l'azimut du vertical dans lequel on les observe; et, de là, on peut conclure très-exactement la valeur angulaire de ces azimuts par des observations qui, ne durant que quelques instants, peuvent être réitérées aussi fréquemment qu'on le juge nécessaire. Quand le vertical de passage a été amené ainsi excessivement près du méridien, et que sa déviation azimutale est devenue si petite qu'on puisse difficilement espérer de la corriger par des mouvements mécaniques, on détermine sa valeur par le système d'observations que je viens d'indiquer, et on en tient compte par le calcul, dans les résultats ultérieurs donnés par l'instrument. Si cette déviation vient à éprouver ensuite quelque changement par l'effet de toutes les causes physiques auxquelles un instru-

274. Cette propriété de diviser la révolution des étoiles en deux parties d'égale durée ne peut être vérifiée immédiatement que pour les étoiles qui ne se couchent jamais. Pour les autres, en supposant le plan du méridien indéfiniment étendu, leur passage inférieur se fait par-dessous la terre, et l'interposition de sa masse nous empêche de l'observer. Mais, en suivant leur marche sur l'horizon, dans toute l'étendue de l'arc qu'elles décrivent, on y reconnaît, de part et d'autre du méridien, une symétrie, une correspondance qui montre évidemment que le second passage, que nous ne pouvons point voir, a lieu, comme pour les étoiles toujours visibles, après une demi-révolution.

Une preuve très-simple et très-exacte de cette symétrie, c'est que l'époque du passage d'une étoile au *méridien supérieur*, étant observée à la pendule, est exactement intermédiaire entre les époques où la même étoile atteint sur l'horizon des hauteurs égales, de part et d'autre de ce plan. Cela est vrai pour toutes les hauteurs, même pour celles qui sont nulles, et qui répondent au lever et au coucher de l'astre. Les instants de ces phénomènes sont également éloignés du passage au méridien supérieur. Tout nous porte à croire que la même correspondance se conserverait encore sous l'horizon, si nous pouvions y suivre les astres; de sorte qu'ils arriveraient à leur plus grande hauteur *au-dessous* de

---

ment matériel est toujours soumis, on s'en aperçoit aussitôt par ce même genre d'observations, ou en ramenant la lunette sur la mire fixe; et, si l'écart est devenu trop manifeste, on le corrige, ou, s'il est de l'ordre des erreurs que les rappels mécaniques comportent, on se borne à l'évaluer par le calcul. Car je ne saurais trop répéter que le dernier terme de la précision peut être seulement obtenu par des corrections abstraites, et jamais manuellement. Par le même motif, lorsque l'axe de rotation est amené excessivement près de l'horizontalité, et qu'il se maintient stable dans cet état, il faut bien se garder de le retoucher sans cesse, et il est infiniment plus sûr de tenir compte de son inclinaison par le calcul que d'essayer de la rendre nulle physiquement. Les formules qui expriment ces rectifications définitives seront exposées à la fin du présent ouvrage. Je les ai réunies dans un ensemble qui comprendra le calcul exact de tous les petits mouvements que peut éprouver un instrument de passages, et qui en montrera l'application pratique, soit dans les observatoires fixes, soit dans les voyages géodésiques, où cet instrument est temporairement employé.

e plan, c'est-à-dire au *méridien inférieur*, après une demi-révo-ıtion. En effet, la chose devient tout à fait certaine, si l'on onsidère que tous les lieux répartis sur le contour de la terre bservant la même symétrie, un astronome situé sur le méri-ien inférieur, de l'autre côté de la terre, l'observerait également.

275. Ces propriétés n'ont lieu que pour les astres fixes, dont s hauteurs sur l'horizon redeviennent exactement les mêmes à haque révolution du ciel. Si ces hauteurs varient, la symétrie est étruite, ou du moins elle n'existe plus que d'une manière appro-hée, en faisant abstraction du mouvement propre de l'astre, 'est-à-dire en négligeant de tenir compte des effets de ce mou-ement dans l'intervalle des observations comparées. Tel est le as du soleil, dont les hauteurs nous ont servi dans les cha-itres IV et V du tome Ier, pages 40 et 49, pour déterminer à peu rès la direction du plan du méridien, soit par la bissection des oints de l'horizon où cet astre se lève ou se couche, soit par l'é-alité des lignes d'ombre observées au gnomon.

276. La correspondance dont nous venons de parler ne se érifie pas toujours avec la dernière rigueur, même pour les toiles, à cause des variations accidentelles de la réfraction qui, enant à changer, entre les intervalles des observations correspon-antes, peut altérer inégalement les hauteurs. Alors le milieu ntre les époques des deux passages peut différer de quelques se-ondes de temps, du passage que l'on aurait observé dans le plan du méridien. Mais ces effets sont presque insensibles dans un temps alme où la température et la pression de l'atmosphère restent à eu près constantes; et, enfin, on les fait rigoureusement dispa-aître par le calcul, en corrigeant les hauteurs observées de la éfraction absolue qui les altère, et dont nous avons précédem-nent exposé les lois.

277. Pour faire ces observations de *hauteurs correspondantes* ui étaient surtout en usage autrefois, lorsqu'on n'avait pas encore l'instruments de passages, on se servait d'un instrument appelé *uart de cercle*, parce que c'était en effet un quart de cercle en uivre, dont le *limbe* était divisé en degrés, minutes et secondes. e plus complet, et probablement aussi le plus parfait que l'on

ait jamais exécuté, est représenté *fig.* 74. Il avait été construit par Ramsden pour l'observatoire de *Christ college*, à Cambridge. La colonne métallique qui le supporte, et qui renferme l'axe de son mouvement de rotation azimutal, peut être rendue verticale, ainsi que cet axe lui-même, par les mouvements des vis de calage adaptées aux extrémités de trois bras métalliques, fixés à sa base, perpendiculairement à sa longueur. Cette opération s'effectue d'après les indications d'un fil-à-plomb, qui, dans le cas de verticalité, doit toujours s'aligner sur deux repères fixes, tracés dans le plan du limbe, et qui sert aussi pour disposer ce limbe verticalement. Le mouvement du limbe, dans son propre plan, est réglé en outre par un niveau de suspension susceptible de retourne, lequel s'applique à un axe métallique HH, qui doit être rendu horizontal, et maintenu tel pendant les observations. Il faut aussi que l'axe optique de la lunette soit rendu parallèle au plan du limbe, et que l'on connaisse le point précis, mais invisible, auquel il rencontre la division circulaire sur laquelle le vernier de l'oculaire marche. Mais je supprime ici ces détails de rectifications qui ne nous sont pas momentanément nécessaires, et que j'aurai occasion d'expliquer plus généralement ailleurs; et, les supposant ici effectués, je réduis l'instrument à son type abstrait dans la *fig.* 75. Alors le fil-à-plomb CM, que je conçois suspendu au centre C des divisions, représentera la verticale du lieu, à partir de laquelle on mesure les distances zénithales; et la droite CO sera l'axe optique physique, supposé idéalement passer par ce centre (*). Pour observer, on dirige la lunette vers l'astre; on note exactement l'instant de son passage au centre des fils; et l'arc OP, lu sur le limbe, fait connaître l'angle SCZ, c'est-à-dire la distance de l'astre au zénith, ou le complément de sa hauteur. Après avoir fait cette observation d'un côté du méridien, on dirige l'instrument de l'autre côté, en

(*) Si l'on voulait connaître, comme objet d'étude plutôt que de pratique, le détail des rectifications que je ne fais ici qu'indiquer, on les trouvera exposées complétement, pour cet instrument même, au chap. V de l'ouvrage de Vince intitulé *A Treatise on Practical Astronomy*, Cambridge, in-4°, 1790. C'est de là que j'ai tiré la *fig.* 74.

e faisant tourner sur son pied, autour de la verticale, sans tou-
:her la lunette, en ayant toujours soin que le fil à-plomb réponde
ıu même point du limbe. Alors on attend que l'astre revienne à
a même hauteur. On observe son passage au centre des fils, comme
a première fois; et, prenant une moyenne arithmétique entre les
leux époques, on a l'instant du passage de l'astre au plan du méri-
lien, tel qu'on l'aurait observé directement. Ce résultat peut se
onstater par l'identité de toutes les époques moyennes ainsi obte-
ıues, comme aussi par leur accord avec l'instant où chaque étoile
raverse le fil central d'un instrument de passages, dont l'axe optique
urait été amené exactement dans le méridien, par la bissection des
évolutions des étoiles circompolaires. Mais, comme je l'ai an-
ıoncé, l'époque ainsi déterminée exige, en général, une correc-
ion, dépendante des changements que la réfraction éprouve. Si
'astre observé a un mouvement propre, elle exige encore une
ıutre correction, dépendante des variations de sa hauteur. C'est ce
ıue l'on nomme l'*équation des hauteurs correspondantes*. Quoi-
ıu'on ait maintenant très-peu d'occasions de l'appliquer, je l'ex-
ıoserai à la fin du présent volume, dans la note I. Il est à peine
ıécessaire d'ajouter qu'elle est fondée sur les lois du mouvement
liurne, et qu'elle les suppose connues.

278. Si l'astre observé est le soleil, il faut une précaution de
ılus. Comme on ne peut pas apprécier le centre de son disque, on
ıbserve l'un de ses bords, le supérieur ou l'inférieur. Seulement,
ıour que la correspondance des hauteurs soit exacte, il faut que
es observations soient faites sur des bords de même dénomina-
:ion. Par exemple, si, le matin, on a observé l'époque à laquelle le
ıord supérieur est venu, en s'élevant, toucher le fil horizontal,
ın doit le soir observer l'époque où le bord supérieur quitte ce
nême fil, en descendant.

279. Nous n'avons supposé qu'une seule couple d'observa-
ions. On peut en faire plusieurs en détachant la lunette et la por-
ant successivement sur divers points du limbe, pour pouvoir
ıbserver l'astre à des hauteurs différentes, puis la replaçant en-
ıuite sur les mêmes points pour les observations correspondantes,
l'après la lecture de la division. Chaque couple d'observations, si

l'on a bien opéré, donne le même instant du passage au méridien. La moyenne arithmétique, prise entre tous les couples, la donnera plus exactement, par le principe des compensations, parce qu'une partie des erreurs des observations doit très-probablement s'entre-détruire. Si l'astre observé a un mouvement propre, comme le soleil, on applique à cette moyenne la correction dépendante de ce mouvement pendant l'intervalle des observations. Les hauteurs correspondantes observées de cette manière sont d'autant plus grandes, qu'elles sont prises plus près du plan du méridien : la hauteur méridienne est donc la plus grande de toutes. Elles croissent jusqu'à ce terme, et ensuite diminuent. Dans le passage d'un de ces états à l'autre, elles n'éprouvent ni accroissement ni diminution sensible. La direction du mouvement de l'astre doit donc alors paraître parallèle à l'horizon. C'est ce que l'on observe en effet dans la lunette de l'instrument des passages, car les astres, en la traversant, suivent le fil horizontal du micromètre qui y est placé. Au fil-à-plomb du quart de cercle, on a d'abord substitué le niveau qui est beaucoup plus sensible, et qui indique, par conséquent, bien mieux les petits changements d'inclinaison. Enfin, on est parvenu à se passer de la correspondance des hauteurs, et à conclure le passage au méridien, d'après des *hauteurs absolues* observées d'un seul côté de ce plan, au moyen de l'instrument que l'on nomme un *cercle répétiteur*, et que je décrirai ultérieurement avec les plus grands détails, à cause de la multiplicité, ainsi que de la facilité des usages auxquels il est propre, particulièrement dans les voyages géodésiques. Cette dernière méthode peut même être rendue au moins aussi précise que les observations immédiates faites avec l'instrument des passages. Mais elle suppose des réductions fondées sur la connaissance des lois du mouvement diurne, et nous en parlerons plus loin. Si j'ai indiqué ici la méthode des hauteurs correspondantes, c'est parce qu'elle prouve très-simplement que le plan du méridien partage la révolution diurne de toutes les étoiles en deux portions symétriques en durée. D'ailleurs, on peut l'employer utilement dans les voyages, pour trouver l'instant du passage d'un astre au méridien, lorsqu'on est dépourvu de lunette méridienne et d'instruments pro-

s à mesurer des hauteurs absolues avec une grande précision, qui, au reste, constitue une réunion de circonstances défavoles, auxquelles les observateurs ne doivent plus aujourd'hui ıposer.

180. Le plan du méridien étant rigoureusement déterminé, par nesure du temps, comme nous venons de le dire, on place à orizon, et à une grande distance, une mire que l'on amène, par essais, à répondre au centre des fils de l'instrument des passes, comme je l'ai expliqué page 277. Alors il suffit de diriger lunette sur cette mire, pour savoir si elle a éprouvé quelque angement, et il est bon de répéter fréquemment cette vérition. Il est également utile de placer ainsi deux mires dans les ections opposées, où l'on peut amener la lunette par la rotation. l'on perce ces mires au centre, et qu'on place derrière elles un erbère dont la lumière passe par cette ouverture, on pourra ifier la direction de la lunette, même de nuit, ce qui est imrtant pour la sûreté des observations (*).

181. Cette direction, prolongée dans le plan de l'horizon, est vraie *ligne méridienne*, ou simplement la *méridienne* du point la surface terrestre où l'instrument est placé. Prolongée indéiment, elle détermine dans le ciel deux points opposés, qui ıt le vrai *nord* et le vrai *sud*. Ce dernier s'appelle encore le *dl*.

182. Si, par le centre de l'instrument, on conçoit une ligne droite rizontale qui passe par son axe de rotation, perpendiculairement a méridienne, cette ligne se nomme la *perpendiculaire*. Proıgée indéfiniment sur le plan de l'horizon, elle déterminera ssi dans le ciel deux points opposés, qui sont les vrais points orient et d'occident, ou l'*est* et l'*ouest*. On désigne encore l'est, uest, le nord et le sud sous la dénomination commune de *points*

(*) On voit à Paris deux mires ainsi disposées qui répondent à la méri-nne de l'Observatoire. L'une est placée au nord, sur la façade du palais Luxembourg; l'autre est au sud, sur une pyramide élevée dans la plaine Montrouge, sur la route d'Arcueil. On peut obtenir les mêmes vérifications r les seules observations astronomiques, au moyen de la méthode indiquée ns la note de la page 341.

cardinaux. Nous avions déjà déterminé approximativement les directions de ces quatre points dans le chap. IV du tome Ier, en nous servant des premiers procédés d'observations qui les font connaître, et qui ont été pendant bien des siècles les seuls que les astronomes sussent employer. Maintenant que la combinaison des horloges à pendule, avec les instruments à lunettes, donne à ces déterminations une exactitude définitive, il ne sera pas inutile de rappeler l'usage qu'on en fait pour définir avec une complète rigueur les directions abstraites des rayons visuels qui, partant d'un même centre d'observations, vont aboutir, comme autant de lignes mathématiques, aux divers points du ciel.

233. La méridienne, la perpendiculaire et la verticale forment, dans chaque lieu de la surface terrestre, trois axes rectangulaires, auxquels on peut rapporter tous les points de l'espace. Mais, comme les observations des astres se font toujours par des angles, on a adopté, en astronomie, les coordonnées angulaires, de préférence aux coordonnées rectilignes. La direction d'un rayon visuel mené à un objet se détermine par sa *distance au zénith*, et par l'angle que la projection du rayon visuel sur l'horizon forme avec la ligne méridienne. Cet angle se nomme l'*azimut* de l'objet. On le compte, à volonté, depuis le point nord de la méridienne ou depuis le point sud, et d'occident en orient, ou d'orient en occident. On appelle aussi azimut d'un vertical l'angle dièdre formé par ce vertical avec le plan du méridien. Il est visible, en effet, que cet angle est égal à celui que les traces horizontales du méridien et du vertical forment entre elles, puisque ces traces sont toutes deux perpendiculaires à la verticale, commune intersection des deux plans. Nous avions déjà établi ces définitions dans le tome Ier, mais maintenant nous pouvons en rectifier rigoureusement les applications.

234. Quand on connaît les lois du mouvement diurne, on peut, par un calcul très-simple, trouver l'azimut d'un astre, d'après la seule observation de sa hauteur, et du temps qui s'écoule entre son passage au méridien et son arrivée au vertical où on l'observe. On peut aussi mesurer directement les azimuts au moyen d'un cercle horizontal et gradué, sur lequel on détermine la direction

la méridienne. Un second cercle aussi gradué et muni d'une ette à micromètre, est perpendiculaire sur le premier, et peut rner autour de la verticale qui passe par son centre. Ce second le représente les plans verticaux. Lorsqu'on veut observer, on lirige dans le vertical de l'astre; on amène celui-ci dans le np de la lunette et on le place au centre des fils. Alors la divi- du cercle vertical donne la *hauteur de l'astre* sur l'horizon, ou istance au zénith, qui est le complément de cette hauteur. La sion marquée sur le cercle horizontal ou *azimutal,* donne la ction de la trace horizontale du vertical de l'astre, ou son azi-, au moment de l'observation. Cela suppose que l'on a préa- ement déterminé le point du limbe qui répond à la direction a méridienne. On y parvient par des hauteurs correspondantes, en se dirigeant sur une mire méridienne très-éloignée, placée ablement à l'aide de l'instrument des passages. L'instrument nous venons de décrire se nomme un *cercle entier.* C'est la isation matérielle du type abstrait dont nous avons présenté la ception dans le tome Ier, page 44, et que nous avions exprimé lement par la *fig.* 18 de la *Pl.* II. Maintenant, cette con- tion devient pour nous une réalité, dont tous les détails sont plétement exécutables, par la réunion des procédés optiques, siques et mécaniques, que nous avons exposés. Un pareil rument, exécuté par Ramsden, avec une recherche de préci- infinie, existe dans l'observatoire de Palerme, où il a servi immortels travaux de Piazzi. On le voit ici représenté *fig.* 76, XVI, avec ses deux limbes divisés, l'un horizontal, l'autre ver- l; sa lunette à réticule, fixée sur celui-ci, qui est mobile dans son pre plan; ses microscopes; son fil-à-plomb, assujetti à passer au ant d'index microscopiques; les niveaux qui décèlent les moin- s mouvements de ses diverses parties. Toutes ces pièces sont mu- s de rappels qui servent pour donner aux deux limbes leurs posi- ns propres, pour rendre l'axe optique de la lunette parallèle plan du limbe qui la conduit, et pour mettre, en un mot, tout strument dans les conditions que sa définition abstraite sup- e. Je ne détaille point ici ces diverses rectifications, sur quel- s-unes desquelles j'aurai l'occasion de revenir plus particuliè-

rement. Il me suffira de dire que toutes sont des applications, des procédés généraux que j'ai décrits dans le chapitre IX pour opérer la verticalité, ou l'horizontalité, des plans abstraits ou des droites abstraites, par des expériences faites sur les cercles ou sur les axes matériels, qui doivent donner aux rayons visuels coïncidents avec l'axe optique physique de la lunette, les sens de mouvements ou de directions déterminés par ces abstractions (*).

285. Un tel instrument étant supposé fixement établi, et disposé avec toutes les rectifications que sa conception idéale suppose, si on le dirige sur une étoile quelconque, à des époques différentes, mais également éloignées de l'instant de son passage au méridien, on trouve, comme nous l'avons dit précédemment, que les hauteurs de cette étoile sont égales; on trouve de plus que ses azimuts sont égaux.

Si l'on fait cette observation sur une étoile qui ne se couche point, on trouve que son plus grand écart, de part et d'autre du méridien, répond aussi à des azimuts égaux. Seulement ces azimuts varient d'une étoile à l'autre.

Cette correspondance parfaite, qui s'observe entre les phénomènes du mouvement diurne, de part et d'autre du méridien, indique avec évidence que l'axe de rotation du ciel est situé dans ce plan. Cherchons donc à y découvrir, à y déterminer sa position.

(*) Tous les procédés de rectifications que je n'ai fait ici qu'indiquer ont été exposés par Piazzi au commencement de son admirable ouvrage intitulé : *Della specula astronomica di Reggi studi di Palermo*. On ne pourrait en comprendre les détails qu'en les suivant pas à pas sur les figures rapportées dans cet ouvrage même; et sa lecture est une des études les plus fructueuses que puisse se proposer un astronome observateur.

CHAPITRE XIV.

Direction de l'axe de rotation du ciel. Description et usage des instruments propres à mesurer les distances zénithales des astres, au moment de leur passage dans le plan du méridien. Détermination de la hauteur du pôle. La Terre est comme un point dans les espaces célestes.

286. S'il existait une étoile qui fût placée précisément sur l'axe de rotation du ciel, elle paraîtrait constamment immobile dans le plan du méridien. On ne voit aucune étoile qui satisfasse exactement à cette condition; mais en regardant vers le nord, on en découvre une, assez brillante, dont le mouvement est si lent et les changements de position si peu considérables, qu'on ne peut guère les apercevoir qu'avec le secours des instruments. Cette étoile est donc peu éloignée de l'axe de rotation. On la nomme l'*étoile polaire*.

Elle est facile à reconnaître par sa proximité d'un groupe d'étoiles très-remarquable que l'on nomme la *grande Ourse* ou le *Chariot*. Il est composé de sept étoiles très-brillantes, *fig.* 77, dont quatre sont disposées à peu près en carré, tandis que les trois autres forment, par leur allongement, une sorte de *queue* ou de *timon*. Si, par les deux étoiles du carré les plus éloignées de la queue, on conçoit une ligne droite, ou plutôt un plan visuel mené par l'œil de l'observateur, ce plan passera très-près de l'étoile polaire qui est désignée par *P* dans la figure.

Celle-ci elle-même termine un autre groupe composé de sept étoiles comme la grande Ourse et absolument semblable, si ce n'est qu'il est placé dans une situation contraire. On le nomme la *petite Ourse*; et l'étoile polaire est la plus brillante de celles qui le composent. Parmi les divers groupes d'étoiles que l'on remarque dans le ciel et que l'on a classés sous le nom de *constellations*, il n'y en

a aucun qui présente les mêmes figures que les deux précédentes; et il est très-aisé de les reconnaître la nuit, dans les régions situées au nord de l'équateur, en regardant le ciel, par un temps serein.

237. C'est donc principalement vers ces étoiles, qui ne se couchent jamais, du moins dans nos climats, qu'il faut diriger nos recherches; car la lenteur de leur marche et la petitesse des cercles qu'elles décrivent, indiquent assez qu'elles sont les moins éloignées de l'axe de rotation. Mais, comme les observations de leurs passages, dans le plan du méridien, nous ont déjà appris la symétrie de leur marche, de part et d'autre de ce plan, c'est dans ce plan même qu'il faut les étudier, en observant à quelles hauteurs elles s'y élèvent et s'y abaissent. Il nous devient donc nécessaire d'avoir des instruments propres à mesurer les distances méridiennes des astres au zénith, avec cette précision définitive que nous nous proposons maintenant d'atteindre.

238. Les appareils qui servent à cet usage sont de deux sortes: les uns, qu'on ne peut employer que dans des observatoires fixes, s'appellent des *muraux*, parce que le plan de leur limbe est maintenu fixe et vertical dans le méridien, par sa connexion avec une muraille massive qui lui est parallèle, et dans laquelle sont enchâssés les supports de leur axe de rotation horizontal. On les distingue en *cercles entiers* et *quarts de cercle* muraux, selon que leur limbe embrasse la totalité, ou seulement un quart de la circonférence; les *fig.* 66 et 67 du tome Ier offrent le type général de ces cercles. La *fig.* 78 du volume actuel donnera une idée suffisante d'un ancien quart de cercle mural construit par Bird, et qui a été longtemps employé à l'Observatoire de Paris.

Ces instruments, par leur disposition même, ne sont pas susceptibles de *retourne;* c'est-à-dire qu'on ne peut pas faire tourner le plan de leur limbe autour de la verticale, pour y réitérer l'observation du même astre en dirigeant ce plan dans le même azimut, avec ses faces successivement tournées vers les points opposés de l'horizon. Cela y rend inapplicables plusieurs procédés de rectification très-sûrs, auxquels il faut suppléer par d'autres d'une application moins certaine ou plus difficile. C'est un avantage qu'ont sur eux les instruments qui peuvent mesurer des distances zénithales,

ans des azimuts quelconques, et dont le plan ne s'y fixe que pendant l'observation, par sa connexion temporaire avec un cercle azimutal fixe et gradué.

Tel est d'abord le grand instrument de Palerme dont j'ai déjà donné l'idée générale, et qui est représenté *fig.* 76. Tels sont aussi les *cercles répétiteurs*, représentés ici, dans leur application astronomique, *fig.* 79 et 80. Sans anticiper sur l'analyse détaillée que je devrai faire de leur disposition et de leurs usages, on voit que ce sont aussi des réalisations du type universel que nous avions idéalement conçu et représenté dans le tome Ier, *fig.* 18. Ils ne diffèrent du cercle de Palerme que par la petitesse relative de leurs dimensions, qui les rend applicables dans les voyages scientifiques, comme dans les observatoires permanents. On pourrait encore mentionner dans la même classe les instruments appelés *théodolites*, dont le type le plus simple est représenté *fig.* 81. Mais, comme ils ne sont qu'une modification du cercle répétiteur, spécialement appropriée à quelques besoins de la géodésie, je les comprendrai ultérieurement dans la même exposition.

289. Revenant donc aux instruments muraux, je considère d'abord le quart de cercle, *fig.* 78, comme offrant la construction la moins complexe, et aussi comme ayant été pendant longtemps le seul instrument fixe que l'on possédât dans les observatoires les plus célèbres; de sorte qu'un nombre considérable d'observations précieuses par leur exactitude, et parce qu'elles sont déjà anciennes relativement à notre époque, ont été faites avec son secours. La première condition de sa pose, c'est que le plan de son limbe divisé soit établi dans une situation exactement verticale. On commence par le placer à très-peu près dans cette position; et, lorsqu'il est ajusté ainsi par de fortes vis d'attache aux pièces métalliques scellées dans la muraille, qui sont destinées à le maintenir, des mouvements de rappel adaptés à ces pièces, permettent de faire varier l'inclinaison, ainsi que la direction de son plan dans une petite amplitude de course, ce dont on profite d'abord pour le rendre tout à fait vertical, en l'alignant sur un fil-à-plomb par des procédés analogues à ceux que j'ai décrits; après quoi ces mêmes rappels servent aussi à faire varier quelque peu sa direction pour l'amener

exactement dans le méridien, où il n'a pu être placé qu'approximativement par les premières opérations mécaniques du posage. Je reviendrai tout à l'heure sur ce second genre de rectification; mais j'annoncerai par avance, qu'une petite erreur sur la verticalité du plan ne pourrait avoir d'influence sensible que sur les distances des étoiles très-voisines du zénith, comme je le démontrerai en traitant du cercle répétiteur. Aussi, pour observer des étoiles ainsi placées, on n'emploie presque jamais, ou du moins on ne devrait jamais employer que le secteur zénithal, dont le limbe, toujours restreint à quelques degrés d'étendue, peut être amené à une verticalité bien plus rigoureuse dans ces étroites limites, à cause de la longueur du fil-à-plomb qui pend de son centre de rotation jusqu'à l'arc où la division est tracée, et dont l'application rigoureuse se vérifie encore par le retournement du limbe autour de la verticale regulatrice. La verticalité du quart de cercle mural étant ainsi réglée suffisamment pour ses usages, il faut considérer sa division. Étant destinée à donner des distances zénithales, son point inférieur, marqué o, doit être rigoureusement dans une même verticale avec son centre C. Pour cet effet, l'artiste a préalablement fixé, avec un soin extrême, deux points C′, A′, qu'il marque sur la bande métallique terminale dirigée vers le zénith, et qui doivent être tels que la droite C′A′ soit rigoureusement parallèle au rayon CA, mené du centre au zéro de la division; et l'on suspend au-dessus de C′ un fil-à-plomb très-fin qui, assujetti à passer toujours par ce point, doit toujours venir battre sur le point inférieur A′ finement tracé. La division du limbe s'élève depuis o jusqu'au quart de la circonférence, suivant tel mode de graduation que l'artiste a jugé le plus favorable pour en assurer la justesse; et le tracé est habituellement étendu un peu au delà d'un quadrans, dans sa partie inférieure, pour un but qui sera tout à l'heure expliqué. L'alidade qui porte la lunette ayant le point C pour centre de rotation, se termine du côté de l'oculaire par un vernier armé de microscopes, par lequel les subdivisions des parties principales s'apprécient. C'est en cela que la grandeur de l'instrument est utile, parce qu'elle agrandit les dimensions absolues des arcs qu'il faut ainsi évaluer par la lecture du vernier. Dans l'intérieur de la lunette, au foyer de l'objectif, est

fixé un réticule composé de deux fils rectangulaires dont l'un doit être rendu horizontal, l'autre vertical, ce qui exige que l'oculaire soit du genre positif. L'artiste a déjà placé à très-peu près les fils dans les positions, tant absolues que relatives, qu'ils doivent avoir; mais on les vérifie, et l'on achève au besoin de les leur donner par les procédés que j'ai décrits. Le fil horizontal sert pour bissecter l'astre quand il traverse horizontalement la lunette dans son passage méridien, devant être alors au sommet de l'arc qu'il décrit, si le plan du limbe est bien dirigé. Le fil vertical sert pour fixer le point précis du champ où la distance zénithale doit se mesurer, ce qui exige qu'il soit à la fois dirigé dans le méridien et parallèle au plan du limbe; car ce parallélisme est nécessaire pour que les arcs parcourus par le vernier sur le limbe soient égaux en grandeur à ceux que l'axe optique décrit. On commence par assujettir le fil à cette condition dès que le plan du limbe est rendu vertical. Pour cela, il faut remarquer que tout plan vertical coïncide avec le méridien au zénith. Supposant donc qu'il existe dans le même observatoire un instrument de passages exactement réglé, il n'y a qu'à déterminer par l'observation actuelle, ou par des observations précédentes, l'instant précis auquel le fil méridien de son réticule est traversé par une étoile dont l'arc diurne se trouve passer par le zénith. Cette étoile devra traverser au même instant le fil correspondant du quart de cercle, s'il est parallèle au plan de son limbe. On peut donc le rendre tel en faisant mouvoir le châssis qui porte le réticule, dans le sens et de la quantité nécessaire pour réaliser la simultanéité des passages zénithaux. Le même procédé peut évidemment servir à remplir la même condition de parallélisme dans tout autre instrument non susceptible de retourne, dont le limbe serait amené à la verticalité, et c'est le seul qu'on emploie aujourd'hui pour les grands cercles fixes. Mais autrefois on effectuait cette rectification, dans les quarts de cercle muraux, à l'aide d'un instrument appelé *lunette d'épreuve*, que l'on a peut-être eu tort d'abandonner complétement, car il peut être utile dans beaucoup de circonstances. C'est une lunette ordinaire ayant un objectif achromatique et un oculaire positif; mais le tuyau est soudé à ses deux bouts dans des collets de cuivre carrés, travail-

lés de manière que leurs faces opposées soient exactement parallèles, ce qui s'obtient par des procédés de retourne, et peut se vérifier avec beaucoup de précision. Elle est représentée ici dans la même planche que le quart de cercle mural, *fig.* 82. A l'intérieur de cette lunette, au foyer de l'objectif, on place un châssis mobile latéralement et circulairement; puis, sur ce châssis, on tend deux fils très-fins, dont le point de croisement, vu à travers l'oculaire, détermine un axe optique physique que l'on rend d'abord approximativement, et ensuite rigoureusement parallèle aux faces externes. Pour cela, on applique la monture sur une surface plane, invariablement établie, et à peu près horizontale. On dirige la lunette sur des objets très-distants, et l'on remarque le point qui se trouve actuellement occulté par le croisement des fils. Cela fait, on tourne la lunette sur elle-même, on l'applique sur le plan fixe par ses faces opposées, et, la dirigeant vers les mêmes objets, on examine si le point choisi pour mire se trouve encore occulté. S'il ne l'est pas, ce qui ne pourrait arriver que par un hasard extraordinaire, on fait mouvoir le châssis du réticule par ses vis de rappel, normalement au plan de posage, de manière à bissecter approximativement l'écart. Alors on choisit un autre point de mire qui se trouve sous le croisement actuel des fils, et l'on réitère la retourne pour effectuer une seconde épreuve pareille. Si l'on trouve un reste d'écart, on le corrige de nouveau par bissection. Au moyen de quelques alternatives ainsi répétées, on amène l'axe optique physique à être rigoureusement parallèle aux surfaces d'apposition, et l'on pourrait évidemment, par le même procédé, rendre les fils croisés respectivement parallèles à ces faces, conséquemment rectangulaires entre eux, s'ils avaient été d'abord tendus à peu près dans cette position. Ces rectifications étant opérées, on applique la lunette sur le plan du mural, on la dirige vers un objet éloigné, et l'on remarque le point qui se trouve occulté par le croisement de ses fils. Il ne reste donc qu'à faire mouvoir le réticule de l'instrument jusqu'à ce que le croisement de ses fils occulte aussi le même point de mire, et l'*axe optique est réglé*. On pourrait encore, par comparaison, assurer la verticalité d'un de ces fils, et l'horizontalité de l'autre, en les tournant sur les mêmes points que couvrent les fils analo-

gues de la lunette d'épreuve, si on les avait rendus préalablement parallèles à ses faces, comme je l'ai dit. Mais ces particularités de direction peuvent s'obtenir directement, ainsi que je l'ai expliqué, sauf à vérifier de nouveau si l'axe optique physique ne s'est pas dérangé pendant ces opérations, et est resté parallèle au limbe, comme il doit l'être en définitive. Quand cette condition est remplie par le procédé qui vient d'être expliqué, ou par l'observation des passages des étoiles zénithales, il faut achever de diriger le plan de l'instrument dans le plan exact du méridien, dont il aura été seulement rendu très-proche par les opérations mécaniques du posage. Cela se fait au moyen des vis qui le rattachent aux pièces métalliques scellées dans la muraille contre laquelle il est appliqué. Elles sont disposées pour qu'on puisse lui donner un petit mouvement azimutal autour de la verticale passant par le centre de sa division. La quantité nécessaire de ce mouvement se détermine avec facilité, lorsqu'il y a dans l'horizon une mire méridienne, placée dans l'alignement de l'axe optique de l'instrument des passages existant dans le même observatoire. Car, sur la ligne est-ouest qui passe par cette mire, il n'y a qu'à prendre une distance égale à celle qui sépare, dans l'observatoire, un des deux instruments de l'autre, parallèlement à la même direction. L'extrémité de cet intervalle marquera le méridien du mural. Si l'on y place une seconde mire, on n'aura plus qu'à faire mouvoir le plan de cet instrument, dans le sens azimutal, jusqu'à ce qu'elle soit occultée ou bissectée par le point de croisement des fils du réticule, lequel signale l'axe optique physique que l'on a rendu parallèle au plan du limbe; et l'on pourra même opérer immédiatement cette bissection sur la mire de l'instrument des passages, si l'intervalle est-ouest qui le sépare du mural ne soutend qu'un angle insensible, vu de la distance où elle est placée. A défaut de mire méridienne, on peut encore effectuer la rectification azimutale du mural, par la condition que les étoiles dont l'arc diurne s'élève peu sur l'horizon traversent le fil vertical de son réticule au même instant physique où elles traversent le fil analogue de l'instrument des passages, ce qui n'altérera pas l'identité d'instants préalablement établie pour les passages voisins du zénith; et alors la même identité

devra s'observer pour tous les passages qui s'opéreront entre ces limites extrêmes, si les deux concordances qu'on y a établies l'ont été exactement; ce qui fournira une vérification finale qu'il faudra non-seulement appliquer une fois, mais réitérer fréquemment. Néanmoins, il importe de remarquer que, si la coïncidence des époques des passages aux deux instruments n'est pas absolument rigoureuse, et on ne la trouvera jamais telle, mais seulement très-approchée, la différence n'aura presque aucune influence sur la mesure des distances méridiennes, parce que l'arc décrit par les astres, près de leur passage au méridien, est sensiblement horizontal dans la petite étendue angulaire dont l'axe optique physique du mural pourra s'écarter de ce plan quand il aura été ainsi réglé. L'instrument étant donc disposé comme nous venons de le dire, lorsque l'étoile que l'on veut observer entre dans le champ de la lunette, on la place sous le fil horizontal, au moyen des vis de rappel qui font mouvoir l'alidade sur le limbe; et elle doit suivre ce fil, ou du moins ne s'en écarter que très-peu pendant son passage, si l'instrument est bien dirigé. Mais c'est lorsqu'elle atteint le fil vertical, qu'elle se trouve précisément dans le plan du méridien. C'est donc alors, surtout, qu'il faut qu'elle soit coupée par le fil horizontal en deux parties bien égales. L'étoile passée, on ne touche plus à la lunette, et on lit l'arc marqué par le vernier, sur la division du limbe.

290. Pour voir maintenant le parti que nous pouvons tirer de cette opération, soit ORS, *fig.* 83, l'axe optique physique de la lunette dirigé vers l'étoile, lequel pourra très-bien ne pas passer par le centre C du quart de cercle. La distance au zénith cherchée est donc ZRS, ou ZCS, en menant SCO′ parallèle à SO. Si le point O′ coïncidait précisément avec le zéro du vernier, porté par l'alidade mobile, l'arc lu sur le limbe serait AO′, c'est-à-dire la distance zénithale cherchée. Mais cela ne saurait arriver ainsi que par un hasard extraordinaire. Or, si V est le zéro de l'alidade, et qu'il soit placé au-dessous du point O′, comme le représente la figure, l'arc lu sur le limbe ne sera pas AO′, mais AV, c'est-à-dire qu'il sera moindre que le véritable de la quantité VO′. Toutes les distances au zénith observées, ou plutôt *lues* sur le limbe, seront pareillement trop petites de cette même quantité. Car, puisque la direction de l'axe

optique est fixe dans la lunette, la direction de l'axe central SCO′ qui lui est toujours parallèle, est fixe également; et, comme le zéro V du vernier l'est aussi par construction, puisqu'il tient à la lunette, la distance VO′ sera constante, ainsi que l'effet qui en résultera. Cette distance VO′ s'appelle l'*erreur de collimation*. Ce serait le contraire si le point O′ tombait au-dessous du point V; l'erreur de collimation serait soustractive des distances au zénith lues sur le limbe.

291. Il est facile de la corriger *par le retournement*, lorsque l'instrument peut tourner autour de la verticale ZA, et prendre une position opposée à la première, comme on le voit *fig.* 84, et comme cela serait praticable avec un quart de cercle à axe vertical, tel que celui que j'ai représenté *fig.* 74, pourvu que l'on eût des moyens d'aligner bien exactement le plan de son limbe sur le méridien dans ces deux positions. Ceci admis, supposons que l'artiste ait seulement prolongé la division un peu au delà d'un quadrans, dans sa partie inférieure. Alors, ayant choisi une étoile qui passe au méridien près du zénith, si on l'observe d'abord dans la première position, *fig.* 83, puis dans la seconde, *fig.* 84, on devra la retrouver à la même distance de la verticale, abstraction faite des petites variations dues aux changements de la réfraction, de la précession, de l'aberration, et de la nutation, dans l'intervalle des observations comparées, toutes choses auxquelles on peut avoir égard. En tenant compte de ces petits changements, si cela est nécessaire, on devrait retrouver la même distance au zénith, et le même arc sur le limbe. Mais cela est impossible si l'erreur VO′ n'est pas nulle; car le point V qui se trouvait au-dessous du point O′ dans la *fig.* 83, se trouve maintenant au-dessus dans la *fig.* 84, précisément de la même quantité. L'arc AV, lu sur le limbe, dans ce second cas, sera donc trop fort autant que le premier était trop faible. Par conséquent, la différence de ces arcs sera double de l'erreur de collimation; et la moitié de cette différence sera l'erreur de collimation elle-même, qu'il faudra appliquer à toutes les distances zénithales observées avec le même mural, puisqu'elle est la même pour toutes; du moins, en supposant que le mouvement de la lunette autour de l'axe du quart de cercle soit parfaitement circulaire, et que le limbe de l'instrument soit parfaitement bien

divisé. Il est d'ailleurs évident que cette correction restera constante tant qu'on ne touchera point aux fils du réticule. Mais elle variera si l'on donne à cet appareil le moindre mouvement latéral relativement à l'axe du tuyau pour quelque rectification, ou si on le démonte pour renouveler les fils. Car, après ces opérations, le fil transversal perpendiculaire au limbe, et que l'on amène sur les astres au moment de leur passage, se trouvera presque toujours un peu plus près ou un peu plus loin du zéro du vernier, qu'il ne l'était auparavant, ce qui changera l'erreur de collimation (*).

292. Dans les observatoires où l'on employait un quart de cercle mural, qui ne pouvait pas être retourné, on déterminait l'erreur de collimation, en comparant les distances observées près du zénith, sur sa division, avec les distances exactes prises, en même temps, pour les mêmes étoiles, par un instrument susceptible de retourne, particulièrement avec le secteur zénithal. Si l'on ne possédait pas un tel secteur, ce qui n'arrivait que trop souvent, on empruntait ces distances à quelque autre observatoire, où elles avaient été ainsi mesurées, et on les transportait au lieu actuel des observations, en tenant compte de la différence des latitudes géographiques. Mais ce transport entraînait inévitablement des incertitudes, résultantes de l'erreur qui pouvait exister dans la différence supposée. Il était donc infiniment désirable que chaque observatoire pût se suffire à lui-même. On a espéré pouvoir obtenir cet avantage, en conservant celui de la fixité, par l'emploi des cercles muraux, dont le limbe divisé s'étend à une circonférence entière. On va voir, en

(*) Soient D, D′ les arcs lus sur le limbe pour la même étoile, dans les deux positions opposées du quart de cercle, Z la distance au zénith véritable, E l'erreur de collimation dans la position actuelle du réticule que le retournement ne change pas. On aura, dans la première observation, *fig.* 83, $D + E = Z$; dans la deuxième, *fig.* 84, $D' - E = Z$, puisque l'on suppose l'astre fixe, ou ramené à la fixité par le calcul; il en résultera donc

$$E = \tfrac{1}{2}(D' - D); \quad \text{et} \quad Z = D + E = \tfrac{1}{2}(D' + D).$$

On connaîtra ainsi la valeur et le signe de la correction E, qu'il faudra appliquer aux arcs D lus sur la division du limbe dans la première position habituelle de l'instrument pour avoir les distances zénithales véritables.

effet, que ces instruments, quoique n'étant pas susceptibles de retourne, peuvent néanmoins déterminer leur propre erreur de collimation.

293. J'ai décrit, dans le chap. IX, p. 292, le procédé par lequel on amène leur plan à la verticalité. Le parallélisme de leur axe optique physique à ce plan, et son alignement dans le méridien, s'obtiennent par des procédés de rectification analogues à ceux que l'on emploie dans l'établissement du quart de cercle mural (*). Mais il y a une différence essentielle dans la manœuvre par laquelle on les applique aux distances zénithales diverses. Le limbe du quart de cercle est fixé invariablement au mur contre lequel il est appliqué, et sa lunette est mobile autour de son centre; dans le cercle mural, au contraire, la lunette est fixée sur un des diamètres du limbe, et celui-ci l'emporte, en tournant autour de son axe horizontal, avec un mouvement continu, mesuré par des microscopes dont la monture est scellée dans la muraille. Ces microscopes sont ordinairement au nombre de six, espacés à distances égales au devant du contour du limbe, afin que la moyenne de leurs indications compense, non-seulement les erreurs locales de la division toujours fort petites, mais surtout les changements de configuration que les inégalités de la température, et la réaction pondérale de la masse du cercle sur elle-même, tendraient à lui faire occasionnellement subir. On s'efforce d'atténuer, autant que possible, la

(*) Pour avoir, sur cette opération, et en général sur la construction des cercles muraux, plus de détails mécaniques que je n'en dois donner ici, on peut consulter l'ouvrage du docteur Pearson, intitulé : *An introduction to Practical Astronomy*, Londres, 1829, in-4°; on y trouvera, p. 472 et suivantes, une description très-étendue du cercle mural construit par Troughton, pour l'observatoire de Greenwich, ainsi que des opérations employées pour son établissement, d'après des renseignements que cet habile artiste avait communiqués à l'auteur. Quant à l'étude de ces instruments, telle que l'astronome doit la faire pour assurer et apprécier l'exactitude de leurs résultats, je ne saurais rien indiquer de plus parfait et de plus utile à consulter que les dissertations insérées par M. G.-B. Airy dans les Recueils des observations faites à l'observatoire de Cambridge et à l'observatoire royal de Greenwich, depuis que la direction de ce magnifique établissement lui a été confiée.

première de ces influences, en établissant le cercle dans une salle vaste, où l'on n'allume jamais de feu, et en le préservant de la radiation solaire par des toitures mobiles, faites en bois, que l'on ouvre séparément, ou en totalité, selon le besoin. La lunette, centrée par son milieu avec l'axe de rotation, équilibrée autour de cet axe, et tournant avec le limbe, contient un réticule à fils fixes, placé au foyer de l'objectif. Ce réticule, comme celui du mural, n'exige essentiellement que deux fils : l'un horizontal, conséquemment perpendiculaire au limbe, et qui doit se placer sur les astres au moment de leur passage; l'autre vertical, qui marque la direction méridienne sur laquelle la mesure de la distance zénithale doit s'effectuer. On les règle comme ceux du quart de cercle mural. Cependant, on associe ordinairement au fil méridien des fils latéraux auxiliaires, comme dans l'instrument des passages; et l'horizontal est aussi quelquefois accompagné d'un fil mobile parallèlement à sa direction, lequel est conduit par une vis micrométrique à cadran divisé, qui est placée sous la main de l'observateur. Cette addition sert à un système d'observations que j'expliquerai tout à l'heure; et elle est presque indispensable dans les observatoires où il n'existe qu'un seul cercle mural. Quoique la lunette, comme je l'ai dit, reste toujours fixée sur le limbe quand on observe, on peut transporter successivement ses points d'attache sur des diamètres différents; mais l'expérience n'a pas montré qu'il y eût de l'avantage à le faire. On regarde aujourd'hui comme préférable de la laisser toujours sur le même diamètre, afin que sa connexion avec le limbe soit plus invariablement assurée; cela maintient aussi plus sûrement le fil vertical dans le méridien, après qu'on l'y a amené. Cette dernière rectification s'effectue, comme pour le quart de cercle mural, après que l'on a rendu le cercle vertical par le fil-à-plomb, et l'axe optique parallèle au plan de son limbe par des passages d'étoiles zénithales. Seulement, le mouvement azimutal qu'elle nécessite s'opère, en tournant, ou détournant, les vis butantes qui serrent le cylindre enveloppe, dans lequel l'axe de rotation est contenu, comme je l'ai expliqué page 262; et l'arrivée du fil vertical dans le méridien se constate de la même manière, soit en lui faisant bissecter une mire méridienne très-distante,

soit en l'astreignant à être traversé par une étoile peu élevée sur l'horizon, au même instant physique où elle traverse le fil central d'un instrument de passages, qui bissecte exactement les révolutions diurnes des étoiles circompolaires. Lorsque cette coïncidence d'époques a été établie pour une seule étoile, on examine si elle subsiste généralement, pour toutes les inclinaisons sur la verticale, où la lunette puisse être amenée par le mouvement de rotation du limbe. Quand cela a lieu, l'axe optique du cercle décrit le plan du méridien, comme le décrit l'axe optique de l'instrument des passages, et son parallélisme avec le limbe du cercle se trouve par cela même vérifié. Mais, malgré tous les soins que l'on peut prendre, dans la construction et dans le posage, pour assurer la fixité, ainsi que l'horizontalité de l'axe de rotation du cercle, une masse aussi pesante, portant sur un des bouts de cet axe, peut difficilement ne pas le fléchir, et s'affaisser aussi quelque peu sur elle-même, ou se courber dans son propre plan par la moindre inclinaison. On ne peut donc pas s'attendre qu'elle fera décrire, à l'axe optique physique qu'elle conduit, un plan vertical, aussi rigoureusement invariable que l'axe de rotation d'un instrument de passages qui est isolé, soutenu à ses deux bouts, pressé seulement à son milieu par un poids très-faible, et dont l'horizontalité opérée par des retournes, peut être à chaque instant constatée ou rétablie. Aussi, les passages d'étoiles au fil central des cercles muraux les plus parfaits, et les plus solidement fixés, offrent-ils toujours des petites discordances avec ceux d'un instrument de passages bien réglé, quand on les compare sous diverses inclinaisons de la lunette. Heureusement, ces discordances, lorsqu'elles sont ainsi restreintes, influent très-peu sur les distances zénithales qui s'observent seulement aux sommets des arcs diurnes que les astres décrivent. C'est pourquoi on réitère fréquemment la comparaison avec l'instrument des passages, pour s'assurer qu'elles ne sortent pas des limites de petitesse où l'on peut les tolérer, et où il faut les admettre comme inévitables.

294. Quand le cercle est ajusté comme je viens de le dire, la moindre pression exercée dans son plan, sur un de ses rayons, suffit pour le faire tourner, et il reste en équilibre dans chaque position où on l'abandonne. C'est ainsi qu'on amène la lunette à peu près

à la hauteur de l'astre que l'on veut observer. On achève de le placer sous le fil horizontal par un mouvement de rappel. Pour cela, dans les premiers cercles qui ont été construits, on fixait par des scellements, à la muraille que traverse l'axe, un anneau métallique épais, concentrique à celui-ci, et d'un diamètre un peu plus grand que le limbe divisé. Une pièce métallique portant la vis de rappel et sa pince, se fixait à cet anneau par des mâchoires, au point quelconque de son contour où l'observateur voulait la placer; et la pince du rappel s'attachait alors à un limbe intérieur, adhérent au limbe divisé, de sorte que tout le plan du cercle se trouvât retenu, et ne pût dès lors se mouvoir qu'en tournant, ou détournant, la vis de rappel qui lui était tangentielle. C'est ce que faisait l'astronome pour bissecter l'astre. Afin que la lunette pût être toujours assez approximativement dirigée pour que l'astre se trouvât dans le champ de la vision, et même assez près du fil horizontal, avant qu'on fît agir la vis de rappel, l'anneau attaché à la muraille portait sur son contour une division formée de gros traits, qui marquaient les distances zénithales, et indiquaient à l'observateur le lieu où il convenait de placer l'appareil. Maintenant, on trouve plus sûr de distribuer sur le contour du limbe quatre mouvements de rappel, indépendants les uns des autres, et invariablement fixés à la muraille d'appui; de sorte que l'observateur n'engage jamais avec le limbe qu'un seul d'entre eux, qui est celui dont la position lui paraît la plus commode pour son observation actuelle. La situation où il faut placer approximativement la lunette avant de fixer le limbe, pour avoir l'astre dans le champ, lui est suffisamment indiquée par une languette métallique, fixée à la muraille, et dont l'extrémité libre, terminée en pointe, se prolonge jusqu'au devant de la graduation, à peu près à la hauteur de l'œil de l'observateur. La simple différence de deux nombres, dont l'un est constant, fait connaître le point du limbe qu'il faut amener devant l'index, dans chaque observation, avant d'engager le rappel. J'expliquerai dans un moment ce petit calcul préparatoire, que l'on a toujours le temps de faire, pour des opérations consécutives dont toutes les circonstances sont prévues.

295. L'astre, que je suppose être une étoile, ayant été ainsi bis-

secté par le fil horizontal fixe, au moment où il traversait le fil vertical qui marque le méridien, l'observateur abandonne la vis de rappel; et le limbe restant fixe, maintient l'axe optique de la lunette sous l'inclinaison où il se trouvait pendant le passage. On lit alors les six microscopes, et l'on prend la moyenne arithmétique entre leurs indications. Elle équivaut à celle que donnerait un microscope unique, attaché comme les réels à la muraille fixe, et devant lequel tournerait un limbe dont rien n'altérerait la circularité. La direction de l'axe optique, ou sa projection sur le plan du limbe, au moment de l'observation, se trouve donc définie par l'indication de ce microscope idéal, comme elle le serait sur le plan du quart de cercle mural, par l'index du vernier attaché à la lunette. Mais ici, de même qu'alors, il y a une correction à faire au nombre qui se lit immédiatement sur la division du limbe, pour avoir l'inclinaison correspondante de l'axe optique physique sur la verticale menée par le centre de rotation du cercle, inclinaison qui est précisément la distance zénithale cherchée. Si les microscopes sont rigoureusement immobiles, si l'axe de rotation ne se déplace pas transversalement, et si l'axe optique physique, restant parallèle au plan du limbe, décrit le méridien sans aucun écart, la correction dont il s'agit sera évidemment constante pour toutes les inclinaisons de la lunette. Ce sera *l'erreur de collimation du cercle*. Quand on aura découvert sa valeur, on en conclura les distances zénithales absolues, correspondantes à chaque observation; mais tant qu'on l'ignore, la lecture des divisions ne donnera que les différences de ces distances entre elles, lesquelles seront égales aux différences des indications du microscope moyen. Or, cette détermination fondamentale s'obtient par un procédé d'observation que je vais décrire.

296. Dans la *fig.* 85, je réduis l'instrument à ses éléments abstraits, savoir : son limbe divisé, et l'axe optique physique projeté centralement sur lui. Pour fixer les idées, je suppose que ce limbe fait face au point ouest de l'horizon situé en avant de la figure, vers le spectateur, le point est étant au delà, du côté opposé. Par le centre de rotation C qui est aussi le centre de la division circulaire, je mène une verticale et une horizontale géométriques fixes

dans l'espace. La première, Z'Z'', marquera en Z' le sommet supérieur du limbe ou son *zénith*, en Z'' son sommet inférieur ou son *nadir* (*); la seconde, H'H'', marquera en H' son point sud, en H'' son point nord. Ces droites idéales, mais invariables, rencontreront la division tracée sur le limbe en des points différents de sa graduation, à mesure qu'on fera tourner le cercle dans le plan du méridien qu'il décrit. Pour suivre les phases de ces changements, je place en M un microscope fixe, indépendant du cercle, et sous lequel les traits de la division passeront aussi successivement, avec la même marche que sous les droites cardinales; de sorte qu'on pourra y voir le sens de leur mouvement et en mesurer le progrès. Pour donner aux résultats de cette lecture une signification déterminée, je supposerai que le numérotage de la division procède dans le sens de la flèche courbe figurée près du point M. Un seul microscope ainsi fixé, nous suffira pour mesurer le mouvement rotatoire, puisque nous considérons ici le limbe comme n'éprouvant aucune variation dans sa circularité. Ces définitions étant admises, tout se réduira à déterminer le quantième de la division circulaire auquel répond un des points cardinaux Z', Z'', H' ou H'', lorsque l'on a observé le point de cette même division sur lequel l'axe optique du microscope M se dirige actuellement; et il suffira que l'on sache assigner cette correspondance pour une seule des positions que le cercle peut prendre autour de son axe de rotation. Car, en passant de celle-là à toutes les autres, les numéros de la division marcheront sous chacun des points cardinaux fixes, de la même quantité dont ils se déplacent sous le microscope fixe M, et leur marche s'y opérera dans le même sens; de sorte que l'on pourra assigner ainsi, à chaque instant, les numéros actuels de la division auxquels ces quatre points répondent, quand on connaîtra celui qui se trouve en M.

Or, je dis que la correspondance désirée s'obtiendra expérimentalement, si l'on observe à un même instant la hauteur méridienne d'une étoile par pointé direct, et par réflexion sur un plan exactement horizontal, tel que serait la surface HH d'un liquide

(*) Ces deux expressions ont été définies dans le tome Ier, page 25.

ı repos, sur lequel la réflexion s'opérerait en I, assez loin de ses ›rds pour échapper aux inflexions que l'attraction capillaire des ırois du vase y peut produire. Un bain de mercure, ayant environ décimètres de diamètre, suffit pour ce but, et y est très-propre, à ıuse de sa stabilité : on se préserve de la vision près des bords, en y laptant un diaphragme circulaire. A la vérité, la simultanéité ri-›ureuse des deux observations est physiquement impossible à ob-nir; mais on en approche beaucoup si on les fait successivement ıns un intervalle de quelques instants, l'une un peu avant, l'autre n peu après le passage de l'astre au fil méridien de la lunette. Il en ésulte seulement la nécessité d'une correction ultérieure que l'on eut calculer très-exactement, une fois que la circularité, ainsi que uniformité du mouvement diurne, sont établies; et, pour les étoiles oisines du pôle, dont le mouvement est très-lent, cette correction ıt si petite, qu'on pourrait la négliger dans une première évaluation ui se trouverait déjà très-approchée. Je vais, en conséquence, éta-lir d'abord les raisonnements dans l'hypothèse de la simultanéité es deux observations; et j'indiquerai ensuite la nature des correc-ons qui servent pour réduire à ce cas les expériences réelles.

297. Reprenant donc la *fig.* 85, soient SIL'CO' la direction brisée u rayon lumineux perçu en O', à travers l'oculaire, par réflexion; t SL"CO", celle du rayon perçu simultanément en O" par ce pointé irect. Les dimensions du cercle et sa distance à la surface réflé-hissante, étant insensibles comparativement à l'éloignement des stres, le rayon direct SL" devra être considéré comme parallèle u rayon incident SI; et, en menant par le point d'incidence I une 'erticale IZ', qui se trouvera parallèle à CZ', par une raison ana-ogue, elle sera normale à la surface du liquide réflecteur. Or, l'après les lois de la réflexion spéculaire, l'angle d'incidence SIZ' st égal à l'angle de réflexion Z'IL'. Maintenant, par les pro-›riétés du parallélisme, l'angle SIZ', égal à SCZ', est la distance énithale de l'astre, au moment de la double observation; et ıar la condition physique de la réflexion, l'angle Z'IL', ou son orrespondant Z'CO', est égal à cette même distance. Pour abréger, e la nommerai Z; et je vais montrer que sa valeur absolue peut e déduire des deux observations combinées.

A cet effet, je prends pour inconnue, le *quantième* X de la division circulaire, sur lequel l'axe optique du microscope M se dirige, lorsque l'axe optique de la lunette du cercle coïncide avec la droite cardinale horizontale H′H″, l'oculaire étant en H′. Pour passer de là à la direction O′CL′, le cercle a tourné, *dans le sens direct* de sa division, d'une quantité angulaire O′CH′, égale à 90°—Z. Conséquemment, le quantième qui est venu se placer alors sous le microscope M est *moindre* que X de la même quantité. Au contraire, pour porter l'axe optique de la lunette, de la direction H′CH″ à la direction O″CL″, le cercle a tourné, *en sens rétrograde* de sa division, d'une quantité angulaire égale à O″CH′, qui est encore 90° — Z; et, après ce second mouvement, le quantième qui est venu se placer sous le microscope M, a dû être *plus grand* que X de cette même quantité. Si donc on nomme R, D, ces deux quantièmes nouveaux, et successivement observables, qu'a marqués le microscope dans les deux directions où l'on a ainsi amené la lunette pour bissecter d'abord l'astre réfléchi, puis l'astre direct, on aura:

$$R = X - (90^\circ - Z) = X - 90^\circ + Z, \qquad D = X + 90^\circ - Z.$$

En combinant ces deux équations par somme, Z disparaît; et, en les combinant par différence, on fait disparaître X, en vertu de l'opposition de signe qu'on lui donne. On tire donc séparément X et Z de ces opérations, et il en résulte

$$X = \tfrac{1}{2}(D + R), \qquad Z = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(D - R).$$

La première de ces valeurs exprime le quantième de la division sur lequel pointe le microscope M, lorsque l'axe optique de la lunette du cercle devient horizontal, l'oculaire étant en H′ au sommet sud. La seconde est la distance zénithale absolue de l'astre observé, exprimée en parties de la graduation du limbe.

Connaissant X lorsque l'axe optique de la lunette est horizontal, l'oculaire étant en H′, on pourra en conclure le quantième qui devra se trouver sous le microscope M, quand cet axe sera transporté dans toute autre direction assignée. Car la quantité angulaire de ce transport étant donnée, à partir de H′, on n'aura qu'à la retrancher de X si le cercle a tourné dans le sens direct de sa gra-

duation, et l'ajouter à X s'il a tourné en sens rétrograde. Par exemple, en opérant sa rotation dans ce dernier sens, sur toute l'étendue d'une circonférence, les indications du microscope M pour les quatre directions cardinales de l'axe optique seront telles qu'on le voit ici :

DIRECTION de l'axe optique de la lunette et du pointage.	QUANTIÈME de la division du limbe qui se trouve sous le microscope M.
Horizontale, H'H"; pointage au nord....	X
Verticale, Z"Z'; pointage au zénith...	X + 90°
Horizontale, H"H'; pointage au sud.....	X +180
Verticale, Z'Z"; pointage au nadir...	X +270

Lorsque le nombre porté dans la dernière colonne excède 360°, on supprime la circonférence entière; car, au delà de ce terme, les parties de la graduation qui passent sous le microscope, reprennent l'ordre primitif de leurs dénominations.

298. Le second de ces nombres X+90°, qui exprime l'indication du microscope, dans le pointage vers le zénith, et que je désignerai par μ, est spécialement utile, parce que, étant combiné par addition ou par soustraction avec toute autre lecture ultérieure, il donne immédiatement la distance zénithale de l'astre observé. Pour en faire cette application aux circonstances représentées dans la *fig.* 85 qui nous sert de type, il suffit de considérer qu'en passant du pointage zénithal à un pointage dirigé *au sud du zénith*, le cercle tourne, *en sens rétrograde* de sa division, d'une quantité angulaire égale à la distance zénithale où l'on arrête l'axe optique de la lunette, ce qui *augmente* l'indication du microscope de la même quantité. Donc, si la nouvelle lecture du microscope indique le quantième μ', la distance zénithale absolue sera $\mu' - \mu$. Au contraire, le pointage se fait-il *au nord du zénith*; pour l'opérer, il faut faire tourner le cercle *dans le sens direct* de sa graduation,

d'une quantité angulaire encore égale à la distance zénithale où l'on s'arrête. Donc, si la nouvelle lecture du microscope donne le quantième μ'', la distance zénithale absolue sera $\mu - \mu''$. Le nombre μ, propre à chaque cercle mural, est ainsi une annexe nécessaire des tableaux d'observations qu'on en rapporte. La plupart des astronomes anglais l'appellent l'*erreur de l'index*. M. Airy l'a nommée l'*index du point zénithal*. Ces deux dénominations sont également admissibles, puisqu'on y attache la même signification. Dans les applications réelles, on prend pour le nombre μ la moyenne arithmétique entre les indications des six microscopes fixes. Mais, comme on le combine toujours avec une moyenne pareille, prise dans la position où le cercle s'arrête à la fin de chaque observation, le résultat final est équivalent. Seulement, la multiplicité des lectures tend à compenser les erreurs locales de la graduation, et les perturbations accidentelles de la circularité. Le nombre μ étant connu, il faut tout de suite s'en servir pour déterminer l'erreur de collimation propre à l'index fixe qui se projette au devant de la graduation, à la hauteur de l'œil, et qui, dans chaque observation, signale approximativement la position où il faut amener la lunette, avant d'engager le rappel. Pour cela, faites tourner le cercle jusqu'à ce que le numéro μ de la graduation vienne se placer sous le microscope M, et fixez le limbe dans cette position par son rappel; l'axe optique physique sera devenu vertical, la lunette pointant au zénith. Observez le point du limbe qui se trouve sous l'index, et soit N le nombre qui le désigne sur la graduation. Dès lors, en admettant que celle-ci procède dans le sens que suppose notre figure, quand l'axe optique s'écartera du zénith *vers le sud* à la distance Z, l'index devra marquer $N + Z$; et, s'il s'écarte *vers le nord* à la même distance, l'index devra marquer $N - Z$. Donc, lorsqu'on aura déterminé N, il faudra faire tourner le cercle jusqu'à ce que ces indications se réalisent, pour chaque distance Z à l'observation de laquelle on voudra se préparer.

299. Avant de donner des exemples numériques des résultats ainsi obtenus, il est nécessaire d'expliquer par quel artifice on supplée à l'exacte simultanéité des observations desquelles nous avons supposé que le nombre μ est déduit, pour chaque cercle em-

ployé ainsi isolément. Je ne puis mieux le faire qu'en rapportant la méthode pratiquée pour cela, par M. Airy, à l'observatoire de Cambridge. Quelques instants avant le passage de l'astre, que je suppose toujours être une étoile, on fait tourner le cercle autour de son axe jusqu'à ce que la lunette se trouve approximativement sur la direction du rayon réfléchi. Cela est facile par la notion approchée que l'on a toujours de la distance zénithale; car, si elle est Z pour l'astre réel, elle sera 180° — Z, et du même côté du zénith pour l'astre réfléchi; de sorte qu'ayant déterminé le nombre N propre à l'index approximatif placé au devant de la graduation, on connaît le numéro de celle-ci qu'on doit amener sous sa pointe. Cette condition remplie, on arrête le cercle par un de ses rappels, qui le maintient immobile dans la position qu'on lui a donnée, et on lit les indications des six microscopes. Lorsque l'astre arrive dans la lunette ainsi disposée, il ne se trouve pas sous le fil horizontal F. On ne cherche pas à l'y amener, ce qui exigerait que l'on fît mouvoir le cercle. On le bissecte par le fil micrométrique mobile F′, qui est mû parallèlement à F; et l'on a soin d'opérer cette bissection un peu avant que l'astre arrive au fil vertical qui marque le méridien, en notant au même instant l'heure, la minute, la seconde et la fraction de seconde que marque une horloge H′, placée près du cercle pour ce but. Ces opérations étant terminées, on note l'indication de la vis micrométrique qui a conduit le fil F′; et comme sa marche, relativement au fil fixe F, a été déterminée préalablement, cette lecture, combinée avec celle que l'on a faite des six microscopes, donne la position absolue de l'étoile, telle qu'on l'aurait observée à la même distance du méridien, si on l'avait bissectée par le fil F. Aussitôt on détache le rappel, ce qui rend le cercle libre, et on le fait tourner autour de son axe jusqu'à ce que l'astre vu directement se retrouve dans le champ de la lunette. On le fixe de nouveau par son rappel, et l'on opère de nouveau la bissection, mais cette fois par le fil fixe F, en notant de même l'instant de l'observation, qui est faite un peu hors du méridien comme la première, mais du côté opposé de ce plan. Alors on lit les six microscopes dans cette position finale du cercle; et l'on note aussi les indications du baromètre et des thermomètres, tant inté-

rieur qu'extérieur à la salle d'observation, afin de calculer ultérieurement la réfraction qu'il faudra appliquer à la distance zénithale apparente Z, pour la convertir en distance zénithale vraie, telle qu'on l'aurait observée sans l'interposition de l'atmosphère. Mais les deux déterminations successives ainsi obtenues, exigent deux rectifications. Une première d'abord, parce qu'elles ont été prises hors du méridien; puis une autre, parce que l'astre, au moment de chaque bissection, se trouvait hors de l'axe optique parallèle au limbe; de sorte que l'arc intercepté alors entre le point zénithal du limbe et le fil bissecteur, tel qu'il se lit sur la division du cercle, n'est que la projection orthogonale faite sur ce plan de l'arc réel compris entre l'astre et le zénith. Mais les éléments de ces deux rectifications sont donnés par l'observation des époques où chaque bissection a été faite. Car l'horloge H′, sur laquelle on les a notées, se rapporte par comparaison à l'horloge H de l'instrument des passages; d'où l'on peut connaître l'intervalle de temps sidéral dont la première bissection a été antérieure au passage méridien précis et dont l'autre lui a été postérieure. Or, quand les lois du mouvement diurne sont établies, on peut, d'après la connaissance de ces intervalles, calculer, pour chaque étoile, la petite correction qu'il faut faire à la distance extra-méridienne ainsi observée, pour avoir la distance méridienne rigoureuse; et la même donnée fait aussi connaître le petit angle que le rayon visuel dirigé à l'astre, formait alors avec le plan décrit par l'axe optique rigoureux, ce qui sert à calculer la seconde correction. On peut donc ramener ainsi les deux observations aux conditions idéales de simultanéité, et de direction exactement méridienne, que notre raisonnement supposait, et l'on trouvera, à la fin du présent ouvrage, les formules par lesquelles on effectue ces calculs.

Si l'astre observé avait un mouvement propre, il deviendrait évidemment nécessaire d'introduire encore une troisième correction, pour avoir égard au changement que ce mouvement aurait pu opérer sur sa distance polaire, et par suite sur sa distance zénithale méridienne, pendant l'intervalle de temps qui sépare l'observation faite par réflexion de celle qui a été faite par pointage direct. Mais, la lune seule a un mouvement propre assez rapide pour que

DATES des observations. Année 1833.	DÉSIGNATION des astres observés.	
Mars 20	α grande Ourse.	S. R.
	idem.	S. D.
	α petite Ourse.	I. R.
	idem.	I. D.
28	δ Dragon.	I. R.
	idem.	I. D.
	α grande Ourse.	S. R.
	idem.	S. D.
31	δ petite Ourse.	I. R.
	idem.	I. D.

ı fût appréciable, et il n'y aurait aucune

: exposé en rapportant les résultats numé-
es observations, effectuées par cette mé-
e M. Airy, à l'observatoire de Cambridge,
al, dans l'année 1833. Je les extrais d'un
ui les accompagnent dans les registres pu-
ome. Je n'ai choisi à dessein que des étoiles
corrections qui rétablissent la simultanéité
fussent très-petites; et j'ai omis les indica-
i y sont jointes, ayant ici pour unique but
istances zénithales apparentes, ainsi que le
: chaque double observation. J'ai appliqué
rvés ou conclus, la même notation dont
osé qui précède, de sorte que le tableau
ole devoir être compris à la même inspec-
désignation de chaque étoile la lettre S
dans son passage *supérieur*, et la lettre I
on passage inférieur. La lettre R ajoutée
e celle des deux observations de chaque
eflexion, et la lettre D désigne l'observa-

vations parfaites, les distances zénithales
nquième colonne, doivent généralement
une même étoile, observée à des jours
iations qui ont pu survenir dans la réfrac-
ans les effets absolus de la précession, de
les positions apparentes. Mais les valeurs

---

imés d'observations anglaises, l'adjonction des
un passage supérieur, comme le pourrait croire
qui interpréterait les lettres I et S comme ini-
gnent dans sa propre langue. Elles ont un sens
re S y remplace la préposition latine *sub*, qui
on des deux lettres S. P. signifie *sub polo*, sous

du nombre μ rapportées dans la dernière colonne, et celles du nombre X dont elles dérivent, devraient se trouver toutes égales entre elles, dans cette même hypothèse, si les éléments physiques de l'instrument, que l'on suppose invariables, demeuraient tels en réalité. Les petites inégalités qu'on y découvre expriment donc les effets réunis, des inexactitudes que l'observateur a pu commettre, et des variations que tout l'appareil d'observation a pu subir. A ne considérer que le petit nombre de résultats ici rapportés, et le peu de différences qu'ils présentent entre les évaluations du nombre μ, on ne saurait démêler la part qu'il faut y attribuer à ces deux sources d'erreur. Mais on peut le faire, en rassemblant une longue suite de résultats obtenus ainsi avec un même instrument, dont les microscopes n'ont pas été dérangés, et dont la lunette est restée fixe sur un même diamètre du limbe. C'est ce qu'a fait M. Airy, et il a reconnu ainsi indubitablement, qu'abstraction faite des discordances accidentelles, le nombre μ, calculé pour son cercle, se trouvait en général plus grand par les étoiles observées au nord de la verticale, que par les étoiles observées au sud de cette ligne. Cette discordance décèle donc quelque défaut de symétrie dans la valeur des arcs mesurés par l'instrument, d'un côté et de l'autre de son zénith physique; mais il paraît très-difficile d'en assurer sûrement la cause.

301. On pouvait, non sans vraisemblance, supposer que l'intervention du fil micrométrique mobile y avait quelque part. Dans tous les cas, il était utile de la supprimer, tant pour les difficultés de son usage que pour les corrections qu'elle exige, et parce que le mécanisme qui conduit ce fil semble devoir, en général, offrir beaucoup moins de sûreté que celui du grand cercle auquel on l'annexe. Pond, le prédécesseur de M. Airy dans la direction de l'observatoire de Greenwich, réalisa cette suppression par l'emploi simultané de deux cercles muraux A, B, établis parallèlement, dans une même salle, conséquemment soumis à des influences de température communes, mais manœuvrés par des observateurs différents.

Pour calculer les résultats que peuvent fournir deux instruments ainsi conjugués, il suffit d'appliquer à chacun d'eux la même no-

tation et les mêmes formules qui nous ont servi quand nous ne considérions qu'un cercle unique. Seulement il faudra caractériser leurs indications individuelles par des indices a ou b, analogues aux lettres A ou B qui les désignent. Ceci convenu, employons-les d'abord pour observer simultanément la distance exactement méridienne d'une même étoile par un même mode d'observation. Cette distance Z leur sera commune, à cause de l'identité des circonstances propres à l'étoile. Supposant donc, par exemple, qu'on opère ainsi par réflexion, avec les deux cercles, on aura, conformément au § 297, page 368 :

$$R_a = X_a - 90^\circ + Z; \qquad R_b = X_b - 90^\circ + Z:$$

conséquemment,

$$X_b - X_a = R_b - R_a.$$

Cette double observation donne déjà la *différence* des inconnues X propres à chaque cercle. On l'obtiendrait également par un couple d'observations directes. En effet, lorsqu'on opérera ainsi, on aura

$$D_a = X_a + 90^\circ - Z; \qquad D_b = X_b + 90^\circ - Z:$$

conséquemment,

$$X_b - X_a = D_b - D_a.$$

En faisant abstraction des erreurs accidentelles des observations, qui doivent disparaître par compensation mutuelle dans la moyenne d'un grand nombre de résultats pareils, chaque système d'opérations de même nature, ainsi effectuées simultanément, déterminera la différence $X_b - X_a$, et devra lui assigner une même valeur ; du moins si les inconnues X_a, X_b restent individuellement constantes pour chaque cercle, ce que je supposerai d'abord.

Maintenant, les opérations étant toujours simultanées, effectuons-les sur chaque cercle par des modes différents. Si, par exemple, A est employé par réflexion, B par vision directe, on aura

$$R_a = X_a - 90^\circ + Z; \qquad D_b = X_b + 90^\circ - Z:$$

conséquemment,

$$X_b + X_a = D_b + R_a.$$

Ou, en intervertissant le mode d'emploi, si A est employé par

vision directe, B par réflexion,

$$D_a = X_a + 90^\circ - Z, \qquad R_b = X_b - 90^\circ + Z:$$

conséquemment,

$$X_b + X_a = R_b + D_a.$$

Il est à peine nécessaire de dire que les symboles D_a, R_a, D_b, R_b, représentent ici les nombres lus sur chaque cercle dans le système actuel d'observations, ce qui leur donne des valeurs numériques autres que dans les équations précédentes. Ce second système, composé d'opérations de nature inverse, fait donc connaître la *somme* des inconnues X_a, X_b, dont le système composé d'opérations de nature semblable faisait connaître la différence. Conséquemment, la combinaison des résultats ainsi obtenus donnera la valeur propre de chaque inconnue X_a, X_b, toujours en supposant qu'elles restent individuellement constantes pendant toute la durée des observations réunies. De là on déduira les nombres μ_a, μ_b, exprimant, pour chaque cercle, la moyenne des indications des six microscopes, lorsque l'axe optique physique devient exactement vertical, la lunette pointant au zénith; et ces nombres étant connus, serviront pour calculer les distances zénithales Z, correspondantes à toute moyenne pareille obtenue dans d'autres positions de la lunette de chaque instrument.

302. La méthode précédente a, sur celle qui n'emploie qu'un seul cercle, un avantage incontestable. C'est de déterminer l'inconnue X, et par suite le nombre μ, propres à chaque instrument, par des distances zénithales directes et réfléchies, observées immédiatement dans le méridien même, sur un fil fixe, dans la direction exacte de l'axe optique physique, sans aucune intervention de micromètre à fils mobiles, ni des corrections que nécessite le défaut de simultanéité. Mais les résultats qu'elle donne, quoique préférables sous divers rapports, sont également affectés par les variations du nombre μ, propre à chaque cercle, quand la lunette est dirigée des deux côtés opposés du zénith. Car ces variations, paraissant inhérentes à leur construction individuelle, doivent nécessairement se retrouver tout entières dans les résultats obtenus par leur emploi simultané. L'expérience ne confirme que trop cette

prévision logique ; et M. Airy l'a mise dans une entière évidence, en publiant les tableaux des valeurs diverses du nombre μ pour les deux cercles de Greenwich où elles sont conclues d'observations simultanées. Il a reconnu ainsi, que les variations de ce nombre sont, pour chaque cercle, de même ordre et de même sens qu'il les avait trouvées à Cambrigde, pour le cercle unique qu'il employait. On ne peut donc douter qu'elles ne soient inhérentes à la construction mécanique de ces instruments, du moins de ceux qu'on a jusqu'à présent soumis à des épreuves aussi complètes.

303. Il serait très-important de savoir si les grands cercles astronomiques tournant autour d'un axe vertical, et dont la direction azimutale peut être intervertie, comme celui de Palerme, seraient sujets à de pareils accidents. Mais celui-là est, jusqu'à présent, le seul, d'une grande dimension, qui ait été disposé pour un établissement fixe, et cette particularité n'y a pas été suffisamment étudiée. Les instruments de ce genre, parmi lesquels on doit comprendre les cercles répétiteurs portatifs, ont nécessairement deux axes de rotation, l'un horizontal, l'autre vertical. Le premier sert, comme dans les cercles muraux, pour faire tourner le limbe dans son propre plan, avec la lunette qui y reste fixe, ou qui se meut concentriquement sur sa surface; le second sert pour diriger le limbe dans les différents azimuts, en maintenant son diamètre zénithal fixé sur la verticale qui passe par son centre. Dans l'instrument de Palerme, destiné à n'être jamais déplacé, cette dernière condition est réalisée par une disposition toute différente de celles que j'ai déjà décrites, et qui étant modifiée en un seul de ses détails, pourrait être employée avec un extrême avantage dans des cas pareils. L'instrument est établi sur un massif de pierres de taille dont la surface supérieure a été rendue très-approximativement plane et horizontale. Sur cette surface on trace d'abord deux droites rectangulaires qui se coupent à son centre, en se dirigeant à peu près vers les points cardinaux de l'horizon ; puis, ayant bissecté leurs intervalles, on dresse sur ces nouvelles directions quatre colonnes de cuivre qui se scellent à leur base dans le massif, et qui portent à leur sommet des arcs de même métal, lesquels vont se rejoindre au zénith comme les arcs d'une coupole, pour y soutenir un anneau cy-

lindrique horizontal formé de métal très-dur, ainsi que le représente la *fig.* 86, où ce détail est extrait du dessin général de l'instrument, *fig.* 76, que je supposerai toujours sous les yeux du lecteur. Cet anneau A est destiné à recevoir et à contenir un tourillon cylindrique évidé à l'intérieur, qui forme le sommet matériel de l'axe de rotation vertical. Mais, pour éviter une trop grande friction, le contact n'a lieu que sur trois droites verticales, déterminées par autant de petits parallélipipèdes de métal très-dur, formant saillie à l'intérieur de l'anneau A, et dont un, pourvu d'un mouvement de rappel, peut être tant soit peu rapproché ou éloigné du centre, afin de modérer convenablement le serrage du tourillon cylindrique introduit entre eux. Dès lors, le pivot inférieur de l'axe de rotation doit être évidemment établi dans la verticale intermédiaire entre les trois lignes de contact. On marque approximativement sa place sur la surface du massif, en faisant descendre un fil-à-plomb par le centre de A; et, au point C ainsi obtenu, on scelle concentriquement, dans le massif, un grand cercle en fer, représenté ici séparément, *fig.* 87. C'est le support fixe de tout l'instrument : mais il ne peut être immédiat; car il faut évidemment y annexer un double mouvement de rappel horizontal, qui permette d'amener le pivot inférieur de l'axe, dans la verticale exacte de son sommet déjà fixé. Cet effet est produit par l'intermédiaire de deux autres cercles pareils, dont l'un, C', *fig.* 88, s'applique sur C; l'autre, C'', *fig.* 89, sur C', chacun en conservant la possibilité d'un de ces mouvements de transport, en des sens rectangulaires. Pour cela, d'abord C offre, vers ses sommets est et ouest, deux parallélipipèdes saillants P.P. qui entrent dans des entailles correspondantes pratiquées dans C'; de sorte que celui-ci étant posé sur C, peut encore être transporté quelque peu d'orient en occident, par des vis butantes contre les parallélipipèdes P, P. Mais, afin que ce mouvement s'opère avec facilité, sans que l'apposition cesse d'être exacte, le contact n'a pas lieu entre les plans mêmes des deux cercles : il s'établit seulement sur les arêtes de trois petits rouleaux d'acier, fixés sur C, dans une direction perpendiculaire au sens du transport. Le cercle C' peut donc ainsi être à volonté mû sur la ligne d'est et ouest, ou arrêté invariablement. Le cercle C'', à son tour, s'appose sur C', et

adapte par un mécanisme absolument pareil, sauf que son ıuvement relatif de transport est dirigé suivant la ligne nord et l, perpendiculairement au précédent. C'est au centre de ce troime cercle C″ qu'est encastrée la douille qui reçoit le pivot inféur de l'axe vertical, comme on le voit *fig.* 90. Alors cet axe ınt déjà à peu près tel par le posage, on achève de rendre sa verılité tout à fait exacte, au moyen des deux rappels rectangulaires pliqués aux cercles mobiles C′, C″. Cette rectification, comme ısieurs autres ultérieurement nécessaires, s'effectue d'après les lications d'un fil-à-plomb, suspendu par une pièce pourvue de ›pels, à la plate-forme métallique que supportent les quatre cones qui entourent le limbe. Le fil pend en liberté, dans l'axe d'un 'au fixé à ces mêmes colonnes, pour le préserver des agitations l'air; puis, vers sa partie inférieure il traverse l'axe d'un appareil :roscopique adapté à leur base, lequel est disposé comme celui 'on emploie pour régler la verticalité des cercles muraux, de te que le passage du fil s'y observe avec la même précision. Mais, , tout ce système se transporte azimutalement avec les colonnes and on fait tourner l'instrument autour de son axe vertical. Quand veut rectifier celui-ci, on profite de ce mouvement azimutal ur amener le plan du limbe, et le fil lui-même, sur la direction de ppel horizontal d'un des cercles de base, par exemple sur la ne est-ouest, et l'on ajuste l'axe de l'appareil microscopique sur . Alors on observe le microscope fixe qui pointe sur la division ımutale; et, ayant noté son indication, on fait tourner l'instruent jusqu'à ce qu'elle ait varié de 180°. Cela intervertit la poion du limbe, et ramène avec lui le fil sur la même ligne est-ouest, ais du côté opposé de l'axe autour duquel la rotation s'est effecée. Si on le retrouve sous le réticule de l'appareil microscopique, ıxe ne penche ni vers l'est ni vers l'ouest, et il ne peut s'écarter : la verticale que dans le sens du méridien. Si, au contraire, le -à-plomb se trouve dévié, on corrige la moitie de son écart par le ouvement de transport du cercle de base, et l'autre moitié en menant sur lui l'axe de l'appareil microscopique; puis on recomence une autre retourne qui ne laisse plus voir qu'un écart oindre, et l'on continue ainsi jusqu'à ce que le fil-à-plomb ne soit

plus dévié par ces alternatives de position. Ce résultat obtenu, on répète des épreuves semblables dans le sens du méridien, en faisant mouvoir cette fois le cercle de base dont le rappel agit suivant cette direction. Lorsque les retournements n'opèrent plus aucune déviation dans ces deux sens rectangulaires, l'axe de rotation est nécessairement vertical. Comme vérification dernière, on centre exactement l'appareil microscopique sur le fil-à-plomb; et, opérant la rotation dans l'amplitude totale d'une circonférence, le fil doit se retrouver fixe sous le microscope, dans tous les azimuts où il est ainsi successivement transporté. Le limbe lui-même peut ensuite être rendu vertical, par le fil-à-plomb, au moyen d'un appareil de suspension et d'observation analogue, appliqué à son plan comme on le pratique pour les cercles muraux, ou encore par les indications d'un niveau suspendu à son axe de rotation horizontal dont les extrémités sont libres. Et l'exacte perpendicularité du limbe sur cet axe se vérifierait par la concordance de ces deux épreuves si elles étaient simultanément employées. Le parallélisme de l'axe optique physique au plan du limbe s'établit immédiatement par un procédé de retourne que j'expliquerai tout à l'heure. Sa direction méridienne s'obtient ensuite, comme pour les cercles muraux, par comparaison avec un instrument de passages exactement réglé. Mais ici, le limbe ne devant pas rester immobile dans un même vertical, cette dernière indication se prend par la lecture correspondante du microscope fixe de la division azimutale, ce qui détermine l'erreur de collimation qu'il faut lui appliquer pour connaître la valeur angulaire de tout autre azimut dans lequel on amène le limbe. Il ne reste plus qu'à trouver la correction analogue pour la division verticale comparée à ses microscopes fixes qui, dans le cercle de Palerme, sont au nombre de deux seulement. On y parviendrait, comme pour les cercles muraux isolés, en annexant au fil horizontal fixe du télescope, un second fil mobile par une vis micrométrique parallèlement à sa direction, ce qui permettrait d'observer un même astre successivement par réflexion et par vision directe, à de petites distances du méridien dans un même passage; ou mieux encore en réunissant les observations méridiennes de deux instruments pareils employés simultanément comme on le fait avec

des cercles fixes. Le télescope de Palerme ne contient pas de fil mobile ; mais le retournement azimutal auquel il se prête, permet de déterminer son erreur de collimation verticale par deux procédés différents, dont Piazzi a fait usage. Le premier se fonde sur des observations d'objets terrestres. On choisit, sur le contour de l'horizon, quelque point bien défini et très-distant, qui puisse servir de mire. On dirige le télescope sur ce point; et, l'ayant exactement bissecté par le fil horizontal du réticule, on note l'indication moyenne des microscopes fixes, appartenant au limbe ainsi qu'à la division azimutale. Cette moyenne équivaut, pour chaque division, à celle d'un microscope idéal unique, auquel je rapporterai désormais les raisonnements. On fait alors tourner tout l'instrument avec son cercle azimutal, jusqu'à ce que la division de ce cercle ait marché, sous son propre microscope, d'une quantité angulaire exactement égale à 180 degrés, le limbe vertical restant toujours fixé par son rappel. Cette opération le replace donc dans le même azimut où il était d'abord, ses divisions faisant face au point diamétralement opposé de l'horizon. Si l'axe de rotation autour duquel ce mouvement s'opère est exactement vertical, ce que je suppose avoir été effectué préalablement, l'axe optique physique du télescope forme avec la verticale, après la retourne, exactement le même angle que dans sa position première ; seulement, il est dirigé du côté opposé du zénith. Alors on rend le limbe libre, on ramène le télescope sur la mire, et on la bissecte de nouveau ; après quoi on note le point de la division du limbe qui est venu se placer sous ses microscopes fixes. Ceci fournit déjà une excellente épreuve pour savoir si l'axe optique physique du télescope est exactement parallèle au plan du limbe. Car, s'il est tel, le point de croisement des fils du réticule qui le détermine, doit pouvoir revenir encore sur la mire, après le retournement. Donc, s'il s'en écarte, il faut corriger une moitié de l'erreur en déplaçant le réticule dans le sens horizontal, l'autre moitié en faisant marcher azimutalement le cercle; puis recommencer les retournements alternatifs, jusqu'à ce que le retour de l'axe optique sur la mire s'opère avec une complète précision. Supposant donc cette rectification préalablement effectuée, et l'axe optique du télescope

ramene exactement sur la mire après la retourne, il est clair, qu'en revenant de sa position intervertie, au second pointage direct, il aura décrit dans l'espace, parallèlement au plan du limbe, un angle exactement double de la distance zénithale de la mire, que je suppose n'avoir éprouvé qu'une variation de hauteur, par le changement de la réfraction pendant l'intervalle de temps qui sépare les pointages consécutifs, lequel peut n'être que de quelques instants. Cet angle double sera donc donné par la marche totale de la division du limbe sous ses microscopes; et sa moitié fera connaître la distance zénithale actuelle de la mire. Celle-ci, ajoutée à l'indication primitive du microscope moyen, ou retranchée, selon la direction du transport, relativement au sens dans lequel la graduation procede, fera connaître l'erreur de collimation de la division verticale. Alors cette correction, étant appliquée avec son signe propre à toutes les lectures ultérieures du microscope moyen, donnera les distances zénithales absolues qui y correspondent; ou, par inverse, si les distances sont connues approximativement, elle indiquera le point de la graduation du limbe qu'il faut amener sous le microscope moyen, pour que l'astre désigné traverse le champ du télescope, et puisse être amené sous le fil horizontal, au moyen du rappel qui agit sur le limbe, dans le sens vertical.

304. Cette dernière indication se trouvera toujours suffisamment précise pour son usage approximatif, avec un instrument bien exécuté et bien réglé; mais on ne peut pas espérer autant de la première, dont l'exactitude importe bien davantage. Pour que l'erreur de collimation, ainsi déterminée par des observations faites près de l'horizon, puisse être appliquée généralement, il faut qu'on soit assuré qu'elle est constante dans toutes les inclinaisons du télescope autour de la verticale, ce que l'on trouve aujourd'hui n'avoir pas lieu dans les cercles muraux fixes. Elle doit vraisemblablement varier bien plus encore dans le cercle de Palerme, ne fût-ce que par les mouvements de transport communiqués à l'anneau supérieur dans lequel le sommet de l'axe de rotation s'engage, lorsque les colonnes fixes et les arcs terminaux qui le soutiennent éprouvent des variations inégales de température, dont il est presque impossible de les préserver. Piazzi avait bien

remarqué ces effets sans en découvrir la cause; et il les trouvait surtout énormes quand il observait le soleil, dont la radiation devait affecter alors spécialement les parties de l'instrument qui s'y trouvaient exposées. Aussi ne crut-il pouvoir mieux faire que de chercher à en éluder les conséquences en mesurant les distances méridiennes des astres, comme celles des mires fixes, par des observations faites à différents jours, dans des positions azimutalement interverties du limbe; de manière à obtenir les doubles distances absolues, indépendamment de toute erreur locale ou actuelle de collimation. Mais alors, pour ramener ces mires célestes à la fixité supposée, il fallait appliquer à la mesure de chaque jour, des corrections dépendantes de la réfraction actuelle, de la précession, de la nutation et des mouvements propres qui affectent ces astres. Or, quoique la différence survenue dans ces éléments reste seule dans les résultats définitifs, son évaluation calculée comporte toujours des incertitudes qu'elle leur communique, et que l'on ne doit plus aujourd'hui consentir à tolérer.

305. D'après cet exposé, on se demandera peut-être pourquoi j'ai analysé avec tant de détails un instrument jusqu'à présent unique, et dont les avantages sont loin d'être proportionnés à la complication du mécanisme de sa construction. Je l'ai fait par plusieurs motifs. D'abord, en l'expliquant, j'ai préparé l'analyse des cercles répétiteurs portatifs qui opèrent aussi par retournement, et dont la manœuvre est la même en beaucoup de points. Or, en montrant les imperfections du cercle de Palerme, parmi lesquelles il s'en trouve dont ils sont exempts, d'autres qu'ils partagent, on sentira mieux les causes de leurs bonnes qualités, comme des imperfections qui leur restent; imperfections qui peuvent être atténuées à un tel point, que, malgré la petite dimension de ces instruments, on peut en obtenir des résultats au moins aussi exacts que ceux qu'ont jusqu'à présent donnés les grands cercles fixes des observatoires les plus renommés. Enfin, ayant soumis à l'appréciation de M. Gambey les imperfections qui me semblaient exister dans le célèbre instrument de Palerme, surtout en ce qui concerne le mode de suspension de son sommet sur de grandes colonnes métalliques, dont l'inégalité de température doit fréquemment le

faire osciller, cet habile artiste m'a indiqué aussitôt une modification, qui ferait complétement disparaître ce défaut, en conservant à l'instrument tous ses avantages. Ce serait de fixer le support supérieur de l'axe de rotation vertical, au sommet d'une voûte, dans l'intérieur de laquelle cet axe descendrait jusqu'au sol, où sa pointe reposerait sur une douille portée par un système de cercles horizontaux à rappels rectangulaires, comme dans la construction de Ramsden. Ainsi préservé contre les oscillations latérales, il porterait sur sa tête tout le reste de l'instrument, semblable à celui de Palerme, avec ses deux limbes rectangulaires, ajustés de la même manière et susceptibles des mêmes mouvements. Cette modification, aussi simple qu'ingénieuse, assurerait à l'axe de rotation une invariable stabilité. Si, dans l'avenir, deux instruments pareils étaient établis dans le même observatoire, par la munificence d'un gouvernement ou d'un prince, on peut croire que leur emploi simultané offrirait le dernier degré de précision, auquel les sens de l'homme puissent atteindre.

306. En redescendant aux réalités, malheureusement bien inférieures à cette espérance, on voit qu'un cercle à mouvement azimutal comme celui de Palerme, étant employé par retournes, ainsi que le faisait Piazzi, donnera, de même que les cercles fixes, des distances méridiennes absolues, dont les erreurs devront être déjà fort petites. Les cercles répétiteurs portatifs qui opèrent d'une manière semblable fournissent encore des résultats pareils. On les déduit des distances zénithales des astres, observées un peu avant et après leurs passages dans le méridien, auquel on les ramène par des corrections dépendantes de leur écart actuel, mesuré par le temps dont chaque observation précède ou suit l'instant précis où l'astre observé y arrive. Quoique cette réduction se fasse d'après la connaissance des lois du mouvement diurne, et qu'ainsi sa réalisation les suppose, comme on a soin de se maintenir assez près du méridien pour qu'elle soit toujours fort petite; on peut, sans erreur logique, l'introduire, par anticipation, dans les résultats que l'on veut faire servir à l'exposition des phénomènes. Car, en agissant ainsi, on ne fait qu'épargner à l'esprit les premières déterminations imparfaites qu'on établirait sur les résultats approximatifs où ces

etites corrections seraient négligées ; et on lui présente, de prime bord, les conséquences définitives auxquelles on parviendrait par ne seconde évaluation où l'on en tiendrait compte, après que leur écessité, ainsi que leurs valeurs, seraient démontrées. Le lecteur ıtelligent peut donc toujours concevoir qu'il a suivi idéalement ette marche successive, et admettre la réalité des résultats défiitifs, d'après leur accord précis avec les phénomènes observables, e même qu'on peut admettre l'exactitude des racines d'une équaon numérique, quand on s'est assuré qu'elles y satisfont comlétement.

D'après ces remarques, je pourrai dès à présent employer les aleurs définitives des distances méridiennes obtenues par un quelonque des procédés que je viens d'expliquer ; et comme l'emploi es cercles répétiteurs portatifs est celui qui est à la portée du plus rand nombre d'observateurs, je me servirai par préférence, des ésultats qu'on en déduit. Je vais donc essayer d'en faire ici l'appliation à la recherche de l'axe du rotation du ciel, dans l'idée que e mouvement diurne pourrait coïncider dans ses apparences avec n mouvement circulaire rigoureux.

307. Si, par l'effet du mouvement diurne, toutes les étoiles dérivent des cercles ayant leurs centres sur un même axe de rotation, t dont les plans lui soient perpendiculaires, comme les apparences emblent l'indiquer, un observateur qui serait placé précisément ır cet axe verrait toutes les étoiles, dans leurs passages consécufs au méridien, s'en écarter également au-dessus et au-dessous ; e sorte que la direction de l'axe serait exactement intermédiaire ntre les distances méridiennes d'une même étoile au zénith. Car, oient NZM, *fig.* 91, le plan du méridien qui contient l'axe de otation ; NM la projection du plan de l'horizon, ou la ligne médienne ; OZ la verticale ; OS′, OS″ les rayons visuels menés de observateur O, à l'étoile, dans ses deux passages ; enfin OP la diection de l'axe de rotation que l'on suppose aussi passer par l'œil e l'observateur. Cela posé, si l'étoile décrit ou paraît décrire un ercle autour de l'axe OP, le diamètre visuel S′S″, de ce cercle, era divisé par l'axe, au point P en deux parties égales ; et les anles POS′, POS″, l'un au-dessus, l'autre au-dessous de cet axe,

seront égaux entre eux. De là il suit que l'angle POZ, ou la distance de l'axe de rotation au zénith, sera égal à la demi-somme des distances méridiennes S'OZ, S''OZ de l'étoile dans ses deux passages; ou, ce qui revient au même, il sera une moyenne arithmétique entre ces distances.

308. Ce raisonnement s'applique à toutes les étoiles dont on voit la révolution entière. Ainsi, en les comparant dans leurs passages supérieurs ou inférieurs, elles devront toutes s'accorder à donner le même résultat moyen, et, par conséquent, la même distance du zénith à l'axe de rotation. On voit également que ce caractère est particulier à la position de l'observateur que nous avons supposée. La même condition n'aurait plus lieu si l'axe de rotation ne passait pas par l'œil de l'observateur; et la demi-somme des distances méridiennes d'une même étoile ne serait plus constante. L'observation de ces distances, en divers lieux de la terre, est donc propre à nous apprendre si quelqu'un des points de sa surface est situé sur l'axe de rotation du ciel.

309. Mais, comme la réfraction causée par l'atmosphère augmente les hauteurs apparentes des astres, et, par conséquent, diminue leur distance au zénith, ainsi que nous l'avons déjà reconnu, il faudra avoir égard à cette altération en comparant les distances méridiennes, et emprunter pour cela, dans les Tables de réfractions, les corrections convenables pour chaque distance. Ceci, au reste, ne sera point une pétition de principes; car, bien que les corrections données par ces Tables puissent se tirer des observations elles-mêmes, ainsi qu'on le verra bientôt, on peut cependant les déduire aussi, et avec une rigueur au moins égale, d'expériences purement physiques sur la constitution de l'atmosphère et sur la force réfringente de l'air, indépendamment d'aucune donnée astronomique, comme nous l'avons vu également.

310. Ceci bien entendu, je prendrai d'abord pour exemple les observations suivantes, de distances méridiennes, faites par Méchain, au fort de Montjouy, près Barcelone, avec un cercle répétiteur portatif. Elles ont été faites à de petites distances du méridien;

Distan

DÉSIGNATION DES ASTRES.	
1792. 27 décembre. *Polaire.* Passage su	
Même jour. *Polaire.* Passage inf	
1793. 3 février. *β de la petite Ourse.* P	
7 février. *β de la petite Ourse.* P	
1793. 20 janvier. *ν du Dragon.* Passage	
22 janvier. *ν du Dragon.* Passage	
1793. 8 janvier. *ζ de la grande Ourse.* P	
Même jour. *ζ de la grande Ourse.* P	

Distances zénithales méri

DÉSIGNATION DES ASTRES.	
1798. 31 décembre. *Polaire.* Passage sup	
1799. 4 janvier. *Polaire.* Passage inf	
1799. 16 janvier. *β petite Ourse.* Passage	
18 janvier. *β petite Ourse.* Passage	

Distances zén

DÉSIGNATION DES ASTRES.	
1799. 25 juillet. *Polaire.* Passage supéri	
1799. 15 juin. *Polaire.* Passage inférie	
1799. 21 juin. *β petite Ourse.* Passage su	
29 août. *β petite Ourse.* Passage in	

ı à ce plan par les corrections de calcul
je ne rapporte que les résultats ainsi ré-

onne de nombres n'a pas besoin d'explica-
n voit les distances moyennes apparentes, ou
ances supérieure et inférieure, telle qu'elle
ıt des observations. Ces distances moyennes
tre elles; cependant elles ne s'accordent pas
s si l'on prend, dans les Tables de réfrac-
qui s'y rapportent dans les circonstances
ıées, et qu'on ajoute ces corrections, qui
ves, aux distances zénithales données imméation, on aura des distances vraies, telles
ées sans l'interposition de l'atmosphère; et
que, entre ces deux distances, sera la dis-
, dont on voit les valeurs dans la dernière
ıleurs s'accordent entre elles de manière à
. Car, celle qui s'écarte le plus des autres
se, pour laquelle la réfraction est de beau-
ı son passage inférieur; de sorte qu'il peut
ıcertitude sur cet élément, même en se ser-
ffet, très-près de l'horizon, les variations
causent beaucoup d'irrégularité dans les
ous l'avons remarqué. D'ailleurs, nous ne
ux séries d'observations de chaque étoile.
ıte plus d'exactitude si nous en réunissions
, dont nous prendrions la moyenne. Enfin,
nne ζ de la grande Ourse, comparée à la
iles plus hautes, est lui-même une quantité
ettes de nos cercles, où il répond à peu près
ıdu par l'épaisseur du fil; d'où l'on con-
ble que l'on se trompe de cette quantité dans

ıtions de l'ouvrage de Delambre intitulé : *Base du*
. Les nombres que je rapporte sont ceux qu'il a
sans aucun changement.

une seule série d'observations (*). Il est donc naturel de regarder les différences données par nos diverses étoiles comme accidentelles, et comme susceptibles de disparaître si on accumulait les observations. Alors l'accord qu'elles présentent prouve que l'axe de rotation du ciel passait, à Montjouy, par l'œil de l'observateur.

312. Mais, ce qui est bien remarquable, ces résultats ne sont pas particuliers au lieu où Méchain se trouvait alors ; car, à la suite des observations de Montjouy, j'en ai rapporté d'autres faites à Paris par Delambre, et elles donnent, pour les différentes étoiles, des distances moyennes qui s'accordent également les unes avec les autres.

313. Enfin, pour montrer que cet accord n'est point l'effet du hasard, j'ai encore rapporté dans un troisième tableau d'autres observations faites par Méchain, à l'Observatoire de Paris, c'est-à-dire dans un lieu bien peu éloigné de l'observatoire de Delambre. Elles donnent, pour la distance moyenne, des valeurs absolues différentes des précédentes ; mais ces moyennes s'accordent aussi entre elles, ou du moins les écarts qu'elles présentent sont si petits, qu'on peut les regarder pareillement comme accidentels.

Dans quelque lieu de la Terre que l'on observe, et l'on a observé dans un très-grand nombre, on trouve constamment ce même accord, abstraction faite des petites erreurs irrégulières des observations : *l'axe de rotation du ciel semble toujours passer par l'œil de l'observateur.*

314. Cette singulière apparence ne peut s'expliquer que d'une manière : en supposant que l'axe de rotation du ciel passe par l'intérieur de la Terre, et en admettant, de plus, que les dimensions de la Terre, comparées à l'éloignement des étoiles, sont d'une petitesse presque infinie. Alors, en effet, les rayons visuels menés des divers points de la Terre à une même étoile doivent paraître parallèles ; ou, ce qui revient au même, la Terre, vue de la distance des étoiles, ne sera, dans les espaces célestes, que comme

(*) Cela était surtout vrai du temps de Méchain, en observant avec les cercles portatifs de construction imparfaite que l'on possédait alors. On obtient bien plus de précision avec les cercles actuels de M. Gambey, surtout en leur appliquant un mode d'observation que j'indiquerai ultérieurement.

un point dont les dimensions sont insensibles. C'est la conclusion à laquelle nous étions déjà parvenu dans le tome Ier, page 57, § 48, par les simples observations du gnomon; mais ici elle se trouve établie avec une précision infiniment plus rigoureuse.

318. Ce résultat est confirmé par tous les phénomènes astronomiques. Les étoiles, vues dans les plus forts télescopes, qui grossissent jusqu'à 2000 fois les dimensions des images, n'ont pas encore un disque d'une étendue appréciable. Elles paraissent comme des points brillants. Cependant, avec ces instruments, on les voit comme si elles étaient 2000 fois plus rapprochées de nous. Si l'on n'y observe pas de différence, c'est une preuve que ces astres sont à une distance immense de nous, puisqu'ils pourraient se rapprocher dans une pareille proportion, sans que leur diamètre apparent augmentât d'une quantité sensible. Le disque du soleil et celui de la lune étant vus de la même manière, paraissent bien plus grands qu'à la vue simple, surtout la lune, qui laisse ainsi apercevoir sur sa surface des montagnes et des cavités. Le disque des planètes éprouve de même, par le télescope, un grossissement considérable; et quelques-unes d'entre elles, telles que Mercure et Vénus, étant vues de cette manière, présentent des *phases* comme la lune. Ces astres sont donc bien plus rapprochés de nous que les étoiles. Aussi, en les observant de plusieurs points de la Terre, très-éloignés les uns des autres, on parvient à y reconnaître des différences d'aspect qui se manifestent, soit par des mesures immédiates, soit par des phénomènes d'interposition. Ces derniers sont surtout évidents pour la lune. Quand elle éclipse le soleil en s'interposant entre cet astre et nous, l'éclipse n'est jamais générale pour toute la Terre, comme cela devrait être si ces deux corps étaient infiniment éloignés. Il y a toujours certains lieux dans lesquels on voit le disque du soleil tout entier; d'autres le voient éclipsé en partie, et comme échancré par l'interposition d'un corps arrondi, sur une portion de sa surface; d'autres le voient plus échancré encore, selon que leur rayon visuel s'approche plus ou moins de la ligne droite qui joint les centres du soleil et de la lune. Pour le soleil, les différences d'aspect sont presque inappréciables; on ne peut les constater qu'indirectement. Cependant on est parvenu à déterminer l'angle que formeraient

deux rayons visuels menés au soleil des deux extrémités les plus opposées de la Terre, et qu'elle soutendrait étant vue de cet astre. Cet angle est de 17″,6 sexagésimales. De là, on a pu conclure, *géométriquement*, que la distance de la Terre au soleil est, en moyenne, égale à 23439 fois le rayon de la Terre, supposée sphérique. On est parvenu à former sur cette distance, comme base, un triangle rectangle dont le sommet était placé sur une étoile quelconque; et l'angle, au sommet de ce triangle, conclu des mesures les plus précises que l'on a pu faire, s'est encore trouvé absolument insensible, excepté pour une seule, la 61e du Cygne, où on l'a trouvé de 0″,34; encore la petitesse de ce résultat établit plutôt son existence que sa quantité absolue. Cependant, si la distance générale des étoiles n'excédait pas cinq mille millions de fois le rayon de la Terre, on serait certain de la mesurer par ce procédé. Puisque la base employée est encore trop petite pour qu'il soit applicable en général, c'est une preuve que presque toutes les étoiles sont encore beaucoup plus éloignées que cette limite. D'après cela, nous ne devons point nous étonner qu'elles présentent les mêmes aspects dans tous les lieux de la Terre où on les observe; et que l'axe de rotation du ciel, dont la direction traverse la Terre, comme les observations viennent de nous l'apprendre, semble, dans tous les lieux de sa surface, passer par l'œil de l'observateur.

316. La direction de cet axe, prolongée indéfinitivement, déterminera, dans le ciel, deux points opposés, que l'on nomme les *pôles de rotation*, ou simplement les *pôles*, autour desquels les étoiles paraissent tourner, en un jour sidéral, à des distances inégales, et avec d'inégales vitesses, selon la grandeur du cercle visuel où elles sont placées. Un de ces points s'appelle le *pôle nord*, l'autre le *pôle sud*, selon la partie du ciel où il est situé. Le pôle nord est *actuellement* très-voisin de l'étoile qui termine la queue de la petite Ourse, et que nous avons appelée la *polaire*. C'est de là que lui vient cette dénomination. Toutes les étoiles qui, comme la polaire, restent toujours sur l'horizon d'un lieu, et y sont constamment visibles, se nomment, pour ce lieu-là, *étoiles circompolaires*, c'est-à-dire situées autour et près du pôle.

On appelle encore le pôle nord *pôle boréal*, et le pôle sud *pôle austral*. On nomme aussi le premier, *pôle arctique*, c'est-à-dire

situé du côté de la constellation de l'Ourse ; le second, *pôle antarctique*, c'est-à-dire opposé à l'Ourse. Ces dénominations nous viennent des Grecs.

317. Les observations de distances méridiennes que nous avons rapportées, et celles du même genre que l'on peut faire dans tous les lieux de la Terre, détermineront la distance du zénith de l'observateur à l'axe de rotation du ciel, distance dont le complément sera l'inclinaison de cet axe sur l'horizon du lieu ou *la hauteur du pôle*. Et comme, à cause de la rondeur de la Terre, le plan de l'horizon prend, dans chaque pays, une direction diverse, relativement aux points de l'espace, l'axe de rotation paraîtra inégalement incliné sur les horizons des différents pays. Par exemple, les observations de Méchain, à Montjouy, étant réunies, donnent 48° 38′ 15″,04 pour la distance angulaire du pôle au zénith, d'où il résulte 41° 21′ 44″,96 pour la hauteur du pôle sur l'horizon de Montjouy. A Paris, à l'Observatoire, cette même hauteur est 48° 50′ 13″, d'après les observations de Méchain que nous avons rapportées ; ce qui s'accorde avec la moyenne de plus de 5000 observations faites par lui et Delambre.

Avec cette donnée, on peut définir facilement, pour chaque lieu, la limite de distance polaire des étoiles dont le cercle diurne est tout entier au-dessus de l'horizon, et que l'on peut proprement y appeler étoiles circompolaires. Car cette distance limite est évidemment égale à la hauteur locale du pôle.

D'après les observations les plus précises et les plus longtemps continuées, la direction du plan du méridien et la hauteur du pôle restent invariablement constantes dans chaque lieu de la Terre. Ainsi l'axe de rotation du ciel conserve toujours exactement la même situation relativement aux points de la masse terrestre. Mais la position du pôle parmi les étoiles, qui indique la direction de cet axe, change progressivement avec une continuité lente, tandis qu'elles conservent entre elles les mêmes positions relatives et présentent toujours les mêmes configurations. De là résulte cette alternative : ou l'axe diurne se déplace dans l'espace relativement aux étoiles, par un mouvement que la Terre partage, ou les étoiles se déplacent toutes simultanément par rapport à lui. Une telle concordance de mouvement dans tant de corps si immensément

éloignés les uns des autres, sur toute l'étendue du ciel, serait infiniment moins concevable, comme effet de forces physiques, que ne le serait un mouvement unique exécuté par la Terre, dont l'axe de rotation, passant toujours par les mêmes points de sa masse, oscillerait avec elle de manière à se diriger successivement vers les divers points de l'espace stellaire, où nous voyons le pôle successivement transporté. Cette considération suffirait donc déjà pour présenter le déplacement du pôle comme une apparence liée aux particularités du mouvement de rotation diurne de la Terre sur elle-même, et non du ciel. Mais la vérité de cette induction devient certaine, lorsque la découverte de l'attraction universelle montre que l'axe de rotation de la Terre doit, en effet, exécuter de pareils mouvements, suivant les mêmes lois précises, en vertu des forces physiques qui agissent sur la masse terrestre, dans les circonstances de lieu et de configuration qui lui sont données.

318. Si le mouvement diurne, réel ou apparent, des astres s'opère circulairement autour de l'axe rectiligne que nous venons de découvrir, il doit exister, entre les positions successives d'un même astre sur l'horizon, certains rapports géométriques dépendants de cette loi. C'est, en effet, ce qui a lieu avec la dernière exactitude, comme on le verra dans le chapitre suivant.

319. Mais auparavant, pour compléter les notions que j'ai données, relativement à l'usage des instruments à lunettes et à réticule, je dois indiquer comment on observe les distances zénithales méridiennes des astres dont le disque a une étendue sensible, tels que le soleil, la lune, et la plupart des planètes. L'artifice que l'on emploie est le même que pour les passages au méridien : on observe successivement les hauteurs des deux bords et l'on prend le milieu entre elles. Cette opération est facile lorsque le réticule de la lunette contient un fil mobile parallèlement au fil fixe horizontal. Mais, lorsqu'on la fait avec le même fil fixe, comme cela se pratique quelquefois, elle exige de la promptitude et de la dextérité, parce que ces deux observations doivent se faire pendant que l'astre traverse le champ de la lunette; de sorte que, si l'on commence par mettre le fil horizontal en contact avec son bord supérieur, il faut lire promptement la distance au zénith sur le limbe divisé, et mettre ensuite le fil en contact avec l'autre bord avant que l'astre

soit sorti du champ. Pour avoir le temps nécessaire, on fait la première observation un peu avant que le sommet du disque arrive au fil vertical, et la seconde un peu après qu'il l'a dépassé. Il est vrai que, par ce moyen, aucune des deux distances n'est observée exactement dans le plan du méridien, mais à une très-petite distance de ce plan. Toutefois, il n'en peut ordinairement résulter qu'une très-petite erreur, parce que le mouvement de l'astre étant alors presque horizontal, un écart de quelques secondes, à droite ou à gauche du sommet de son arc diurne, doit le présenter sous le fil horizontal à des distances du zénith sensiblement pareilles. On pourrait s'en assurer par le calcul, mais l'expérience le prouve, puisque le bord du disque, une fois placé sur le fil horizontal, le suit dans toute son étendue comme ferait une étoile. Cependant, si l'astre avait un mouvement propre en déclinaison très-rapide, on serait obligé d'y avoir égard dans des observations très-exactes, et cela a lieu pour la lune.

Je n'ai pas besoin de rappeler la nécessité d'éclairer les fils du micromètre pendant la nuit, non plus que l'usage du verre noirci pour les observations du soleil. Ce que nous avons dit sur cet objet, à l'égard des passages, s'applique complétement ici.

320. Jusqu'à présent nous n'avons pas eu égard à l'épaisseur du fil, c'est-à-dire à l'angle visuel qu'il soutend dans la lunette du micromètre. Mais, à parler exactement, si l'on met successivement le fil en contact extérieur avec les deux bords du disque, chaque distance zénithale obtenue est affectée d'une petite erreur. Car, dans ces deux cas, l'axe optique de la lunette passe toujours par le centre du fil, et c'est cet axe qui détermine sur le limbe l'extrémité de l'arc observé. La distance zénithale obtenue par le contact du bord supérieur du disque est donc moindre que la réelle, d'une quantité égale à la moitié de l'angle visuel que soutend le fil; et la distance obtenue par le contact du bord inférieur est trop forte d'une égale quantité. Ces deux erreurs se compensent ainsi exactement dans le calcul de la distance moyenne du centre, qui est la demi-somme des précédentes.

La compensation n'a plus lieu lorsque l'on veut mesurer par cette méthode le *diamètre apparent* du soleil, ou en général d'un astre quelconque. Car, alors on prend la différence des distances

zénithales des deux bords; et, dans cette opération, les deux erreurs dues à l'épaisseur du fil s'ajoutent au résultat réel. Il faut donc, pour avoir le diamètre apparent véritable, retrancher de cette différence le diamètre apparent du fil. Ce diamètre apparent est assez difficile à déterminer. On n'a pas même sur cela de méthode bien exacte. Mais on peut en approcher beaucoup, en mesurant exactement l'épaisseur linéaire du fil, sa distance à l'objectif, et calculant, d'après ces données, l'angle visuel qu'il doit soutendre dans la lunette; ou encore, en observant l'étendue de l'espace qu'il couvre sur un objet éloigné, placé à une distance connue. On conçoit qu'il importe de diminuer cet angle autant qu'il est possible, et pour cela on emploie les fils les plus fins que l'on puisse se procurer. Les conditions de leur choix sont les mêmes que pour l'instrument des passages, et je les ai expliquées page 276.

Si l'on avait le dessein d'observer spécialement les diamètres apparents, on pourrait encore éluder l'effet de l'épaisseur du fil, en rendant le fil tangent extérieurement à l'un des bords et intérieurement à l'autre. Les distances zénithales des deux bords seraient alors toutes deux trop petites ou toutes deux trop grandes d'une égale quantité. Ainsi la différence donnerait le diamètre apparent de l'astre avec exactitude. Mais alors la distance méridienne du centre serait affectée d'une erreur égale à la demi-épaisseur du fil. Ceci fournirait même un nouveau moyen de déterminer cette épaisseur en rendant tour à tour le contact intérieur ou extérieur, et comparant les diamètres apparents d'un même objet obtenus par ces divers procédés. Au reste, les diamètres apparents des astres qui ne soutendent qu'un très-petit angle visuel, comme les planètes, se déterminent beaucoup mieux par l'emploi des prismes biréfringents appliqués extérieurement à l'oculaire, selon la méthode employée par M. Arago, que j'ai décrite page 178. Alors, quand on veut déterminer seulement la distance zénithale du centre du disque de ces astres, au moment du passage méridien, on le bissecte immédiatement à vue, par le fil horizontal du réticule. Car l'expérience prouve qu'un œil exercé apprécie très-exactement cette bissection, lorsque le disque observé est très-petit.

CHAPITRE XV.

Détermination exacte des lois du mouvement diurne. Preuve que ce mouvement est circulaire. Preuve qu'il est uniforme. Mesure du temps par les arcs célestes.

321. Soient, dans un lieu quelconque de la Terre, *fig.* 92, NEM le plan de l'horizon, NOM la ligne méridienne, EO la perpendiculaire, OZ la verticale, ce qui forme, comme nous l'avons vu, un système complet de coordonnées rectangulaires. Soit de plus OP l'axe de rotation du ciel passant en O par l'œil de l'observateur. Menons un rayon visuel OS à une étoile quelconque S : l'angle POS, formé par ce rayon avec l'axe de rotation, se nomme la *distance polaire* de l'étoile. Si l'étoile se meut circulairement autour du pôle, cette distance doit être invariable, et l'angle POS doit rester constant dans toutes les situations de l'étoile sur l'horizon.

322. Reste à trouver à chaque fois cet angle POS. Cela est facile lorsque l'on connaît l'azimut de l'étoile, sa distance au zénith, et la distance du zénith au pôle, c'est-à-dire les angles NOA, ZOS et ZOP. Il suffit alors de résoudre un triangle sphérique. Car si, du point O, comme centre, on conçoit une sphère d'un rayon quelconque, qui coupe l'axe de rotation, le rayon visuel, et la verticale, aux points p, s et z, les arcs pz, zs, ps, qui joindront ces trois points sur la sphère, formeront un triangle sphérique, où l'on connaîtra les côtés zp et zs qui sont les distances du pôle et de l'astre au zénith, plus l'angle pzs formé par le méridien pz avec le vertical zs de l'astre ; car cet angle est égal à l'azimut NOA du vertical, compté du nord. Avec ces données, on connaîtra donc, par le calcul, le troisième côté ps, ou la distance polaire de l'astre. Je rapporte ici en note la formule de laquelle on peut le déduire, et je donnerai dans un moment des

exemples numériques de son application à des astres réellement observés (*).

323. Or, en effectuant ce calcul pour une étoile quelconque,

(*) Soient, *fig.* 92, A_n l'azimut de l'astre compté du nord vers l'est, Z la distance zénithale, D la distance du pôle au zénith dans le lieu de l'observation, distance que je suppose déterminée préalablement par des distances zénithales méridiennes d'étoiles circompolaires. Nommons enfin Δ la distance polaire de l'astre qui est l'inconnue que l'on veut calculer. Les règles de la trigonométrie sphérique donnent la relation suivante :

$$(1) \qquad \cos\Delta = \sin Z \sin D \cos A_n + \cos Z \cos D.$$

Je fais subir à cette formule une transformation qui en facilitera le calcul numérique. Pour cela, je remplace d'abord $\cos A_n$ par son expression équivalente $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}A_n$; et, en rassemblant les termes indépendants de A_n, qui résultent de cette substitution, j'ai

$$\cos\Delta = \cos(Z - D) - 2\sin Z \sin D \sin^2\tfrac{1}{2}A_n.$$

Alors je remplace de même $\cos\Delta$ et $\cos(Z - D)$ par leurs expressions équivalentes $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}\Delta$; $1 - 2\sin^2\frac{1}{2}(Z - D)$; puis, supprimant le facteur 2 qui se trouve commun à tous les termes de l'équation, elle devient

$$(2) \qquad \sin^2\tfrac{1}{2}\Delta = \sin^2\tfrac{1}{2}(Z - D) + \sin Z \sin D \sin^2\tfrac{1}{2}A_n.$$

Quand on voudra l'appliquer, on calculera séparément les valeurs numériques des deux termes qui composent le second membre, leur somme donnera la valeur de $\sin^2\frac{1}{2}\Delta$; d'où l'on tirera $\sin\frac{1}{2}\Delta$ par une extraction de racine carrée. Ces calculs s'effectuent très-aisément par logarithmes, et il ne faut jamais les faire autrement. Le logarithme de $\sin\frac{1}{2}\Delta$ étant trouvé, les Tables trigonométriques feront connaître l'arc $\frac{1}{2}\Delta$ qui y correspond; et, en le doublant, on aura Δ, qui est l'inconnue cherchée. La racine $\sin\frac{1}{2}\Delta$ devra toujours être prise avec le signe positif, parce que l'arc Δ, qui se compte toujours à partir du pôle comme centre, ne peut pas acquérir une valeur négative dans nos constructions. Mais l'interprétation de $\sin\frac{1}{2}\Delta$, de même que celle de $\cos\Delta$, comporterait nécessairement une ambiguïté, parce qu'un même sinus ainsi qu'un même cosinus appartient toujours à deux arcs distincts dans une même circonférence. Je dirai tout à l'heure comment on peut décider cette alternative dans les applications.

J'ai affecté à l'azimut A l'indice n, pour rappeler que, dans les formules, je le suppose compté à partir du point nord, en allant vers l'est. Si l'on voulait le compter suivant des conventions différentes, il faudrait les introduire dans la formule primitive (1) ou dans la formule finale (2), en y remplaçant A_n par sa valeur en fonction de la nouvelle expression que l'on

dans tous les points de son cours où on peut la suivre, on trouve toujours la même distance polaire *ps* : *le mouvement diurne des étoiles autour des pôles est donc exactement circulaire.*

On a même, sur cela, une vérification très-simple, en ce que cette

---

voudrait adopter. Par exemple, supposons que l'on fasse commencer la numération de ces arcs au point sud, en la continuant vers l'est, comme c'était l'usage de Piazzi. Alors, si on les désigne par A_s, leur relation avec A_n, pour un même astre, sera évidemment

$$A_s + A_n = 180;$$

ce qui donne $$A_n = 180^\circ - A_s;$$

et par suite $$\cos A_n = -\cos A_s.$$

Cette expression de $\cos A_n$ substituée dans le second membre de l'équation primitive (1), donne à son premier terme le signe négatif; et si ensuite on lui applique le même mode de transformation dont nous avons fait usage, on trouve finalement

$$(3) \qquad \sin^2 \tfrac{1}{2} \Delta = \sin^2 \tfrac{1}{2} (Z + D) - \sin Z \sin D \sin^2 \tfrac{1}{2} A_s.$$

Mais cette seconde expression donne pour $\sin \frac{1}{2} \Delta$ exactement la même valeur numérique que la précédente, et l'on peut s'en convaincre généralement sans passer aux nombres. Car, si l'on y remplace $\frac{1}{2} A_s$ par sa valeur $90^\circ - \frac{1}{2} A_n$, le facteur $\sin^2 \frac{1}{2} A_s$ se change en $\cos^2 \frac{1}{2} A_n$ ou $1 - \sin^2 \frac{1}{2} A_n$; et cette expression substituée reproduit *exactement* la formule (2). Toute autre convention que l'on voudrait faire sur la numération des azimuts pourrait s'introduire immédiatement dans cette formule par le même procédé de substitution. En conséquence, j'emploierai désormais généralement la seule formule (1); et, convenant de compter toujours les azimuts A, en allant du point nord vers l'est, comme elle le suppose, je supprimerai l'indice *n* que j'y avais attaché pour spécialiser ce mode de numération.

Dans les applications numériques, l'azimut A, ainsi défini, devra être évalué continûment dans le même sens depuis 0° jusqu'à 360°. Alors, en donnant aux lignes trigonométriques qui en dépendent, les valeurs et les signes que sa grandeur exige, selon les divers quadrans où il se limite, on n'aura aucun besoin de construire des figures particulières pour les divers problèmes où il sera employé comme élément, soit donné, soit inconnu.

Il me reste à parler des ambiguïtés qui se présentent dans l'évaluation absolue de l'angle Δ, quand on veut le conclure des valeurs de $\cos \Delta$ ou de $\sin \frac{1}{2} \Delta$ qui y correspond, et qui sont seules données par nos formules. On les lève en considérant d'abord que l'arc Δ doit toujours être pris avec le signe positif; et ensuite que, dans aucune observation réelle, il ne peut sur-

valeur constante est précisément la distance polaire de l'astre qui s'observe immédiatement dans le plan du méridien ; car alors le vertical de l'astre est le méridien lui-même. Si l'astre passe au méridien au sud du zénith, *fig.* 93, l'angle dièdre *pzs* ou SOA, *fig.* 92, est égal à deux angles droits, et la distance polaire *pz* est la *somme* des distances zénithales de l'astre et du pôle. Si, au contraire, l'astre passe au méridien au nord du zénith, *fig.* 94 et 95, l'angle NOA, *fig.* 92, est nul, et la distance polaire est la *différence* des distances zénithales de l'astre et du pôle.

324. Pour faire constater par des exemples réels cette rigoureuse circularité avec laquelle s'accomplit le mouvement diurne du ciel, je

---

passer 180°, puisque tous les points du ciel sont à une distance moindre du pôle visible d'où les Δ se comptent.

Pour montrer les applications de ces deux règles, supposons d'abord $A_n = 0$, ce qui place le vertical d'observation au nord du zénith, en le faisant coïncider avec le méridien même; on aura alors

$$\cos A_n = +1 ; \qquad \sin \tfrac{1}{2} A_n = 0 ;$$

et ces valeurs étant introduites dans nos formules, il en résultera :

par la formule (1), $\cos \Delta = \cos (Z - D)$;
par la formule (2), $\sin^2 \tfrac{1}{2} \Delta = \sin^2 \tfrac{1}{2} (Z - D)$.

L'arc Δ devant être moindre que 180°, la valeur trouvée pour cos Δ n'admet que deux interprétations, savoir :

$$\Delta = Z - D, \qquad \text{ou} \qquad \Delta = -(Z - D) = D - Z.$$

Mais, de ces deux expressions, l'une sera nécessairement positive, l'autre négative. C'est la positive seule qu'il faut admettre. En conséquence, on prendra Δ égal à Z — D si Z surpasse D, comme dans la *fig.* 95, c'est-à-dire si l'astre observé se trouvait dans son passage inférieur, au delà du pôle. Au contraire, on devra prendre Δ égal à D — Z si D surpasse Z, comme dans la *fig.* 94, c'est-à-dire si l'astre était observé dans son passage supérieur, entre le pôle et le zénith. L'expression de $\sin \frac{1}{2} \Delta$ s'interprétera par des considérations semblables qui conduiront, dans chaque cas, au même résultat.

Transportons maintenant le vertical d'observation au point sud de l'horizon, ce qui le fera encore coïncider avec le méridien, après avoir ainsi tourné d'une demi-circonférence, en passant par le point est. Cette nouvelle

DÉSIGNATION des astres observés.
α petit Chien (Procyon)...
α Lyre.....
α Taureau (Aldébaran)...

NOTA. Ces observations o
des distances zénithales d
qui les affectaient dans c
précédent, avait été égalem
réfraction actuelle qui les
faites hors du méridien, P
répondit à une division ent
réticule, dans l'axe optiqu
l'étoile se trouvait dans le c
de la graduation était plus

= cette page, des tableaux numériques qui présen-
étoiles les évaluations de leur distance polaire, con-
simultanées des azimuts et des distances zénithales,
hacune d'elles dans les diverses positions appa-
duite le mouvement révolutif du ciel. Je rapporte
ances zénithales immédiatement observées dans
puis la réfraction actuelle qui les affecte indi-
t qui se calcule d'après les indications contem-
ɔmètre et du thermomètre, conformément à la
dans le tome Ier, chap. VII. De là, je conclus les
ıles vraies, telles qu'on les aurait observées sans
e l'atmosphère; et de celles-ci, combinées avec
ile se trouvait alors, je déduis l'arc qui exprime

---

ra $A_n = 180$; et par suite

$$\cos A_n = -1; \qquad \sin \tfrac{1}{2} A_n = +1.$$

ntroduites dans nos formules, il en résultera,

$$\cos \Delta = \cos (Z + D);$$
$$\sin^2 \tfrac{1}{2} \Delta = \sin^2 \tfrac{1}{2} (Z + D).$$

ée pour $\cos \Delta$ comporte analytiquement deux interpré-

$$\Delta = Z + D \qquad \text{et} \qquad \Delta = -(Z + D).$$

seule est admissible astronomiquement, puisque Δ ne
itif. La justesse de son application est évidente. L'astre
le méridien au sud du zénith, *fig.* 93, il se trouve alors
ıupérieur. Sa distance polaire Δ doit donc être égale à sa
ıctuelle, plus la distance du zénith au pôle. L'expression de
te par les mêmes règles et conduit à la même consé-

es principes, on arrivera aussi sûrement aux véritables
tous les cas intermédiaires à ceux que nous venons d'exa-
ré ici dans ces détails minutieux, parce que toutes les
omie qui se résolvent par des expressions trogonomé-
des ambiguïtés de ce genre, qui se décident par des rai-
s, tirés des caractères réels, analytiques ou géométriques,
angulaires, représentées par les symboles algébriques,
chaque application.

sa distance polaire actuelle, d'après les formules que j'ai exposées dans la note annexée à la page 396. Ces arcs, rapportés dans l'avant-dernière colonne du tableau, y sont comparés à la distance polaire vraie de chaque étoile, conclue immédiatement des observations faites dans le méridien même. La dernière colonne montre avec quelle extrême précision elles y sont conformes. Les petites différences qu'on y remarque sont de l'ordre des erreurs qu'on ne saurait éviter dans de pareilles observations; et l'irrégularité capricieuse de leurs signes propres montre bien qu'elles sont purement accidentelles. Les éléments de ce tableau sont tirés d'observations simultanées d'azimut et de distances zénithales, faites par Piazzi, avec le cercle de Palerme, pour un autre but. A l'époque où vivait ce grand astronome, on ne savait pas encore calculer immédiatement les réfractions par une théorie exacte, d'après les indications du baromètre et du thermomètre. On les concluait empiriquement des observations, en admettant la circularité du mouvement diurne (*). Piazzi avait cherché à les conclure des observations simultanées des distances zénithales et des azimuts, en prenant, comme constante, la distance polaire observée dans le méridien même. Mais l'expérience lui a fait voir que des quantités aussi petites et aussi variables que les réfractions atmosphériques, ne peuvent pas être déterminées avec assez de certitude par ce procédé. Aujourd'hui on trouve bien plus sûr de les calculer par la théorie, et l'on ne tente plus de les obtenir par empirisme.

325. Ayant ainsi prouvé que le mouvement diurne est exactement circulaire, on peut se servir, et on se sert en effet, de cette vérité comme d'un principe ou d'une condition géométrique pour calculer complétement la position d'une étoile à un instant quel-

(*) Dans une note placée à la fin du présent volume, j'expose l'emploi que l'on peut faire de cette méthode indirecte, dans les limites d'application auxquelles on doit légitimement la restreindre. Cette discussion établie sur des observations réelles et précises, complétera et confirmera l'exposé que j'ai fait de la théorie des réfractions, dans le chapitre VII du tome Ier, en la déduisant tout entière des seuls principes physiques et mécaniques qui règlent le mouvement de la lumière à travers l'atmosphère terrestre.

ıe, d'après la seule observation de sa hauteur dans ce même ıt; pourvu que l'on connaisse d'ailleurs sa distance au pôle ɹu'on l'observe dans le plan du méridien. Car alors, dans le le sphérique *pzs*, *fig.* 92, on connaît les trois côtés *pz*, *ps* et *zs*, ·nier étant la distance de l'étoile au zénith au moment de l'ob- ɔion. On peut donc calculer les trois angles de ce triangle, à-dire l'angle *pzs* ou NOA qui est l'azimut de l'astre, et les ı *zsp* et *zps*, c'est-à-dire l'angle à l'astre et l'angle au pôle (*). 3. La distance polaire *ps* étant constante pour chaque étoile, ınt toute la durée de sa révolution diurne, ainsi que nous ıs de le démontrer par l'expérience, il s'ensuit que *le rayon* ' OS, *mené à une étoile, décrit, dans son mouvement diurne, urface conique droite, à base circulaire autour de l'axe de on du ciel.* La pointe de cette surface est située dans l'œil de ·rvateur; mais on peut la transporter, par la pensée, au ɔ de la terre, puisque nous avons reconnu que, relativement

---

Soient, comme précédemment, D la distance zénithale du pôle; Z celle ıtre, et Δ sa distance polaire; en nommant A l'azimut demandé, on suivant les formules de la trigonométrie sphérique :

$$\text{ut.... .... } \sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\Delta+D-Z}{2}\right)\sin\left(\frac{\Delta+Z-D}{2}\right)}{\sin Z \sin D}}.$$

ème, si l'on nomme S l'angle à l'astre, et P l'angle au pôle, on aura

$$\text{e à l'astre..... } \sin\tfrac{1}{2}S = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{D+\Delta-Z}{2}\right)\sin\left(\frac{D+Z-\Delta}{2}\right)}{\sin Z \sin \Delta}},$$

$$\text{e au pôle..... } \sin\tfrac{1}{2}P = \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{Z+\Delta-D}{2}\right)\sin\left(\frac{Z+D-\Delta}{2}\right)}{\sin \Delta \sin D}}.$$

choix à faire entre ces formules pour chaque application dépendra de antité cherchée, et des données que l'expérience aura fournies pour nir. Elles sont ici sous leur forme la plus générale, qui peut être avan- sement modifiée dans beaucoup de cas, ainsi que nous aurons occasion reconnaître. Mais cette généralité convenait mieux au but que je me ıse ici.

à l'éloignement des étoiles, les dimensions de la terre sont insensibles.

327. Le résultat auquel nous venons de parvenir indique seulement une relation géométrique entre les directions des rayons visuels menés à une même étoile, dans les diverses parties de sa marche diurne; mais il ne détermine rien relativement à la distance des astres sur les prolongements de ces rayons. Nous devrions donc rester, à ce sujet, dans un doute absolu puisque nous sommes dans une incertitude complète. Mais, comme l'imagination aime à se reposer sur une idée fixe quelconque, nous supposons involontairement tous les astres placés à une grande distance indéfinie, sur les prolongements des rayons qui nous les rendent visibles; et comme nos sens ne nous offrent non plus aucun terme de comparaison, qui puisse nous faire juger si les uns sont plus éloignés, les autres plus près, nous les plaçons encore involontairement à un éloignement égal. C'est là ce qui produit cette apparence de la voûte sphérique étoilée, si belle à observer pendant la nuit dans un temps serein. Si, pour nous prêter à cette illusion de nos sens, nous concevons, par la position apparente de chaque étoile, un plan perpendiculaire à l'axe de rotation du ciel, l'étoile, dans son mouvement diurne, ne sortira pas de ce plan; et sa route ainsi projetée sur le ciel sera une circonférence de cercle, ayant son centre sur cet axe. Dans ce sens, on peut dire : *les cercles que les étoiles semblent décrire par l'effet du mouvement diurne, sont situés dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation du ciel.* Cette conception, purement optique, attribuant à la surface sphérique stellaire un caractère idéal d'illimitation, nous pouvons désormais l'identifier à celle que nous avions décrite, *fig.* 92, avec un rayon arbitraire, pour y établir nos constructions trigonométriques. Cela nous dispensera d'employer des lettres différentes, pour désigner les points de cette sphère géométrique, et les prolongements indéfinis des rayons visuels, comme nous l'avions fait alors.

328. Il ne reste plus qu'à savoir si ce mouvement circulaire des astres est uniforme ou variable. Pour le découvrir, soient S, S′, S″, *fig.* 96, les positions successives d'une même étoile sur son cercle diurne, depuis son passage supérieur au méridien au point M. Les

arcs MS, MS′ seront perpendiculaires au plan du méridien, et aux plans visuels menés à chaque instant par l'étoile et par l'axe de rotation. Étant d'ailleurs décrits autour du pôle P, à une distance angulaire constante, PM ou Δ, ils seront proportionnels aux angles dièdres ZPS, ZPS′, ZPS″, formés avec le plan du méridien, par les plans visuels successifs SOP, S′OP, S″OP.

Reste donc à évaluer ces angles dièdres ZPS. Or, c'est ce qui est facile, puisque dans le triangle sphérique variable ZPS on connaît les trois côtés, savoir : ZP, PS et ZS, dont les deux premiers sont constants, et le troisième est donné par la distance zénithale actuelle de l'étoile, que l'on peut observer. C'est une application des formules rapportées en note dans la page 401. En effectuant ce calcul, et comparant les valeurs successives des angles ZPS avec les intervalles de temps qui y correspondent, et que mesurent les horloges exactement réglées par des observations faites avec les instruments de passages, on trouve que l'angle ZPS, ou l'angle au pôle, est proportionnel au temps écoulé depuis le passage de l'étoile au méridien; de manière que la circonférence entière est au nombre de degrés contenu dans cet angle, ou dans l'arc MS qui lui est proportionnel, comme la durée d'une révolution entière, ou un jour sidéral, est au temps écoulé depuis le passage au méridien. Chacun des arcs MS, MS′, MS″, est donc décrit par l'astre, sur son cercle diurne, comme l'est la circonférence tout entière; c'est-à-dire que le *mouvement diurne des étoiles est constamment uniforme dans toute l'étendue de leur révolution.* Quoique, dans la figure, nous ayons seulement considéré les arcs situés d'un côté du méridien, après le passage supérieur, il est visible que les mêmes raisonnements s'appliqueraient aussi aux arcs situés de l'autre côté du méridien, avant que le passage ait eu lieu.

329. Cette vérité une fois reconnue, on peut s'en servir, et on s'en sert en effet comme d'un principe, ou d'une condition géométrique, pour calculer l'angle au pôle ZPS, d'après le temps écoulé depuis le passage de l'étoile au méridien, sans recourir à l'observation de sa hauteur. Car, soient J le jour sidéral, et t l'intervalle de temps sidéral écoulé depuis le passage au méridien : on aura la

valeur de P par la formule $P = 360^{\circ} \frac{t}{J}$. Réciproquement, si l'angle au pôle est donné par l'observation de la hauteur de l'étoile, on en peut conclure le temps $t = \frac{P.J}{360^{\circ}}$ (*).

330. On a donné aux plans visuels POS, POS′, POS″, le nom de *plans horaires*, parce que les arcs MS, SS′, S′S″, qu'ils interceptent sur le cercle diurne d'un même astre fixe, répondent aux heures et aux fractions d'heure dans lesquelles on divise la durée de la révolution entière, ou le jour sidéral. Par exemple, si les angles dièdres des plans horaires sont de 15° sexagésimaux, ils intercepteront, sur le cercle diurne de l'astre, des arcs qui seront pareillement de 15°. Il y aura donc 24 de ces arcs dans la circonférence entière, puisque 24 . 15 valent 360 ; par conséquent chacun d'eux sera parcouru par l'astre dans la vingt-quatrième partie du jour sidéral, c'est-à-dire dans une heure sexagésimale. Cela se voit tout de suite par la formule $P = 360 . \frac{t}{J}$; car en y faisant $P = 15^{\circ}$, elle donne $T = \frac{J}{24}$.

Si, au lieu de 24 plans, on n'en suppose que 10, ils intercepteront sur la circonférence des arcs de 40° décimaux, et chacun de ces arcs répondra à une heure de la division décimale du jour sidéral. Alors la valeur de P, exprimée en mesures décimales, est $P = 400^{g} \frac{t}{J}$; en y faisant $P = 40^{g}$, on a $t = \frac{J}{10}$.

331. Généralement, si l'on veut représenter les divisions du jour sidéral par les angles dièdres des plans horaires, ou par les arcs que ces plans interceptent sur le cercle diurne décrit par l'astre fixe, on

(*) Cette formule ne peut s'appliquer immédiatement qu'aux astres qui n'ont point de mouvements propres ; pour les autres, il faut préalablement tenir compte de l'effet de ce mouvement sur l'angle P, pendant le temps t. Je donnerai des exemples numériques de son application dans ces deux cas, lorsque j'aurai décrit en détail la manière d'observer avec les cercles répétiteurs portatifs, dont un des principaux usages est précisément de donner le temps absolu, ou l'angle horaire P, par la mesure des distances zénithales prises hors du méridien.

trouvera que, dans la division sexagésimale du cercle et du jour, 15° répondent à 1 heure, 15′ de degré à 1^m de temps, et 15″ de degré à 1^s de temps. Ainsi pour convertir un nombre de degrés, minutes et secondes d'arc, comptés sur un même cercle diurne, en heures, minutes et secondes de temps sidéral, il faut les diviser par 15. C'est le contraire pour convertir le temps en arc : il faut alors multiplier.

Dans la division décimale du cercle et du jour, 40 grades répondent à 1 heure; 40′ de grade à 1^m de temps; 40″ de grade à 1^s de temps. Pour convertir les arcs en temps, il faut les diviser par 40; pour convertir le temps en arc, il faut multiplier par le même nombre.

Les divisions du cercle et du jour sidéral étant liées entre elles par ces rapports, elles peuvent se représenter les unes par les autres, et alors la mesure des arcs célestes est donnée par le temps qui s'écoule pendant leur passage au méridien. Pour assigner à cette mesure un énoncé fixe, on l'exprime par des arcs de l'équateur.

Ainsi l'arc intercepté sur le contour de l'équateur, entre le méridien et le plan horaire d'un astre fixe, ou, ce qui revient au même, l'angle dièdre formé par le plan du méridien avec le plan horaire de cet astre, *étant converti en temps*, exprimera le nombre d'heures et de fractions d'heure sidérales, écoulées depuis le passage de l'astre au méridien, ou qui doivent s'écouler jusqu'à son passage : c'est pourquoi ces angles dièdres sont désignés sous la dénomination d'*angles horaires*.

332. Rien dans ces rapports ne détermine l'époque à laquelle on commence à compter les heures. Dans la société, l'usage général est de partir du passage du soleil au méridien inférieur, ou de minuit, et de compter ensuite 24 heures d'un minuit à l'autre. Mais le mouvement du soleil étant inégal, comme on le verra plus loin, ce système est pareillement variable, et il exige quelque modification pour être rendu applicable à l'astronomie. Puis donc que nous sommes obligés de nous borner au temps sidéral jusqu'à ce que nous ayons expliqué ces inégalités, on peut toujours concevoir que, dans chaque lieu, l'on prenne pour commencement des heures sidérales le passage au méridien d'une étoile connue, ou d'un point du ciel déterminé, et qu'ensuite on continue à compter les heures à partir de l'instant de ce passage.

Le nombre d'heures, de minutes et secondes écoulées depuis cette première époque, donnera ce que l'on nomme le *temps absolu* ou *l'heure qu'il est*.

Dans la suite de cet ouvrage, nous donnerons le moyen de calculer l'heure qu'il est dans le lieu où l'on se trouve, d'après la seule observation de la hauteur d'un astre quelconque et le calcul de son angle horaire; mais il faut auparavant savoir comment on est parvenu à déterminer les positions relatives des astres dans le ciel, de manière à pouvoir assigner à chaque instant la situation de tous, étant donnée celle d'un d'entre eux.

333. Ces rapports constants entre les temps et les arcs célestes n'ont lieu en rigueur que pour les astres fixes dont la distance polaire est constante. Ceux qui ont un mouvement propre, comme le soleil, les planètes et les comètes, ont leur distance polaire variable; par conséquent ils ne décrivent pas des cercles autour de l'axe de rotation du ciel, mais des lignes spirales résultantes de ces mouvements composés. On ne peut donc pas leur appliquer exactement les raisonnements que nous venons de faire, et qui sont fondés sur la forme circulaire de la courbe diurne que les étoiles fixes décrivent avec uniformité. Mais, en étudiant les variations particulières dues à leurs mouvements propres, on est parvenu à les connaître assez exactement pour les calculer d'avance. En dépouillant les astres de ces inégalités, leur distance polaire peut être ensuite regardée comme constante, leur mouvement propre comme nul; et alors la loi du mouvement diurne, uniforme et circulaire, se montre la même pour tous les astres, sans aucune exception.

334. On a représenté ces propriétés, ou plutôt on en a fait une application très-utile, dans la construction d'un instrument d'astronomie que l'on appelle *machine parallatique*, parce qu'il sert à suivre une même étoile sur son cercle diurne, et aussi *équatorial*, parce que le mouvement révolutif qu'on lui donne pour ce but, est parallèle à l'équateur céleste (*). Je ne puis mieux le définir

(*) Le nom exact de cet instrument est bien machine *parallatique*, comme je le donne ici, et non *parallactique*, comme on le dit trop souvent; car il est uniquement relatif aux *parallèles*, non aux *parallaxes*.

dans son type abstrait, représenté *fig.* 97, qu'en le rapportant au modèle universel que nous avons donné, tome II, *fig.* 18, des instruments astronomiques destinés à mesurer des distances zénithales, si ce n'est que la rotation du cercle divisé qui porte la lunette ne s'opère pas autour de la verticale, mais autour de l'axe qui passe par les pôles célestes; ou encore, on peut l'assimiler à un cercle répétiteur dont l'axe vertical aurait été incliné, et invariablement fixé, suivant cette direction. Alors le cercle C, qui était horizontal, devient parallèle à l'équateur; le cercle C′, qui se tournait successivement dans les divers plans verticaux, se tourne dans les divers plans horaires; et la lunette OC′L′ ayant son réticule focal réglé par des conditions analogues, ne décrit plus des distances zénithales Z, mais des distances polaires Δ. Les rectifications nécessaires aux deux instruments, et la détermination de leurs constantes, sont d'ailleurs pareilles, sauf qu'elles se rapportent maintenant au pôle, au lieu de se rapporter au zénith. Elles varient seulement dans leurs détails, selon le mode de construction par lequel la lunette est liée au cercle mobile qui la porte, et celui-ci à l'axe de rotation AP. L'observation se fait aussi d'une manière semblable : on tourne d'abord le cercle C′ dans la direction du plan horaire de l'astre, que je suppose être une étoile, et l'on dirige la lunette vers lui pour l'amener dans le champ de la vision. Alors on la fixe à son cercle par ses pièces d'attache; et, à l'aide d'une vis de rappel liée à ces pièces, on achève de placer l'étoile dans l'axe optique physique, qui a été rendu préalablement parallèle au limbe par les procédés généraux que nous avons décrits. Supposant donc toutes les rectifications antérieures exactement effectuées, et l'axe de rotation AP en coïncidence stable avec l'axe polaire, si on laisse la lunette fixe sur son cercle C′, et qu'on fasse tourner celui-ci autour de AP, le rayon visuel dirigé suivant l'axe optique se maintiendra à une distance polaire constante qui était celle de l'étoile au commencement de l'observation. Conséquemment, si le mouvement diurne de l'étoile s'opère avec cette condition de constance, qui sera le caractère géométrique de sa circularité, on doit toujours, par la seule rotation du cercle qui porte la lunette, pouvoir replacer celle-ci sur elle, de manière qu'elle

s'occulte encore au centre des fils. C'est aussi ce qui a lieu très-exactement, sauf les altérations inévitablement produites, dans les lieux apparents de l'étoile, par l'inégalité des réfractions atmosphériques à diverses distances du zénith. Mais l'accord redevient parfait et constant, si l'on tient compte de ces phénomènes par la théorie, qui en donne la mesure précise d'après les indications du baromètre et du thermomètre.

D'après cela, on pourrait concevoir, au premier aperçu, que dans un ouvrage d'exposition tel que celui-ci, la manière la plus simple d'établir la loi de circularité du mouvement diurne consisterait à la présenter comme un fait que la machine parallatique démontre. Mais, en suivant cette marche, on substituerait une preuve mécanique aux preuves géométriques que nous avons rapportées, et qui sont fondées sur des rapports dont l'usage est continuel en astronomie. D'ailleurs, le placement de la machine parallatique exige la connaissance du méridien et de la hauteur du pôle, puisque l'on ne trouve le mouvement circulaire qu'autour de l'axe de rotation, dont la position est déterminée dans ce plan. Il faudrait donc admettre, par hypothèse, que le hasard a conduit à l'établir dans ces conditions spéciales, auxquelles elle est adaptée par sa construction, ce qui serait bien peu philosophique; et, dans cette supposition même, les effets de la réfraction altéreraient toujours la régularité du cercle décrit par l'étoile; de sorte qu'on ne pourrait pas la suivre avec une même inclinaison de la lunette dans toute l'étendue de son cours. Ainsi, pour voir que ce mouvement est réellement circulaire, il deviendrait toujours nécessaire d'ôter de ces phénomènes les effets de la réfraction. Enfin, l'instrument n'apprend pas quelle est la loi de cette rotation. Le seul moyen rigoureux de la découvrir est celui des considérations géométriques, qui, combinées avec les observations du temps, démontrent avec rigueur la forme circulaire de la trajectoire apparente, et prouvent l'uniformité du mouvement de l'astre qui la décrit. J'ai cru ces réflexions utiles pour montrer en général, quoique d'après un exemple particulier, combien, pour établir rigoureusement les vérités, les preuves mathématiques l'emportent sur les machines les plus parfaites.

D'après ce que je viens de dire, il est aisé de comprendre que la machine parallatique, quoique fondée sur la circularité du mouvement diurne, n'a cependant pas été imaginée et construite pour prouver matériellement cette propriété. Sa construction, telle que nous venons de la décrire, la rend appropriée à une foule d'observations astronomiques, dans lesquelles on a seulement besoin de déterminer les *différences* de position de deux astres, par exemple celle d'une planète, ou d'une comète nouvelle, relativement aux étoiles qui l'avoisinent, et dont les lieux invariables sont déjà fixés. Pour ce but, on ajoute au réticule des fils mobiles qui mesurent ces différences dans les deux sens rectangulaires des angles horaires, et de la distance polaire, détails que je ne fais qu'indiquer ici et sur lesquels j'aurai occasion de revenir. Enfin on assure la régularité du mouvement révolutif, en le faisant opérer par un mécanisme d'horlogerie réglé sur le temps sidéral, ce qui maintient l'axe optique physique dans le plan horaire variable de l'étoile sur laquelle on l'a une fois fixé; de sorte qu'il la suit continûment dans son cours diurne, sauf les inégalités produites par le changement des réfractions. J'ai déjà mentionné cette application importante des horloges, quand j'ai décrit la lunette de Dorpat et l'héliomètre de Kœnigsberg. Mais je ne pouvais alors que l'énoncer comme un fait, n'ayant pas encore expliqué la notion *du temps*, et encore moins la manière de le mesurer. On voit maintenant que ces magnifiques appareils sont de véritables machines parallatiques dans le sens général de cette dénomination. Je donne ici, dans la *Pl.* XXI la représentation détaillée d'un instrument semblable, qui a été construit par M. Gambey, pour l'Observatoire de Paris. Je suis redevable de ce dessin à l'obligeance de M. Faye. On y voit le cercle horaire, et le cercle équatorial, dans les relations de positions rectangulaires que leur assigne le type abstrait représenté *fig.* 97. L'appareil d'horlogerie H, qui fait tourner ce système autour de son axe polaire, est mû par un ressort; et son action se communique tangentiellement au contour du cercle équatorial, par des pièces intermédiaires tellement ajustées, qu'en voyant passer les divisions du limbe de ce cercle, sous le microscope fixe destiné à les lire, elles s'y succèdent unifor-

mement, sans aucune intermittence appréciable. Des tiges de renvoi placées sous la main de l'observateur, lui servent pour mettre instantanément le système des deux cercles en mouvement rotatoire, quand chaque observation commence, et pour l'arrêter soudainement, afin de lire les divisions des limbes, quand elle est finie.

333. La circularité du mouvement diurne étant rigoureusement établie, on peut l'employer comme une condition de relation certaine, pour déterminer les coefficients de l'expression analytique de la réfraction, établie par la théorie en fonction des éléments physiques dont elle résulte. Il suffit pour cela d'assujettir cette expression à rétablir une exacte équidistance au pôle, entre les distances zénithales méridiennes d'étoiles circompolaires, dont les deux passages s'opèrent, et s'observent, à des distances très-inégales du zénith. On peut effectuer de telles observations avec des cercles fixes, ou les supposer par anticipation obtenues à l'aide de cercles répétiteurs portatifs. Je les emprunterai à ce dernier mode d'opérations, et j'exposerai tout à l'heure, dans la note II, les résultats numériques qu'on en déduit. Ils sont parfaitement conformes à ceux que l'on conclut de la mesure du pouvoir réfringent de l'air atmosphérique appliqué à la constitution statique de l'atmosphère terrestre, ainsi que je l'ai exposé dans le tome Ier, chapitre VII.

NOTE I,

RELATIVE A LA PAGE 345,

Sur l'équation des hauteurs correspondantes.

1. Soit Z la distance vraie de l'astre au zénith, dans la première observation qui se fait avant le passage au méridien; soit P l'angle horaire inconnu de l'astre à ce même instant. Pour faire de l'autre côté du méridien l'observation correspondante, on laisse l'alidade de l'instrument sur le même point de la division, ou on l'y replace, si on l'en a détachée; et l'on observe l'instant où l'astre revient à la même distance apparente au zénith. S'il n'est point survenu de changement dans la réfraction, cette distance apparente répondra à la même distance vraie Z, que dans la première observation; et si, de plus, la distance polaire de l'astre n'a pas changé dans l'intervalle, le nouvel angle horaire, compté de l'autre côté du méridien, sera aussi égal à P, comme le premier; de sorte que l'instant du passage de l'astre au méridien sera exactement intermédiaire entre ces deux époques. Mais, si la réfraction change, ce qui est presque inévitable, le seconde distance apparente répondra à une autre distance vraie Z'; et si, de plus, la distance polaire Δ devient Δ', l'angle horaire variera aussi en conséquence de ces changements, et deviendra, par exemple, P'. Or, en considérant, comme dans la *fig.* 92, le triangle sphérique formé par les trois arcs Z, Δ et D, D étant la distance du pôle au zénith, on aura, d'après les formules connues de la trigonométrie sphérique:

Pour la première observation, antérieure au passage méridien : $\cos P = \dfrac{\cos Z - \cos D . \cos \Delta}{\sin D \sin \Delta}$;

Pour la seconde, postérieure : $\cos P' = \dfrac{\cos Z' - \cos D . \cos \Delta'}{\sin D \sin \Delta'}$.

C'est de là qu'il faut tirer la correction du second angle horaire, ou P' — P.

2. On y parviendra aisément, si l'on remarque que les distances vraies Z, Z', correspondantes à des distances apparentes égales, sont nécessairement très-peu différentes l'une de l'autre, puisque les variations de la réfraction et de la distance polaire qui produisent ces différences, ne peuvent être que fort petites dans l'intervalle de quelques heures que comprennent les observations. Conséquemment les angles horaires P, P', comptés des deux côtés du méridien, ne différeront entre eux que par des quantités du même ordre de petitesse, qu'il faut tâcher de mettre en évidence par ce caractère. Or, en retranchant les deux équations précédentes l'une de l'autre, on trouve

$$\cos P' - \cos P = \frac{1}{\sin D}\left(\frac{\cos Z'}{\sin \Delta'} - \frac{\cos Z}{\sin \Delta}\right) - \frac{\cos D}{\sin D}\left(\frac{\cos \Delta'}{\sin \Delta'} - \frac{\cos \Delta}{\sin \Delta}\right)$$

Les fonctions connues et inconnues n'entrent plus dans cette équation que par des différences dont il faut exprimer la petitesse. Pour cela, faites

$$P' = P + (P' - P) = P + p,$$
$$Z' = Z + (Z' - Z) = Z + z,$$
$$\Delta' = \Delta + (\Delta' - \Delta) = \Delta + \delta;$$

p, z, δ représenteront précisément ces différences très-petites. Formez, avec ces expressions, les sinus et cosinus de P', Z', Δ' qui entrent dans l'équation ci-dessus formée, et décomposez-les par les formules connues, en sinus et cosinus d'arcs simples. Puis, dans ces développements, supprimez les termes qui se trouveraient multipliés par $\sin^2\frac{1}{2}p$, $\sin^2\frac{1}{2}z$, $\sin^2\frac{1}{2}\delta$, la petitesse de ces facteurs les rendant négligeables comparativement à ceux qui sont multipliés par les puissances simples de ces mêmes sinus : vous aurez ainsi

$$\cos P' = \cos P - \sin P \sin p, \qquad \cos Z' = \cos Z - \sin Z \sin z;$$
$$\cos \Delta' = \cos \Delta - \sin \Delta \sin \delta, \qquad \sin \Delta' = \sin \Delta + \cos \Delta \sin \delta.$$

Substituez ces valeurs dans les deux membres de l'équation formée par différence, et développez par la division les rapports qui s'y trouvent, en négligeant les carrés de $\sin\delta$, $\sin z$, ainsi que leurs produits, pour ne conserver que leurs premières puissances, afin de rester dans les mêmes limites d'approximation. Après avoir changé tous les signes et divisé les deux membres par $\sin P$, vous trouverez, en réunissant les termes affectés de facteurs semblables,

$$\sin p = \frac{\sin Z}{\sin D \sin \Delta \sin P} \sin z + \frac{(\cos \Delta \cos Z - \cos D)}{\sin D \sin^2 \Delta \sin P} \sin \delta.$$

On peut éliminer $\cos Z$ du dernier terme du second membre, en prenant sa valeur dans l'équation primitive en $\cos P$, car elle donne

$$\cos Z = \cos P \sin D \sin \Delta + \cos D \cos \Delta,$$

et par suite

$$\cos \Delta \cos Z - \cos D = \cos P \sin \Delta \cos \Delta \sin D - \cos D \sin^2 \Delta;$$

ceci étant substitué au numérateur du dernier terme, fait disparaître une partie des facteurs de son dénominateur ; et en remplaçant, dans les deux membres, les sinus des petits arcs p, z, δ, par ces arcs mêmes auxquels ils sont proportionnels, il en résulte enfin

$$P' - P = \frac{(Z' - Z) \sin Z}{\sin D \sin \Delta \sin P} + (\Delta' - \Delta)\left(\frac{1}{\operatorname{tang} P \operatorname{tang} \Delta} - \frac{1}{\operatorname{tang} D \sin P}\right).$$

3. Cette expression de $P' - P$ renferme encore l'angle horaire P, qui est inconnu, et, par conséquent, elle semble impliquer un cercle vicieux. Mais, à cause de la petitesse des variations $Z' - Z$ et $\Delta' - \Delta$, il suffit de

substituer, dans le second membre, pour P une valeur approchée, par exemple l'angle horaire moyen que l'on conclurait des observations mêmes sans y faire aucune correction. C'est-à-dire que, si T est l'époque de la première observation en temps de l'horloge, et T′ est l'époque de la seconde observation, la demi-différence $\frac{T' - T}{2}$ sera la valeur approchée de l'angle horaire, exprimée aussi en temps d'horloge. D'après la marche de cette dernière, on convertira l'expression ainsi obtenue en arc, comme je le dirai dans un moment; et, en la substituant pour P, dans le second membre de la formule, on obtiendra la différence P′ — P des deux angles horaires, dont j'expliquerai tout à l'heure l'usage.

4. Mais ici, comme dans tout autre cas analogue, il faut préalablement examiner la composition de la formule approximative à laquelle nous venons de parvenir, pour distinguer les cas où son emploi sera légitime, et ceux où elle pourrait devenir fautive. Or, elle-même nous montre qu'il ne serait pas exact de l'appliquer à des observations qui seraient faites près du méridien, ou sur des étoiles voisines du pôle. Car, par la première de ces circonstances, sin P, ainsi que tang P, deviendraient de petites fractions de l'unité; et la seconde produirait un effet pareil sur sin Δ et tang Δ. Or, ces quantités entrant dans le second membre de l'équation comme dénominateurs, leur petitesse agrandirait les termes auxquels elles s'appliquent; ce qui fausserait la supposition de leur petitesse sur laquelle toute l'approximation est fondée. On devra donc éviter ces deux cas exceptionnels, et c'est ce que l'on fait toujours.

5. Revenant à la conversion de l'intervalle de temps $\frac{1}{2}$ (T′ — T) en arc, je supposerai d'abord que l'astre observé soit une étoile. Elle pourra être considérée comme absolument fixe, entre deux observations aussi rapprochées que celles auxquelles cet intervalle s'applique. Alors, la conversion se fera immédiatement par les seuls principes jusqu'ici exposés. Car la marche de l'horloge devant être censée connue, si son retard diurne sidéral est r, en sorte que le nombre de ses battements dans un jour sidéral soit 86400 — r, ou, pour abréger, R — r, le facteur de conversion de son temps, en temps sidéral, sera $K = 1 + \frac{r}{R - r}$, d'après la note de la page 336. Ainsi l'intervalle observé $\frac{1}{2}$(T′ — T) vaudra, en temps sidéral, $\frac{1}{2}$ K (T′ — T). Cette expression le donne en secondes sidérales. Pour le convertir en arc, il n'y a qu'à en extraire les heures, les minutes, les secondes, puis multiplier chaque espèce de ces unités par 15, et ajouter les résultats. C'est une application évidente des rapports établis dans la page 405. L'arc ainsi obtenu se transportera ensuite dans le second membre de la formule approximative, comme exprimant la valeur de l'angle horaire P, avec une exactitude suffisante pour le calcul des coefficients algébriques qui servent de multiplicateurs aux petites variations Z′ — Z et Δ′ — Δ, dont la dernière sera nulle ici.

Réciproquement, si un angle horaire, appartenant à une étoile, était

donné en arc, et qu'on voulût le transformer en temps d'une horloge astronomique dont la marche serait donnée relativement au temps sidéral, il faudrait suivre une marche inverse. On diviserait d'abord ses degrés, minutes et secondes par 15, ce qui le convertirait en heures, minutes et secondes de temps sidéral. Puis, on diviserait encore le résultat par le facteur K, ou, ce qui revient au même, on le multiplierait par le facteur inverse $\frac{1}{K}$ ou $1 - \frac{1}{K'}$ que nous avons désigné par K′ dans la note citée.

6. Mais, lorsqu'on employait autrefois la méthode des hauteurs correspondantes, c'était surtout pour trouver l'instant du passage du soleil au méridien en temps de l'horloge, et alors l'observation se faisait sur cet astre, des deux côtés de ce plan. Or, comme le soleil a un mouvement propre qui fait varier non-seulement sa distance polaire Δ, mais aussi ses angles horaires entre la première observation et l'observation postérieure, il faut que j'expose ici, par avance, quelques éléments indispensables pour tenir compte de cette particularité. Heureusement, on peut les déduire des simples résultats approximatifs que nous avons obtenus sur le mouvement propre du soleil, dans le tome Ier, page 67, en nous appuyant sur les observations faites au gnomon.

7. Nous avons reconnu alors que, si l'on appelle *jour solaire* l'intervalle *moyen* de temps qui s'écoule entre deux retours consécutifs du soleil au méridien, l'angle total décrit par le plan horaire de cet astre pendant cet intervalle, autour de l'axe du pôle, surpasse une révolution du ciel stellaire, ou une circonférence complète, de $1^\circ - \frac{1}{271}1^\circ$. Cela suppose que la durée de l'année solaire se compose, en moyenne, d'un nombre de jours solaires égal à $365^j\frac{1}{4}$. Des observations plus précises que celles dont nous avons fait usage, et aussi plus longtemps continuées, la donnent en réalité un peu plus courte que cette évaluation; et l'excès moyen d'une révolution diurne du soleil sur une circonférence entière en résulte égal à $1^\circ - \frac{31}{2160}1^\circ$. La différence avec notre première approximation paraîtra bien petite si l'on considère que la fraction $\frac{1}{447}$ équivaut à $\frac{31}{2160.7}$. Toutefois, ici encore, j'emploierai, de prime abord, le résultat exact que je représenterai par a; et, réduisant $\frac{31}{2160}1^\circ$ en secondes, j'obtiens $a = 0^\circ 59' 8'' \frac{1}{2}$. D'après cela, si l'on veut prendre, pour unité de temps, le *jour solaire moyen*, la portion de cette unité employée par le soleil pour décrire une seule circonférence exacte sera proportionnellement $\frac{360}{360 + a}$ ou $1 - \frac{a}{360 + a}$. Si l'on évalue le terme soustractif en nombres, ce sera $1^j - 0{,}0027303$, le signe ^{j} désignant le jour moyen solaire, pris ici pour unité de temps. Ce même résultat exprimera donc aussi, *en temps solaire moyen*, la durée de la révolution diurne d'une étoile quelconque, exempte de mouvement propre, c'est-à-dire le jour sidéral. Si on le convertit en secondes sexagésimales, qu'il faudra appeler des *secondes de temps moyen solaire*, il deviendra $86400'' - 235'',91$, ou, par abréviation, $R - m$, la lettre R désignant toujours le nombre 86400, et m le

nombre 235,91, qu'il faut en soustraire. Maintenant, si l'on applique à ces rapports le même raisonnement que nous avons employé dans la note de la page 336, on en conclura que, pour convertir un intervalle quelconque de temps sidéral en temps solaire moyen, il faut le multiplier par le facteur

$$F = \frac{R - m}{R} = 1 - \frac{m}{R};$$

et, inversement, pour convertir un intervalle de temps solaire moyen en temps sidéral, il faudra le diviser par ce même facteur, ou, ce qui est équivalent, il faudra le multiplier par le facteur réciproque

$$F' = \frac{1}{F} = \frac{R}{R - m} = 1 + \frac{m}{R - m}.$$

8. Au moyen de ces facteurs, on peut aisément transformer, en temps solaire moyen, tout intervalle de temps H marqué par une horloge mécanique dont la marche est donnée relativement au temps sidéral. Car, si l'on transforme d'abord H en temps sidéral, il deviendra KH, K étant le facteur de conversion propre à l'horloge considérée; puis ce produit étant transformé en temps moyen solaire, il deviendra FKH; ou, en développant ses différents termes, ce sera

$$FKH = H\left[1 + \frac{(r - m)}{R - r}\right].$$

Réciproquement : si un intervalle de temps moyen solaire était donné et exprimé par I, sa valeur en temps de l'horloge serait $\frac{I}{FK}$, ou $F'K'I$, en faisant, comme dans la note de la page 336, $K' = \frac{1}{K} = 1 - \frac{r}{R}$; et, en développant les différents termes de ce produit, on trouvera

$$F'K'I = I\left[1 - \frac{(r - m)}{R - m}\right].$$

Ainsi, dans ce cas comme dans le précédent, on n'aurait à multiplier le nombre donné I, ou H, que par des facteurs qui sont généralement fort petits.

9. Il pourrait arriver que la marche de l'horloge ne fût pas donnée relativement au jour sidéral, mais relativement au jour solaire moyen. Soit alors μ son retard diurne, en sorte que pendant 86400 secondes moyennes, ou R, le nombre de ses battements soit $86400 - \mu$, ou, par abréviation, $R - \mu$. Si l'on applique à ces rapports le raisonnement employé dans la note de la page 336, on en conclura que, pour convertir un intervalle quelconque de temps H' de cette horloge en temps solaire moyen, il faut le multiplier par le facteur

$$\Phi = \frac{R}{R - \mu} = 1 + \frac{\mu}{R - \mu};$$

et inversement, pour convertir un intervalle donné de temps moyen en

temps de cette horloge, il faudra le diviser par ce même facteur, ou, ce qui est équivalent, il faut le multiplier par le facteur réciproque

$$\Phi' = \frac{R - \mu}{R} = 1 - \frac{\mu}{R}.$$

Si l'on voulait connaître le retard diurne r de cette même horloge, sur un jour sidéral, on n'aura qu'à égaler le facteur Φ au produit FK; et, dégageant r, comme inconnue, on trouvera

$$r = m + \mu - \frac{m\mu}{R}.$$

10. Mais, quand on fait les observations de hauteurs correspondantes sur le soleil, cet astre ne se trouve pas habituellement dans la phase de son mouvement moyen. Il a généralement une marche diurne quelque peu différente, qui est exprimée, dans la *Connaissance des Temps*, pour chaque jour de l'année. Elle y est donnée en temps moyen solaire, et c'est ce qu'on nomme l'*intervalle des deux midis vrais consécutifs*, qui comprennent l'époque des observations considérées. Comme cet intervalle est toujours peu différent de 24 heures solaires moyennes, traduisons-le en secondes et représentons-le généralement par $86400 - s$, ou, par abréviation, $R - s$, s étant un nombre qui pourra être occasionnellement positif, nul ou négatif. Alors, en appliquant encore à ce cas le raisonnement de la page 336, on en conclura que pour transformer un intervalle quelconque de temps moyen en temps solaire *actuel* ou *apparent*, il faut le multiplier par le facteur

$$G = \frac{R}{R - s} = 1 + \frac{s}{R - s};$$

et réciproquement, pour convertir un intervalle de temps solaire apparent ou actuel, en intervalle de temps moyen, il faudra le multiplier par le facteur inverse

$$G' = \frac{1}{G} = \frac{R - s}{R} = 1 - \frac{s}{R}.$$

11. En rassemblant ces résultats, si H est un intervalle de temps quelconque exprimé par une horloge mécanique dont la marche est connue relativement au temps sidéral, l'intervalle de temps solaire apparent qui y correspond sera

$$FKG \,.\, H.$$

Si, au contraire, l'intervalle de temps solaire apparent est donné et exprimé par A, sa valeur en temps de l'horloge mécanique sera

$$F'K'G' \,.\, A.$$

En supposant que la marche de l'horloge ne fût pas donnée relativement au temps sidéral, mais relativement au temps solaire moyen, il faudrait remplacer les produits FK, F′ K′, dans les expressions précédentes, par les facteurs équivalents Φ, Φ', qui seraient alors immédiatement donnés.

12. Pour appliquer ces résultats aux hauteurs correspondantes, lorsque l'astre observé sera le soleil, si l'intervalle des deux observations en temps de l'horloge est $T' - T$, on convertira $\frac{1}{2}(T' - T)$ en temps apparent solaire, puis on le transformera en arc en multipliant les heures, minutes et secondes par 15. Ce sera la valeur moyenne et suffisamment exacte de l'angle horaire P qu'il faudra introduire dans la formule approximative. Nous avons déjà expliqué, § 8, la conversion analogue, quand l'astre observé est une étoile. On saura donc l'effectuer dans ces deux cas.

13. La formule contient aussi un terme qui a pour facteur $Z' - Z$, c'est-à-dire la différence des hauteurs vraies de l'astre, dans les observations comparées. Ce n'est évidemment que la différence des réfractions correspondantes à la hauteur apparente où l'on a observé; il sera donc facile de calculer cette différence par les Tables, d'après les observations du baromètre et du thermomètre; et, pour calculer le coefficient $\frac{\sin Z}{\sin D \sin \Delta . \sin P}$, il suffira d'employer la distance apparente observée Z. Quant à la distance polaire Δ, qui fait partie de ce coefficient, si l'astre observé est une étoile, elle sera donnée et constante; si les observations sont faites sur le soleil, Δ sera variable, mais il suffira de calculer $\sin \Delta$ avec la valeur qui répond à l'une ou l'autre des observations. On pourra, si l'on veut, employer leur moyenne ou $\frac{\Delta + \Delta'}{2}$.

14. Dans ce dernier cas, il faudra aussi calculer $\Delta' - \Delta$, c'est-à-dire le changement de la distance polaire de l'astre entre les deux observations. Pour cela, on prendra dans la *Connaissance des Temps* la valeur de ce changement entre deux midis apparents, consécutifs, et l'on calculera proportionnellement sa valeur pendant l'intervalle de temps $T' - T$ converti aussi en temps apparent. On aura ainsi toutes les données nécessaires pour calculer numériquement la valeur de $P' - P$.

15. Quand on connaîtra cette valeur qui est donnée en arc par la formule, on la divisera par 15 pour la réduire en temps, dont l'espèce correspondra au mouvement diurne de l'astre observé. Si c'est une étoile, ce temps sera sidéral, et il ne restera plus qu'à le convertir en temps de l'horloge. Soit t la valeur de l'arc $P' - P$, ainsi transformé. Si l'astre observé est le soleil, $\frac{1}{15}(P' - P)$ représentera un intervalle de temps solaire apparent. On convertira ce temps apparent en temps moyen, et ensuite en temps de l'horloge. Je désigne encore le résultat par t, en attribuant à cette lettre la valeur propre à chaque cas. Si l'on nomme ϖ, ϖ' les deux angles horaires P, P', exprimés pareillement, l'un et l'autre, en temps de l'horloge, conformément à la nature fixe ou mobile de l'astre auquel ils appartiennent, on aura

$$\varpi' - \varpi = t.$$

Or, si l'on appelle M l'époque du passage de l'astre au méridien en temps de l'horloge, et que l'on désigne toujours par T, T' les époques des deux

observations, comme nous l'avons fait plus haut, on aura

Par la première, avant le passage au méridien. . . . . $M = T + \varpi$;
Par la seconde, après le passage. . . . . $M = T' - \varpi'$;

par conséquent

$$M = \tfrac{1}{2}(T' + T) - \tfrac{1}{2}(\varpi' - \varpi),$$

ou, en mettant, au lieu de $\varpi' - \varpi$, sa valeur t,

$$M = \tfrac{1}{2}(T' + T) - \tfrac{1}{2}t;$$

c'est-à-dire que, de la moyenne des époques observées à la pendule, il faut retrancher la moitié de la correction t : bien entendu qu'il faut prendre t avec le signe que lui donnera la formule qui sert à en calculer la valeur. De sorte, par exemple, que, si t se trouvait négatif, on l'ajouterait à la distance moyenne au lieu de le retrancher. Mais, en suivant les règles des signes algébriques, il n'y aura jamais de difficulté : voilà l'avantage que nous avons à n'introduire dans le calcul que des distances polaires comptées d'un même pôle, au lieu des déclinaisons et des latitudes, dont il faut changer le signe selon qu'elles deviennent boréales ou australes, ce qui exige des attentions particulières et multiplie les chances d'erreurs.

16. Si l'on considère le terme relatif aux variations de la déclinaison, on voit que la partie de la correction qui en dépend devient nulle quand $\Delta' - \Delta = D$, c'est-à-dire lorsque l'astre n'a point de mouvement de déclinaison, ce qui a sensiblement lieu pour le soleil à l'époque du solstice, comme nous l'avons reconnu dans le tome Ier, page 49, d'après les simples observations faites au gnomon. Mais la correction disparaît encore lorsque le coefficient de $\Delta' - \Delta$ s'évanouit, c'est-à-dire lorsqu'on a

$$\frac{1}{\operatorname{tang} P \operatorname{tang} \Delta} - \frac{1}{\operatorname{tang} D \sin P} = 0,$$

ou, en supprimant le facteur $\frac{1}{\sin P}$ et dégageant $\cos P$:

$$\cos P = \frac{\operatorname{tang} \Delta}{\operatorname{tang} D}.$$

Cette relation détermine l'époque à laquelle la correction se détruit. Pour que cette destruction soit possible, il faut que $\operatorname{tang} \Delta$ soit moindre que $\operatorname{tang} D$, afin que $\cos P$ soit moindre que l'unité, comme cela doit être si l'arc P a des valeurs réelles. Cette condition ne peut être remplie que sur les parallèles terrestres dans lesquels on a quelquefois $\operatorname{tang} \Delta = \operatorname{tang} D$, ou $\Delta = D$, c'est-à-dire sur ceux qui, à certains temps de l'année, voient le soleil à leur zénith.

NOTE II,

RELATIVE A LA PAGE 400.

Détermination du coefficient de la réfraction atmosphérique, d'après des observations d'étoiles circompolaires.

Pour effectuer cette détermination, il faut emprunter de la théorie l'expression de la réfraction atmosphérique, et déterminer les coefficients constants que cette expression renferme, de manière à satisfaire aux observations d'étoiles faites au-dessus et au-dessous du pôle.

Soit Z la distance zénithale observée sous la pression barométrique p, et à la température t, la première étant exprimée en parties du mètre, et la seconde en degrés du thermomètre centésimal. L'auteur de la *Mécanique céleste* a prouvé, dans cet ouvrage, que, pour des hauteurs apparentes plus grandes que 12° sexagésimaux, la valeur de la réfraction r, exprimée en secondes de degré, est donnée par la formule suivante, dans laquelle α désigne un coefficient constant, exprimant des secondes de degré,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} r = {} & \frac{\alpha . p . \operatorname{tang} Z}{0,76 . (1 + t . 0,00375)} - \frac{\alpha p}{0,76} . 0,00125254 \frac{\operatorname{tang} Z}{\cos^2 Z} \\ & + \frac{\frac{1}{2}\alpha^2 \sin 1'' . p^2}{[0,76(1 + t . 0,00375)]^2} \frac{(1 + 2\cos^2 Z) \operatorname{tang} Z}{\cos^2 Z} . \end{aligned} \right.$$

Tout est connu dans cette formule, excepté le coefficient α. Il ne reste donc plus qu'à voir comment les observations des étoiles circompolaires peuvent servir à le déterminer.

Pour cela, soient Z la distance d'une de ces étoiles au zénith dans son passage au méridien supérieur; Z′ cette distance pour le méridien inférieur, observée du même point de la surface terrestre. Les réfractions r, r' correspondantes à ces deux distances, pourraient être calculées d'après la formule précédente, si l'on connaissait le coefficient α. Mais, ne le connaissant point, on peut toujours calculer les autres coefficients numériques qui le multiplient dans la formule, et qui ne dépendent que de la distance au zénith, de la pression et de la température, toutes quantités données par l'observation. Ainsi, dans les limites de distances zénithales, auxquelles s'applique la formule théorique ci-dessus rapportée, on aura, pour r et r', des expressions de cette forme :

$$r = A\alpha + B\alpha^2, \qquad r' = A'\alpha + B'\alpha^2,$$

dans lesquelles A, B, A′, B′ désignent des nombres connus. Les distances zénithales vraies corrigées de ces réfractions seront donc exprimées par

$$Z + A\alpha + B\alpha^2, \qquad Z' + A'\alpha + B'\alpha^2.$$

Si ces distances sont bien corrigées, leur demi-somme doit donner la vraie distance du pôle au zénith, distance que nous nommerons D. On aura donc, en les ajoutant,

$$(2) \qquad Z + Z' + (A + A')\alpha + (B + B')\alpha^2 = 2D.$$

Dans cette équation, il n'y a d'inconnue que α et D; chaque étoile observée au-dessus et au-dessous du pôle donnera une équation semblable; et, comme α et D restent les mêmes pour toutes les étoiles, il s'ensuit que deux équations de ce genre suffiront pour les déterminer, c'est-à-dire pour faire connaître la distance vraie du pôle au zénith, et le coefficient α de la réfraction. Alors, cette formule ne contenant plus rien d'indéterminé, on pourra calculer sa valeur pour toutes les distances zénithales, de degré en degré, et en former des Tables de réfraction, qui devront être restreintes aux limites qu'elle embrasse.

L'équation que nous avons trouvée entre α et D suppose que la distance polaire de chaque étoile est la même dans le passage supérieur et dans le passage inférieur. Or, ces distances varient sans cesse par l'effet de la précession, de l'aberration, de la nutation. Il faut donc, pour les rendre comparables entre elles, les dépouiller de ces effets, ou au moins corriger les variations qui ont dû en résulter dans les distances zénithales pendant l'intervalle de temps où les observations ont été faites; c'est ce que l'on appelle *réduire des observations à une même époque*. Par ce moyen, on acquiert l'avantage de pouvoir réunir un grand nombre d'observations de chaque passage, et de les faire concourir toutes au calcul de α, ce qui donne à leur détermination une plus grand probabilité d'exactitude.

Pour entrer à fond dans le détail de ces réductions, supposons que les observations dont on fait usage aient été faites avec un cercle répétiteur. Dans ce cas, la distance moyenne observée Z ne sera pas la distance méridienne; elle aura besoin d'une correction δ pour être réduite au méridien. S'il s'agit d'un passage supérieur, cette correction sera soustractive, et $Z-\delta$ sera la distance méridienne; mais la réfraction r devra toujours être calculée pour la distance observée Z, de sorte que $Z - \delta + r$ sera la distance méridienne vraie. Si donc on représente par Δ la distance polaire de l'étoile, calculée pour le jour de l'observation, cette distance, ajoutée à la distance méridienne, donnera la vraie distance du pôle au zénith, puisqu'il s'agit d'un passage supérieur. On aura donc ainsi

$$Z - \delta + r + \Delta = D.$$

Si l'on représente par Z', δ', r' et Δ' les quantités analogues pour le passage inférieur, la réduction au méridien δ' sera additive à la distance zénithale; mais Δ' sera soustractive, et l'on aura

$$Z' + \delta' + r' - \Delta' = D.$$

Ajoutant ces deux équations relatives aux deux passages de la même étoile, on trouve

$$Z + Z' + r + r' + \delta' - \delta + \Delta - \Delta' = 2D;$$

ou, en mettant pour r et r' leurs valeurs,

$$(3) \quad Z + Z' + (A + A')\alpha + (B + B')\alpha^2 + \delta' - \delta + \Delta - \Delta' = 2D.$$

Si les deux observations étaient faites au méridien même, on aurait $\delta = 0$, $\delta' = 0$; si, de plus, la distance polaire était la même dans les deux observations, on aurait $\Delta = \Delta'$. Avec ces modifications, on retomberait sur la formule que nous avons trouvée d'abord. Mais celle que nous venons de composer est plus générale, puisqu'elle permet d'employer des observations qui ne sont pas immédiatement comparables; et même, par cette raison, cette dernière formule est la seule qui puisse être réellement appliquée, puisque l'exacte identité des circonstances ne se rencontre presque jamais dans deux observations. Remarquons en outre que les distances polaires Δ, Δ' n'ont pas besoin d'être connues avec une grande précision; il suffit d'avoir leurs valeurs assez approchées pour pouvoir calculer très-exactement les variations $\Delta - \Delta'$, qu'elles ont éprouvées entre les époques des observations de l'un et de l'autre passage.

Maintenant nous allons appliquer cette formule à des observations faites par Méchain, à Barcelone; ces observations sont rapportées dans l'ouvrage de Delambre intitulé : *Base du système métrique décimal*, tome II, pages 568 et 569. Elles sont nombreuses, et paraissent faites avec un très-grand soin. Je n'ai rapporté ici que les moyennes de ces observations, et cela suffit; car chacune de ces moyennes peut être considérée comme une observation plus exacte qu'aucune des observations particulières, et qui aurait été faite dans l'état moyen de température et de pression barométrique qui convient à l'ensemble des observations. De plus, j'ai rapporté les observations de trois étoiles, quoique deux eussent suffi à la rigueur; mais la combinaison des trois donnera une plus grande probabilité d'exactitude et une plus grande chance de succès : cela posé, voici les éléments donnés par l'observation.

	α Polaire.	β de la pet. Ourse.	ζ de la gr. Ourse.
Distance au zénith observée dans le passage supérieur..... Z	46°.49'. 0",40	33°.36'.29",26	14°.38'. 6",19
Thermomètre centésimal t	+ 10°,36	+ 7°,96	+ 5°,69
Baromètre..... p	0m,7609	0m,7680	0m,7645
Distance au zénith observée dans le passage inférieur..... Z'	50°.23'.10",75	63°.35'.16",18	82°.29'.46",50
Thermomètre centésimal t'	+ 4°,25	+ 8°,45	+ 7°,79
Baromètre..... p'	0m,7576	0m,7649	0m,7605
Distance supér. réduite au méridien, plus la dist. polaire ... $Z - \delta + \Delta$	48°.36'.11",95	48°.36'.33",10	48°.37'. 1",26
Distance infér. réduite au méridien, moins la dist. polaire ... $Z' + \delta' - \Delta'$	48.36. 1,28	48.35.15,01	48.30.14,90
Somme.... $Z + Z' + \delta' - \delta + \Delta - \Delta'$	97.12.13,23	97.11.48,11	97. 7.15,35

Il ne reste plus maintenant qu'à calculer les coefficients numériques de la formule des réfractions, pour chacune des valeurs précédentes de Z et de Z'. On trouve ainsi pour r et r' les valeurs suivantes, relativement à chaque étoile :

Polaire supérieure . . . . . $r = 1,023980.\alpha + 0,000009917.\alpha^2$;
inférieure. . . . . $r' = 1,182513.\alpha + 0,000012572.\alpha^2$;
d'où l'on tire. . . . $r + r' = 2,206493.\alpha + 0,000022489.\alpha^2$.

β supérieure. . . . . $r = 0,650829.\alpha + 0,000005336.\alpha^2$;
inférieure. . . . . $r' = 1,951304.\alpha + 0,000032755.\alpha^2$;
d'où l'on tire. . . . $r + r' = 2,602133.\alpha + 0,000038091.\alpha^2$.

ζ supérieure. . . . . $r = 0,254218.\alpha + 0,000001883.\alpha^2$;
inférieure. . . . . $r' = 6,823015.\alpha + 0,001054850.\alpha^2$;
d'où l'on tire. . . . $r + r' = 7,077233.\alpha + 0,001056733.\alpha^2$.

En combinant chacune de ces valeurs de $r + r'$ avec celles de $Z - \delta + \Delta$ et de $Z' + \delta' - \Delta'$ que nous avons données plus haut, on formera entre α et D

s trois équations suivantes, analogues à l'équation (3), page 421 :

$$97^\circ 12' 13'',23 + 2,206493\alpha + 0,000022489\alpha^2 = 2D;$$
$$97^\circ 11' 48'',11 + 2,602133\alpha + 0,000038091\alpha^2 = 2D;$$
$$97^\circ 7' 15'',35 + 7,077233\alpha + 0,001056733\alpha^2 = 2D.$$

es équations ne contenant plus d'inconnues que α et D, il sera facile en tirer les valeurs de ces quantités par l'élimination. Mais, comme ous avons plus d'équations que d'inconnues, le calcul peut s'effectuer de usieurs manières différentes, suivant les équations qu'on voudra combir ensemble. Faisons d'abord usage des deux premières. En les retranant l'une de l'autre, D sera éliminé, et il viendra cette équation du cond degré en α :

$$-25'',12 + 0,395640\,\alpha + 0,000015602\,\alpha^2 = 0;$$

là on tirerait, par la résolution, deux valeurs de α, l'une positive, utre négative. Mais la première est la seule qui nous intéresse, puisque, ns l'état ordinaire de l'atmosphère, tel que celui où les observations ont é faites, la réfraction est essentiellement positive. Or, sans résoudre ;oureusement l'équation précédente, la valeur de α peut s'obtenir d'une anière suffisamment approchée; car en divisant tous les membres par 395640, on a

$$\alpha = 63'',492 - 0,000039435.\alpha^2.$$

première partie de cette valeur est incomparablement la plus considéble, à cause de l'extrême petitesse du coefficient de α^2. Il suffira donc de lculer le second terme, en substituant au lieu de α sa valeur approchée '',492; de cette manière, on trouve

$$\alpha = 63'',492 - 0'',159 = 63'',333;$$

par suite, en mettant pour α cette valeur dans l'une des équations dont us avons fait usage, par exemple, dans la première on trouve

$$97^\circ 12' 13'',23 + 2' 19'',744 + 0'',090 = 2D;$$

qui donne

$$D = 48^\circ 37' 16'',532.$$

combinaison que nous venons de faire n'est pas la plus propre à déterner α. Car, à cause de la petitesse du coefficient 0,395640, qui sert ici de viseur, les plus petites erreurs qui peuvent se trouver dans le terme '',12, y sont presque triplées par la division. Mais cette combinaison est s-propre à déterminer D. Car la petitesse du coefficient 2,206493, qui ultiplie α, dans la première équation, fait qu'une petite erreur sur te quantité ne se trouve point fort agrandie dans la valeur de D. Au conire, la troisième équation donnée par ζ ne serait pas du tout propre à terminer D; car, à cause du coefficient considérable 7,077233, les erreurs mmises sur la réfraction s'y trouveraient beaucoup plus agrandies. Mais,

en revanche, la grandeur de ce coefficient rend la troisième équation très-propre à déterminer α en supposant D connu, parce que les petites erreurs qui pourront se trouver dans 2D, deviendront sept fois plus petites par la division. Substituant donc pour 2D sa valeur $97^\circ 14' 33'',06\frac{1}{4}$, telle que les deux premières équations nous l'ont donnée, nous aurons, pour déterminer α,

$$7,077233\alpha + 0,00105649 3\alpha^2 = 437'',714;$$

ou, en divisant tout par le coefficient de α,

$$\alpha = 61'',848 - 0,00014931 . \alpha^2;$$

et, en résolvant cette équation par approximation, comme nous l'avons fait tout à l'heure, on trouve

$$\alpha = 61'',848 - 0'',571 = 61'',277.$$

Cette valeur de α devant être regardée comme plus exacte que la première, il faut l'introduire dans les équations relatives à la polaire et à β de la petite Ourse, afin d'en déduire la vraie valeur de D. On trouve, en effectuant ce calcul,

Par la polaire.	$D = 48^\circ 37' 13'',795;$
Par β.	$D = 48^\circ 37' 13'',852.$
Moyenne.	$D = 48^\circ 37' 13'',823;$
Et par conséquent . .	$2D = 97^\circ 14' 27'',646.$

Comme cette valeur de 2D diffère assez sensiblement de celle que nous avons d'abord employée, il est bon de la substituer de nouveau dans l'équation donnée par ζ; car les différences qu'elle a subies pourront apporter, dans la valeur de α, quelque modification. En effet, en effectuant cette substitution, et achevant le calcul comme tout à l'heure, on trouve

$$7,077233\alpha + 0,00105649 3\alpha^2 = 432,296,$$

d'où l'on tire

$$\alpha = 61'',082 - 0,00014931\alpha^2,$$

et enfin

$$\alpha = 61'',082 - 0'',557 = 60'',525.$$

Cette nouvelle valeur de α, substituée de nouveau dans les équations relatives à la polaire et à β, donne

Par la polaire.	$D = 48^\circ 37' 13'',430;$
Par β	$D = 48^\circ 37' 12'',846.$
Moyenne.	$D = 48^\circ 37' 13'',138;$
Et par conséquent. .	$2D = 97^\circ 14' 26'',276.$

Cette valeur de 2D diffère trop peu de celle que nous venons d'employer, pour qu'il soit nécessaire de recommencer le calcul de α. Car elle diminuerait tout au plus α de $\frac{18}{100}$ de seconde, quantité dont nous ne pouvons pas

répondre, et qui peut être comportée par les erreurs des observations. Pour nous en convaincre, il suffira de calculer la valeur de D, donnée par l'équation en ζ, en employant cette valeur de α que nous venons d'obtenir, c'est-à-dire $\alpha = 60'',525$; on trouve ainsi

$$2D = 97^\circ 7' 15'',350 + 7' 8'',897 = 97^\circ 14' 24'',247,$$

ce qui donne

$$D = 48^\circ 37' 12'',123.$$

Cette valeur est si peu différente de la moyenne donnée par β et par la polaire, que l'on a lieu d'être surpris d'un si parfait accord, et l'on en peut conclure que, si notre valeur de α n'est pas encore tout à fait exacte, du moins elle est extrêmement approchée de la véritable. Celle-ci est $60'',666$, suivant Delambre, et suivant les expériences directes faites par M. Arago et moi.

Au reste, on doit sentir par ce qui précède, que, si l'on voulait réunir les circonstances les plus favorables à la détermination de α, il faudrait observer des étoiles circompolaires encore plus basses que ζ, dans un lieu où la distance D, du pôle au zénith, aurait été préalablement déterminée par des observations de β et de la polaire. Car, le coefficient de α s'accroissant avec rapidité, à mesure que la distance zénithale augmente, il devient bientôt assez considérable pour atténuer, par la division, les petites erreurs que l'on peut commettre sur la distance D, lorsqu'on les suppose calculées avec des valeurs de α déjà à peu près exactes. Mais, pour des étoiles ainsi observées très-près de l'horizon, l'expression approchée des réfractions dont nous avons fait usage n'est plus suffisamment exacte, et il faut employer les formules plus rigoureuses qui ont été données par l'auteur de la *Mécanique céleste*. Même, il eût déjà été convenable d'employer ces formules dans le calcul des observations de ζ. Car c'est sans doute à cela qu'est due la petite différence des valeurs de D données par cette étoile et par les deux autres, différence qui, au reste, n'a aucune influence sensible sur la valeur de α déduite de cette équation, son effet étant atténué et rendu insensible par la grandeur du coefficient de α qui lui sert de diviseur.

Au lieu d'observer des étoiles circompolaires très-basses, qui se voient difficilement dans leur passage inférieur, on pourrait, avec avantage, déterminer α par des observations du soleil, faites au cercle répétiteur, près du lever ou du coucher de cet astre, dans un lieu où la distance D du pôle au zénith serait préalablement déterminée d'une manière aussi approchée que possible. En choisissant, pour ces observations, l'époque du solstice d'été, comme alors le soleil à midi est fort élevé sur l'horizon, on pourra observer sa distance méridienne au cercle répétiteur, et la réduire en distance méridienne vraie, sans qu'une petite erreur sur les réfractions y ait beaucoup d'influence. De là, et d'après la distance D, supposée connue, on conclura la distance polaire de cet astre; ensuite avec cette distance, avec celle du pôle au zénith et l'angle horaire observé à l'époque des séries du matin ou du soir, on calculera sa distance zénithale vraie pour l'époque

des observations ; et, en retranchant la distance zénithale observée, le reste sera la réfraction pour cette hauteur. C'est ainsi que, par un grand nombre d'observations faites à Bourges, et combinées avec des observations de Piazzi à Palerme, Delambre a trouvé le coefficient $\alpha = 60'',666$, valeur que nous avons trouvée aussi, M. Arago et moi, par des expériences directes sur la force réfringente de l'air. On conçoit d'ailleurs que, pour des calculs semblables, où l'on se sert d'observations faites très-près de l'horizon, il faut employer l'expression rigoureuse, telle qu'elle se trouve dans la *Mécanique céleste*, et non pas la formule approchée qui nous a servi d'exemple.

Il me reste maintenant à faire voir comment, α étant connu, l'expression de la réfraction peut se mettre sous la forme que nous lui avons donnée dans la page 231 du tome Ier. Pour cela, nous reprendrons la formule primitive d'où nous sommes partis, p. 419 ; et, en y faisant $t = 0°$, $p = 0^m,76$, ce qui la ramène à ses circonstances fondamentales de pression et de température, nous aurons

$$r = \alpha \operatorname{tang} Z \left(1 - \frac{0,00125254}{\cos^2 Z}\right) + \tfrac{1}{2}\alpha^2 \sin 1''. \frac{(1 + 2\cos^2 Z)}{\cos^2 Z} \operatorname{tang} Z.$$

Si, dans cette équation, nous mettons pour $\cos^2 Z$ sa valeur $\frac{1}{1 + \operatorname{tang}^2 Z}$, nous réduirons ainsi toute l'expression de r en tangentes, et nous aurons

$$r = \left(0,99874756 + \frac{3\alpha}{2}\sin 1''\right)\alpha \operatorname{tang} Z - \left(0,00125254 - \frac{\alpha}{2}\sin 1''\right)\alpha \operatorname{tang}^3 Z,$$

dans les termes qui contiennent $\alpha \sin 1''$, substituons pour α sa valeur 60,52 que nous avons obtenue ; par ce moyen, tout ce qui est entre les parenthèses deviendra numérique. Or, effectuant cette substitution, on trouve

$$\alpha \sin 1'' = 0,00029434,$$

et de là on conclut

$$r = 0,99918761 . \alpha \operatorname{tang} Z - 0,00110582 3 . \alpha . \operatorname{tang}^3 Z.$$

Pour convertir cette expression en une autre de la forme

$$r = A \operatorname{tang} (Z - nr),$$

A et n étant deux constantes, développons cette dernière suivant les puissances de tang Z. A cet effet, supposons d'abord $Z = 90°$, et nommons R la valeur de r qui y correspond. Ce serait la réfraction horizontale, si une semblable formule pouvait s'étendre jusqu'à l'horizon. Nous aurons donc ainsi :

$$R = A \operatorname{tang} (90 - nR) = \frac{A}{\operatorname{tang} nR}.$$

De là on tire

$$A = R \operatorname{tang} nR ;$$

et, en substituant cette valeur à la place du coefficient A, dans l'équation

générale, elle devient :

$$r = \mathrm{R}\ \mathrm{tang}\ n\mathrm{R}\ \mathrm{tang}\ (\mathrm{Z} - nr);$$

ou, en multipliant les deux membres par n,

$$nr = n\,\mathrm{R}\ \mathrm{tang}\ n\,\mathrm{R}\ \mathrm{tang}\ (\mathrm{Z} - nr).$$

Dans celle-ci, il n'y a plus que nr d'inconnue. Pour la dégager, il faut faire attention que, dans l'état ordinaire de l'atmosphère, les réfractions, même horizontales, ne surpassent guère 1980″ ou 33′ sexagésimales. En outre, on verra, par la suite du calcul, que le coefficient n est peu différent de $3\frac{1}{4}$; par conséquent, la plus grande valeur des arcs $n\mathrm{R}$, nr n'atteindra pas 2° sexagésimaux. Or, le sinus d'un arc de 2° ne diffère de sa tangente que de $\frac{1}{1440}$ de sa valeur totale; par conséquent, la différence de l'arc lui-même à la tangente est encore moindre. On peut donc ici, sans craindre aucune erreur sensible, substituer au rapport des arcs nr, $n\mathrm{R}$, celui de leurs tangentes ou de leurs sinus. Nous aurons ainsi :

$$\mathrm{tang}\ nr = \mathrm{tang}^2 n\mathrm{R}.\ \mathrm{tang}\ (\mathrm{Z} - nr).$$

Pour dégager tang nr, développons l'expression de tang $(\mathrm{Z} - nr)$, qui est $\frac{\mathrm{tang}\ \mathrm{Z} - \mathrm{tang}\ nr}{1 + \mathrm{tang}\ \mathrm{Z}\ \mathrm{tang}\ nr}$; et, en multipliant les deux membres de l'équation par $1 + \mathrm{tang}\ \mathrm{Z}\ \mathrm{tang}\ nr$, afin de faire disparaître les dénominateurs, nous aurons, pour déterminer tang nr, cette équation du second degré

$$\mathrm{tang}\,\mathrm{Z}\ \mathrm{tang}^2 nr + (1 + \mathrm{tang}^2 n\mathrm{R})\ \mathrm{tang}\ nr = \mathrm{tang}^2 n\mathrm{R}.\mathrm{tang}\,\mathrm{Z},$$

qui, étant résolue par rapport à tang $n\mathrm{R}$, donne

$$\mathrm{tang}\ nr = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\sin^2 n\mathrm{R}\cos^2 n\mathrm{R}\ \mathrm{tang}^2\,\mathrm{Z}}}{2\cos^2 n\mathrm{R}\ \mathrm{tang}\ \mathrm{Z}}.$$

Le signe supérieur du radical est le seul que l'on doive prendre. Car, dans l'état régulier de l'atmosphère, il faut toujours que la réfraction r soit positive, quelle que soit la distance apparente au zénith. De plus, à moins que cette distance ne soit très-considérable, et même peu différente de 90°, le second terme de la quantité comprise sous le radical sera une fraction moindre que l'unité; et, par conséquent, le radical pourra être réduit en série convergente, au moyen de la formule du binôme. Il suffit, pour cela, que Z soit plus petit que $90° - 2n\mathrm{R}$; car s'il était même égal à $90° - 2n\mathrm{R}$, on aurait

$$\mathrm{tang}\ \mathrm{Z} = \mathrm{tang}\ 2n\mathrm{R} = \frac{\cos 2n\mathrm{R}}{\sin 2n\mathrm{R}};$$

et en substituant cette valeur, dans le radical, à la place de tang Z, le second terme se réduit à $\cos^2 2n\mathrm{R}$, qui est une fraction moindre que l'unité. Nous aurons soin, dans ce qui va suivre, de ne considérer que des distances zénithales beaucoup moindres que la précédente. Alors, en effectuant le développement du radical en série, et ne conservant que le signe supérieur,

nous aurons

$$\tang nr = \sin^2 nR \tang Z - \sin^4 nR \,.\, \cos^2 nR \tang^3 Z$$
$$+ 2 \sin^6 nR \cos^2 nR \tang^5 Z - \text{etc.}$$

Maintenant que notre inconnue est dégagée, nous pouvons, conformément à la méthode d'approximation que nous avons adoptée, substituer à $\frac{\tang nr}{\tang nR}$ le simple rapport des arcs $\frac{r}{R}$; ou, ce qui revient au même, écrire à la place de $\tang nr$, l'expression $\frac{r \tang nR}{R}$. Alors la série précédente donne

$$r = \frac{R}{2} \sin 2nR \tang Z - \frac{R}{8} \,.\, \sin^3 2nR \,.\, \tang^3 Z$$
$$+ \frac{R}{16} \,.\, \sin^5 2nR \,.\, \tang^5 Z - \ldots \text{ etc.}$$

Cette série converge d'autant plus rapidement que Z est moindre. Si l'on suppose, comme cela a lieu dans l'état moyen de l'atmosphère, $R = 32'$, $n = 3\frac{1}{4}$, et que l'on prenne $Z = 74°$, le troisième terme ne vaudra que des centièmes de seconde : il ne vaut pas 2" quand $Z = 82°$. Ainsi, en n'étendant la série qu'à des distances zénithales comprises entre zéro et les limites précédentes, nous pourrons borner la série à ses deux premiers termes. Alors elle sera comparable à l'expression

$$r = 0{,}99918761 \,.\, \alpha \tang Z - 0{,}001105823\, \alpha \tang^3 Z,$$

que nous avons trouvée à peu près dans les mêmes limites ; et en les comparant terme à terme, on aura

$$\frac{R}{2} \sin 2nR = 0{,}99918761 \,.\, \alpha; \qquad \frac{R}{8} \sin^3 2nR = 0{,}001105823 \,.\, \alpha.$$

Ces deux conditions suffisent pour déterminer R et n. Car, divisant la seconde par la première, on en tire d'abord

$$\sin 2nR = 2 \sqrt{\frac{0{,}001105823}{0{,}99918761}},$$

et ensuite, à l'aide de cette valeur, on a

$$R = 0{,}99918761 \,.\, \alpha \,.\, \sqrt{\frac{0{,}99918761}{0{,}001105823}}.$$

La première de ces expressions fera connaître $2nR$, la seconde R. En divisant l'une par l'autre, on aura n. Quant au coefficient constant A, qui multiplie toute la formule, comme on a

$$A = R \tang nR,$$

quand R et nR seront connues, il le sera pareillement. On doit observer que ce coefficient est extrêmement peu différent de α. Car, si l'on négligeait la

différence de sin R à tang nR, on pourrait prendre

$$A = R \sin nR = \tfrac{1}{2} R \sin 2\,nR = 0{,}99918761 . \alpha.$$

Si l'on effectue ces calculs numériques en mettant pour α la valeur 60″,525, que nous avons trouvée plus haut, il vient

$$nR = 6867'' ; \qquad R = 1817'',9 ; \qquad n = 3{,}78 ; \qquad A = 60'',510 ;$$

et ces valeurs étant reportées dans la formule primitive, elle devient

$$r = 60'',510 \text{ tang } (Z - 3{,}78 . r).$$

Ce résultat, déduit uniquement des observations de Méchain, que nous avons calculées, approche extrêmement de celui qu'a donné Laplace, et qui est

$$r = 60'',666 \text{ tang } (Z - 3{,}25\, r).$$

Mais on conçoit que ce dernier mérite plus de confiance, à cause du grand nombre d'observations physiques et astronomiques qui ont concouru à en déterminer les coefficients numériques.

Les nombres que nous venons d'obtenir sont relatifs à la température de la glace fondante et à la pression barométrique de $0^m,76$. Pour rendre la formule applicable à d'autres circonstances où la pression serait p et la température t, Laplace prescrit de multiplier le coefficient 60″,666, ou α, par le rapport des densités de l'air dans ces deux circonstances, c'est-à-dire par $\frac{p}{0{,}76(1+t.0{,}00375)}$. On verra facilement la raison de cette réduction, si l'on se reporte à l'expression de la réfraction que nous avons rapportée au commencement de cette note, et que nous avons annoncée comme applicable à tous les états de l'air. Dans tous les termes de cette formule, excepté dans le second, le coefficient α se trouve multiplié par le facteur $\frac{p}{0{,}76\,(1+t.0{,}00375)}$, qui se trouve élevé aux mêmes puissances. A la vérité, le second terme fait exception à cette règle; car α ne s'y trouve multiplié que par le rapport des pressions atmosphériques $\frac{p}{0{,}76}$. Mais, comme le coefficient numérique de ce terme 0,00125254 est extrêmement petit, on peut, sans inconvénient, lui appliquer aussi le dénominateur $\frac{1}{1+t.0{,}00375}$, qui, dans les températures ordinaires où l'on observe, est très-peu différent de l'unité. Alors α se trouve partout joint au facteur $\frac{p}{0{,}76\,(1+t.\,0{,}00375)}$; et, par conséquent, il suffira de faire varier α de cette manière dans la formule

$$r = 60'',666 \text{ tang } (Z - 3{,}25 . r),$$

qui n'est qu'une transformation de la première, et dans laquelle le coefficient commun 60″,666 représente à fort peu près α.

On voit, au reste, que les deux formules ne sont exactement comparables entre elles qu'entre les limites $Z = 0$ et $Z = 74°$. Pour des distances zénithales plus considérables, elles doivent s'écarter l'une de l'autre, et donner des résultats différents. Dans ce cas, il est sûr que la formule approchée, déduite de la théorie, n'est plus applicable, puisqu'elle donnerait une réfraction horizontale infinie. Il n'en est pas ainsi de la seconde formule que nous en avons déduite, et dans laquelle les puissances de tang Z sont enveloppées dans le seul terme tang $(Z - 3,25\, r)$. Celle-ci peut être étendue beaucoup plus bas, et même jusqu'à l'horizon, sans qu'il en résulte d'erreur considérable. Car la réfraction horizontale R qui en résulte et que nous avons trouvée de 1818″, ne s'écarte pas beaucoup de la véritable. Aussi cette formule, qui avait d'abord été trouvée empiriquement par les astronomes, a-t-elle été, jusqu'à ces derniers temps, généralement employée. Mais il est maintenant reconnu qu'à de petites hauteurs, cette formule n'est plus suffisamment exacte; et il faut alors recourir aux séries que Laplace a données, dans ces cas, dans la *Mécanique céleste*, et sur lesquelles sont calculées les nouvelles Tables de réfractions qu'il a publiées. On les trouve dans le Recueil des Tables du Soleil et de la Lune, publiées par le Bureau des longitudes de France.

La formule

$$r = A \operatorname{tang}(Z - nr)$$

ne se prête que difficilement au calcul de la réfraction r, parce que cette inconnue se trouve engagée dans les deux membres de l'équation. Aussi, les astronomes l'ont-ils retournée de diverses manières, afin de la rendre plus commode : pour cela, il faut d'abord lui donner la forme

$$\operatorname{tang} nr = \operatorname{tang}^2 nR \operatorname{tang}(Z - nr).$$

Ajoutons successivement aux deux membres de cette équation les quantités $+ \operatorname{tang} nr \operatorname{tang}^2 nR$, et $- \operatorname{tang} nr \operatorname{tang}^2 nR$, nous aurons :

$$\operatorname{tang} nr\,(1 + \operatorname{tang}^2 nR) = \operatorname{tang}^2 nR\,[\operatorname{tang}(Z - nr) + \operatorname{tang} nr];$$
$$\operatorname{tang} nr\,(1 - \operatorname{tang}^2 nR) = \operatorname{tang}^2 nR\,[\operatorname{tang}(Z - nr) - \operatorname{tang} nr].$$

Divisant ces équations membre à membre, tang nr disparaîtra du premier, et il viendra, en réduisant,

$$\frac{1}{\cos 2\,nR} = \frac{\sin Z}{\sin(Z - 2\,nr)};$$

d'où l'on tire

$$\sin(Z - 2\,nr) = \cos 2\,nR . \sin Z.$$

Lorsque Z sera donné, comme l'arc nR est connu, on pourra calculer la valeur numérique du second membre. On aura donc, par les Tables trigonométriques, la valeur de l'arc $Z - 2\,nr$: en le retranchant de Z, on aura $2\,nr$, et enfin r en divisant par $2\,n$, qui est un nombre connu.

Mais, quoique ce calcul puisse s'exécuter de cette manière, puisque l'inconnue nr ne se trouve plus que dans un seul membre, cependant il serait

incommode à effectuer, parce que la réfraction étant donnée par la différence des deux arcs Z et Z — 2 nr, qui peuvent être fort considérables, il faudrait calculer ces arcs avec une exactitude minutieuse pour avoir la réfraction r. On obtiendra un calcul plus simple en transformant l'expression de tang nr, que nous avons trouvée plus haut, en résolvant l'équation du second degré. Cette expression était

$$\operatorname{tang} nr = \frac{-1 + \sqrt{1 + \sin^2 2\,n\mathrm{R} \operatorname{tang}^2 \mathrm{Z}}}{2 \cos^2 n\mathrm{R} \operatorname{tang} \mathrm{Z}}.$$

Prenons un angle auxiliaire u, tel qu'on ait

$$\operatorname{tang} u = \sin 2\,n\mathrm{R} \operatorname{tang} \mathrm{Z};$$

et en éliminant tang Z au moyen de cette relation, l'expression de tang nr deviendra

$$\operatorname{tang} nr = \operatorname{tang} n\mathrm{R} . \left(\frac{1 - \cos u}{\sin u}\right);$$

ou, en remplaçant sin u et cos u par leurs expressions équivalentes, $2 \sin \frac{1}{2} u \cos \frac{1}{2} u$, et $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} u$,

$$\operatorname{tang} nr = \operatorname{tang} n\mathrm{R} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u.$$

Quand Z sera donné, la première équation donnera tang u, et par suite l'arc u. Cet arc étant connu, la seconde donnera tang nr, d'où l'on déduira l'arc nr, et enfin r, puisque l'on a adopté une valeur constante pour le coefficient n. Cette formule est d'une application très-commode. Mais, ainsi que je l'ai dit dans le tome Ier, page 233, c'est par une extension empirique qu'on l'a employée pour représenter les réfractions à toutes distances du zénith et à l'horizon même. Car son application réelle est restreinte aux mêmes limites que le développement analytique qu'elle ne fait que concentrer.

Lorsque les calculs précédents furent effectués, on supposait qu'un volume 1 d'air atmosphérique sec, pris à la température de 0°, devenait $1 + 0{,}00375\,t$ à t degrés du thermomètre centésimal, sous une même pression. Des expériences plus précises ont prouvé que le coefficient de dilatation est réellement 0,00366. La différence devient importante dans un grand nombre d'expériences physiques; mais elle n'a pas d'influence sensible dans le calcul des réfractions atmosphériques, parce que la température naturelle de la couche inférieure, qui seule y reste, n'est jamais assez distante de 0° pour en manifester l'effet. Je me suis assuré aussi que les pouvoirs réfringents relatifs et absolus, déterminés par M. Arago et moi, n'en sont pas non plus sensiblement affectés, parce qu'ils ont été conclus d'expériences faites à des températures peu distantes de 0°, précisément en vue d'échapper aux incertitudes qui pouvaient rester encore dans la valeur du coefficient de dilatation des gaz, qui était alors admise.

SUR LA LONGUEUR DU PENDULE A SECONDES

A DIFFÉRENTES LATITUDES (*).

Si l'on nomme l la longueur d'un pendule simple, t le temps d'une de ses oscillations, dans une amplitude d'arc infiniment petite, π le nombre 3,141592..., qui exprime le rapport de la circonférence au diamètre, et g la pesanteur représentée par le double de l'espace que décrivent les corps pesants pendant la première seconde de leur chute verticale, il existe entre ces quatre quantités la relation suivante :

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

c'est-à-dire que les temps des oscillations de différents pendules simples sont proportionnels aux racines carrées de leurs longueurs, et réciproques aux racines carrées des pesanteurs qui les sollicitent; t se trouve ainsi exprimé en secondes de même espèce que celles qui servent à déterminer g.

Pour un autre pendule simple dont une oscillation se ferait dans le temps t', on aurait de même, en nommant l' sa longueur, la pesanteur restant constante,

$$t' = \pi \sqrt{\frac{l'}{g}};$$

de là on tire

$$\frac{l'}{l} = \frac{t'^2}{t^2},$$

(*) Ayant expliqué en détail la mesure du temps par les horloges à pendule dans le chapitre X, et ayant indiqué dans la note annexée à la page 304 de ce même chapitre, l'emploi du pendule simple pour déterminer les variations d'intensité de la pesanteur en divers points de la surface terrestre, j'ai pensé qu'afin de n'avoir pas à revenir sur cette importante application, il convenait d'exposer tout de suite, à la fin du présent volume, la manière de l'effectuer par le procédé de Borda, qui me semble le plus exact qu'on puisse y employer. J'ai présenté ensuite l'ensemble des résultats les plus certains, obtenus par ce procédé ou par d'autres équivalents, sur les variations de la pesanteur dans les diverses régions de la terre.

c'est-à-dire que *les longueurs de deux pendules simples sollicités par la même pesanteur, sont entre elles comme les carrés des temps de leurs oscillations dans des arcs infiniment petits.*

Les valeurs de t et de t' sont faciles à déterminer par expérience. Soit N le nombre d'oscillations faites par le pendule l dans le temps T, on aura $t = \frac{T}{N}$, puisque toutes les oscillations sont d'égale durée; on aura de même pour l'autre pendule $t' = \frac{T'}{N'}$. Ces valeurs substituées dans la formule précédente, donnent

$$\frac{l'}{l} = \frac{T'^2}{T^2} \cdot \frac{N^2}{N'^2};$$

on connaîtra donc les rapports des longueurs des deux pendules, d'après les nombres d'oscillations qu'ils exécutent dans des temps donnés. Si les temps que l'on compare ainsi sont égaux, $T = T'$, et l'on a

$$\frac{l'}{l} = \frac{N^2}{N'^2};$$

c'est-à-dire que les longueurs de deux pendules simples sollicités par la même pesanteur, sont réciproquement proportionnelles aux carrés des nombres d'oscillations qu'ils exécutent en temps égaux dans des arcs infiniment petits.

C'est par cette formule que l'on calcule la longueur du pendule à secondes. Il serait, en effet, impossible de donner mécaniquement au pendule la longueur précise qu'il doit avoir pour faire exactement 86400 oscillations dans un jour, lorsqu'on se sert de la division sexagésimale ou 100000, quand on se sert de la division décimale du temps (*). Mais si l'on a observé un pendule simple, qui fait un certain nombre N d'oscillations dans un jour, soit moyen, soit

(*) J'ai expliqué, pages 307 et 308, ces deux modes de division du jour. J'ai aussi exposé, par anticipation, dans la note Ire, page 411, les rapports du jour moyen et du jour sidéral, ainsi que la manière de convertir, dans chacune de ces espèces d'unités, les intervalles de temps qui auraient été exprimés dans l'autre.

sidéral, et que sa longueur soit l, on en conclut aisément la longueur du pendule à secondes qui ferait N' oscillations dans le même temps; car en nommant l' cette longueur inconnue, on a, par la formule précédente,

$$l' = l\frac{N^2}{N'^2}.$$

Pour éviter d'avoir à faire des réductions considérables, on tâche d'approcher mécaniquement par des essais de la longueur cherchée. Alors N est peu différent de N', et en nommant n la différence, de sorte que $N = N' + n$, la formule devient

$$l' = l + \frac{2\,ln}{N'} + \frac{ln^2}{N'^2}.$$

Les deux derniers termes qui expriment la correction à faire au pendule observé, pour le réduire au pendule à secondes, sont très-petits et se calculent facilement.

Il faut maintenant dire comment on obtient la longueur l du premier pendule simple : car on sent qu'un pareil pendule, formé par un point pesant placé à l'extrémité d'un fil inflexible et sans masse, est purement idéal, et ne peut être obtenu que par des réductions mathématiques. Mais, si l'on ne peut s'astreindre à sa définition rigoureuse, du moins on tâche de s'en rapprocher; et pour cela on compose le pendule avec une sphère métallique très-dense, suspendue à l'extrémité d'un fil aussi métallique. Connaissant le poids de la boule, son diamètre, le poids du fil et sa longueur, on peut, d'après les formules de la mécanique, calculer les corrections extrêmement petites qu'il faut faire à la longueur observée, pour la réduire à celle d'un pendule simple qui ferait ses oscillations dans le même temps que le pendule composé que l'on a observé.

Cette expérience, pour être bien faite, exige une infinité de précautions et de soins que l'on trouvera décrits avec le plus grand détail dans le Mémoire de Borda sur la mesure du pendule, inséré par Delambre au troisième volume de l'ouvrage intitulé : *Base du système métrique décimal*, page 337. Je vais en donner une idée

ıccincte, en m'aidant de la *Pl.* XXII, qui représente toutes les ırties des appareils employés aux expériences.

D'abord il est avantageux que la boule soit faite de platine, le us dense et le plus pesant de tous les métaux : par ce moyen, la sistance de l'air altère moins le mouvement du pendule, et les cillations durent plus longtemps. Par ce moyen aussi la correction ıe au poids du fil est moindre.

Par la même raison, il faut que le fil métallique soit aussi fin que ssible, afin d'offrir moins de surface à l'air. Il faut qu'il soit bien mogène dans toutes ses parties, car on le suppose tel dans le cal- l. Pour s'assurer de cette condition, on mesure une longueur nnée du fil, on la pèse, puis la coupant en deux parties égales, ı pèse de nouveau chaque moitié, et l'on voit si leurs poids nt égaux. Il ne faut pas employer un fil de fer, de peur que le agnétisme terrestre qui agit sur ce métal n'ajoute une nouvelle rce à celle de la gravité que l'on veut observer. Enfin il convient ıe le fil dont on veut faire usage ait été préalablement tendu, ndant quelques jours, par un poids un peu plus fort que celui la boule qu'il doit supporter.

Pour attacher le fil à la boule sans altérer la sphericite de celle-ci, ı fait une calotte métallique de même rayon que la boule, et qui ıpplique exactement sur sa surface. Le fil s'attache à cette calotte ır une vis. Lorsque cette calotte est bien travaillée, le seul contact vorisé par une couche imperceptible de quelque matière grasse ffit pour déterminer l'adhésion des deux surfaces. La boule se ouve ainsi suspendue au fil métallique par le seul effet de cette lhésion, favorisée en cela par la pression de l'air qui presse la lotte sur la boule sans pouvoir s'insérer entre leurs surfaces.

Enfin, pour pouvoir suspendre librement tout l'appareil, on tache le bout supérieur du fil à un couteau de suspension, tel que lui qui supporte la verge des horloges; et l'on pose le couteau ır deux plans fixes, bien polis, formés de pierre dure, aux- ıels on donne une position parfaitement horizontale, au moyen un niveau à bulle d'air dont la base plane s'y applique, sans ıntermédiaire d'une enveloppe métallique. Ces plans sont enchâs- s dans un grand plateau de fer qui s'attache sur des supports

fixés et scellés dans une muraille solide, de manière à conserver une invariable immobilité. Tout cet appareil est représenté dans la *Pl.* XXII.

Les choses ainsi préparées, il ne reste plus qu'à mettre le pendule en mouvement, et à compter les oscillations qu'il fait dans un temps donné. Mais il faut de plus avoir égard à la grandeur des arcs qu'il décrit. Car les oscillations d'une étendue finie sont plus longues que les oscillations infiniment petites; et, lorsqu'elles se font dans des arcs peu considérables, leur durée augmente ainsi comme le carré du sinus de la moitié de l'arc décrit. Pour avoir égard à cette circonstance, on place devant le pendule une échelle horizontale divisée en parties égales, et dont on mesure la distance au centre de suspension. En observant sur cette échelle l'écart du pendule à droite et à gauche de la verticale, on peut aisément calculer l'angle qu'il décrit, et trouver la correction qu'il faut faire à chaque oscillation pour la réduire au cas de l'infiniment petit. Soient t' la durée observée d'une oscillation dans l'arc $2A$; t la durée d'une oscillation infiniment petite, on aura

$$t' = t\left(1 + \tfrac{1}{16}\sin^2 A\right).$$

Maintenant appelons N' le nombre d'oscillations faites par le pendule dans l'arc $2A$ et pendant le temps T; la durée t' d'une de ces oscillations sera $\frac{T}{N'}$. Désignons par N le nombre des oscillations infiniment petites qu'il aurait faites dans le même temps T; la durée t d'une seule de ces oscillations sera $\frac{T}{N}$. Substituant ces valeurs au lieu de t' et de t, dans la formule précédente, elle donne

$$N = N'\left(1 + \tfrac{1}{16}\sin^2 A\right).$$

Par ce moyen, quand on aura observé N', on aura N, c'est-à-dire le nombre d'oscillations infiniment petites que le même pendule aurait faites dans le même temps.

L'amplitude de l'arc dans lequel le pendule oscille va toujours en diminuant à cause de la résistance de l'air. Il est donc nécessaire d'avoir égard à ces variations. Si la durée totale de l'expérience est

peu considérable, on mesure les amplitudes A, A′, de l'arc, au commencement et à la fin des observations, et l'on calcule la correction avec l'arc moyen $\frac{1}{2}(A + A')$, ce qui donne

$$N = N'[1 + \tfrac{1}{16}\sin^2\tfrac{1}{2}(A + A')].$$

Mais si l'expérience dure plus longtemps, il faut calculer la correction d'amplitude d'une manière plus exacte. Pour cela, il faut partir de ce résultat donné par les lois de la mécanique et confirmé par l'expérience, c'est que, lorsqu'un pendule oscille dans l'air, l'amplitude des arcs décrits diminue en progression géométrique, quand le temps croît en progression arithmétique; d'après cette loi, le calcul donne

$$N = N'\left[1 + \frac{\sin(A - A')\sin(A + A')}{32\,M\log\left(\frac{\sin A}{\sin A'}\right)}\right],$$

M étant le module *inverse* des Tables logarithmiques ordinaires, c'est-à-dire 2,30258509 (*). Pour ne pas interrompre la série des raisonnements, je supprime ici la démonstration de cette formule. On la trouvera à la fin de cet exposé.

En l'appliquant à toutes les oscillations observées, on les réduit au cas de l'infiniment petit, ce qui les rend toutes comparables entre elles; c'est-à-dire que l'on trouve par ce calcul le nombre d'oscillations infiniment petites que le pendule observé aurait faites dans le même temps.

Compter ainsi les oscillations une à une, serait une chose très-fastidieuse et sujette à beaucoup d'erreurs; voici le moyen que l'on emploie pour l'éviter. On place derrière le pendule une horloge

(*) Je l'appelle module *inverse*, comme étant le nombre par lequel il faut *diviser* les logarithmes hyperboliques pour avoir les tabulaires. Car on nomme généralement module, le rapport réciproque 0,43429448... par lequel il faut *multiplier* les logarithmes hyperboliques pour opérer la même conversion. Il conviendrait d'appeler celui-ci module *direct*, afin d'éviter une ambiguïté d'expression qui se rencontre trop souvent dans les ouvrages de mathématiques.

que l'on règle avec soin sur les étoiles, c'est-à-dire dont on détermine le mouvement par des observations astronomiques avec une extrême précision. Avant d'observer ainsi le mouvement de l'horloge, on la met en repos ainsi que le pendule; puis l'on fixe sur sa lentille une petite marque, par exemple un petit cercle de papier blanc, et l'on place ce signal de manière qu'en le regardant d'un point fixe, éloigné d'environ 8 ou 10 mètres, avec une lunette terrestre immobile, le centre du petit cercle se trouve exactement dans le vertical du fil du pendule. Cela fait, on met en mouvement le pendule et l'horloge. Supposons qu'alors le fil du pendule coïncide sur le signal : si le pendule et l'horloge vont exactement du même mouvement, ils ne se sépareront jamais; mais si leurs vitesses sont inégales, comme cela arrive toujours, ils ne tardent pas à se quitter. Si c'est le pendule qui va plus vite que l'horloge, il dépasse le signal, et gagnant sur lui de plus en plus, à mesure que les oscillations se multiplient, il finit par arriver à l'extrémité de son oscillation quand le signal ne fait que de passer à la verticale. Alors il a gagné sur l'horloge une demi-oscillation. Le mouvement continuant toujours, cet excès augmente; et, après un autre intervalle de temps à peu près égal, le fil du pendule et le signal passent en même temps à la verticale; mais ils marchent dans des directions opposées. Alors le pendule a gagné sur l'horloge une oscillation entière. Continuant à gagner sur elle, il passe du côté opposé de la verticale, gagne encore une demi-oscillation, puis une oscillation entière; et enfin, après avoir gagné deux oscillations, il revient à la verticale en même temps que le signal, et en marchant dans le même sens. C'est ce que l'on appelle *une coïncidence*. Pour observer exactement l'époque de ce phénomène, on se sert du signal fixé sur la lentille de l'horloge. On place à 7 ou 8 mètres du pendule une lunette horizontale, munie, à son foyer, d'un fil vertical que l'on dirige sur le fil métallique du pendule, quand il est dans son point de repos. La lunette fixée dans cette position, détermine l'instant des coïncidences, lorsque le pendule et le signal passent en même temps derrière le fil. Dans l'intervalle de deux coïncidences, on sait que le pendule gagne ou perd sur l'horloge deux oscillations, selon qu'il va plus

ou moins vite qu'elle. Ainsi, en supposant que l'un et l'autre continuent de marcher uniformément, pendant une révolution entière, ou un *jour de l'horloge*, comprenant un nombre total de ses battements désigné par R, le nombre total P d'oscillations exécutées par le pendule sera proportionnellement :

$$P = \frac{R(N \pm 2)}{N} = R \pm \frac{2R}{N};$$

le second terme exprime l'avance ou le retard diurne du pendule sur l'horloge. Si celle-ci est sexagésimale, $R = 86\,400''$; si elle est décimale, $R = 100\,000''$. Plus l'intervalle des coïncidences sera considérable, plus le terme $\frac{2R}{N}$ sera petit, et par conséquent une petite erreur sur N sera moins sensible sur la différence que l'on cherche. Il est vrai qu'alors le pendule et l'horloge se quittant moins vite, la coïncidence est plus difficile à observer; mais la petitesse de la correction est un avantage qui surpasse cet inconvénient. Il faut donc s'efforcer, par des essais, d'amener le pendule et l'horloge à avoir une marche peu différente l'un de l'autre, ce qui se fait par des essais en allongeant ou en raccourcissant le fil de suspension. Il faut ensuite appliquer au nombre $R \pm \frac{2R}{N}$ la correction de l'amplitude des arcs, afin de réduire les oscillations au cas de l'infiniment petit. On connaîtra ainsi le nombre d'oscillations du pendule en un jour de l'horloge; et comme celle-ci est supposée réglée sur les étoiles, on aura, par une simple proportion, le nombre des oscillations du pendule dans un jour sidéral. On répète l'expérience sur un grand nombre de coïncidences, et l'on prend la moyenne des résultats.

Maintenant il ne reste plus qu'à trouver la longueur du pendule observé. Pour cela on le remet en repos. On a placé d'avance sous la boule métallique un petit plan d'acier bien horizontal, susceptible de se hausser et de se baisser par le moyen d'une vis, dont les filets, fins et serrés, permettent d'opérer ainsi des mouvements presque imperceptibles. Ce petit plan est fixé d'une manière invariable au-dessous de la boule de platine et dans la même verticale

que son centre. Lorsqu'on veut mesurer la longueur du pendule, on élève peu à peu le petit plan jusqu'à ce qu'il vienne toucher la boule par-dessous sans la soulever, ce qu'on juge par la transmission d'un filet de lumière. Alors on note la température, on ôte le pendule, et on lui substitue une règle divisée, suspendue de même par un conteau. Cette règle porte à son extrémité inférieure une languette mobile LA, que l'on amène en contact avec le petit plan d'acier. On connaît ainsi la distance de celui-ci au plan de suspension ; c'est la longueur totale du pendule composé, prise depuis son point le plus haut jusqu'au bas de la boule. On fait à cette longueur les corrections relatives au diamètre de la boule, à son poids, à celui du fil de la calotte, et l'on a la longueur du pendule simple qui ferait ses oscillations dans le même temps que le pendule observé. Il faut encore faire à ce résultat une petite correction dépendante de la densité de l'air; car cette densité diminue le poids de la boule d'une quantité égale au poids d'une boule d'air de même diamètre, et par conséquent elle diminue la pesanteur dans le rapport de ces mêmes poids. On démontre, en mécanique, que la présence de l'air n'influe sur la durée des oscillations que de cette seule manière, quand le mouvement du pendule est assez lent pour qu'il ne s'opère pas, derrière la boule, un remous sensible. Alors la résistance n'altère point leur durée totale, parce que si elle augmente la durée de chaque demi-oscillation descendante, en retardant le mouvement de la boule, elle diminue par la même cause la durée de chaque demi-oscillation ascendante de la même quantité : de sorte qu'il n'en résulte aucun changement dans l'oscillation totale. Je donnerai dans les notes la formule qui présente ces diverses corrections réunies.

Dans toutes les réductions précédentes, il faut avoir soigneusement égard à la température du fil métallique, afin de corriger sa longueur des variations qu'elle peut éprouver. Quand la température a changé pendant la série des diverses coïncidences, on regarde toutes les observations comme se rapportant à la température moyenne de la série ; et si le contact du petit plan d'acier sous la boule de platine a été effectué à une température un peu différente, on le ramène par le calcul à cette température moyenne,

ı ôtant ou ajoutant à la longueur mesurée la quantité dont le fil étallique a dû s'allonger ou se raccourcir par suite de ces variations. ır le pendule dont on cherche à mesurer la longueur doit être lui dont on a observé les coïncidences, et non pas un pendule us long ou plus court. En outre, il faut éviter avec le plus grand in de donner à l'air environnant la moindre agitation qui pourit modifier le mouvement naturel du pendule. Par toutes ces isons, on enveloppe l'appareil d'une cage de verre, et l'on place s thermomètres dans son intérieur. On doit même envelopper ıssi d'une seconde cage de verre, l'horloge devant laquelle le endule oscille. Car, sans cette précaution, la lentille et la boule se ommuniqueraient mutuellement une partie de leur mouvement ır l'intermédiaire de l'air interposé; et comme la boule du pendule ıt beaucoup moins pesante, la durée de ses oscillations pourrait orouver ainsi des changements considérables. Enfin, lorsqu'on a abli le contact du plan d'acier avec la boule de platine ou avec barre qui sert à mesurer la longueur, il ne faut pas adopter ıssitôt cette longueur comme exacte. En effet, la seule présence de observateur dans l'intérieur des cages de verre pendant quelques ıinutes, suffit pour élever la température et pour dilater sensilement la barre qui sert de mesure, ou le fil métallique auquel la oule de platine est suspendue. Lorsqu'on a établi un premier ontact, il faut se retirer, fermer l'appareil et le laisser douze ou uinze minutes de temps, pour qu'il reprenne sa première tempéature. Alors, en retournant vérifier le contact, on trouve presque oujours qu'il n'a plus lieu. On le rétablit donc; mais cette fois, omme il restait peu de chose à faire, on ne demeure dans l'appareil que quelques instants fort courts. Dans une seconde vérificaion on reste moins de temps encore, et enfin on parvient, par uelques essais, à établir un contact permanent; c'est alors que 'on observe les thermomètres, et que l'on note la température où e contact a eu lieu.

Au moyen de toutes ces précautions, on obtient avec une xtrême exactitude la longueur du pendule simple qui ferait ses ıscillations dans le vide, dans le même temps que le pendule comosé que l'on a observé. Désignons cette longueur par l; supposons

de plus que le pendule observé fasse $N' + n$ oscillations dans un jour sidéral, représenté par N'; enfin nommons l' la longueur cherchée du pendule à secondes; nous obtiendrons l' par la formule

$$l' = l + \frac{2ln}{N'} + \frac{ln^2}{N'^2},$$

que nous avons donnée plus haut, page 434.

Enfin il reste encore à réduire cette longueur à ce qu'elle serait, si l'observation eût été faite au niveau de la mer. En effet, la pesanteur diminue à mesure que l'on s'éloigne de ce niveau, et l'on démontre, en mécanique, que les longueurs des pendules synchrones sont proportionnelles aux pesanteurs qui les sollicitent. Il s'ensuit qu'il faut raccourcir le pendule à mesure qu'on s'élève, si l'on veut qu'il fasse toujours le même nombre d'oscillations dans le même temps. Soit donc g l'intensité de la pesanteur dans le lieu de l'observation, dont la hauteur sur le niveau de la mer est h. Nommons (g) l'intensité de cette force au niveau de la mer et à la même latitude, le rayon de la Terre en ce point étant a. On sait, qu'en faisant abstraction des circonstances locales, dont l'appréciation est toujours problématique, ces intensités sont réciproques au carré de la distance au centre de la Terre. On aura donc $\frac{(g)}{g} = \frac{(a+h)^2}{a^2}$, ou simplement $\frac{(g)}{g} = 1 + \frac{2h}{a}$, en négligeant le carré de la fraction $\frac{h}{a}$ qui est toujours très-petite. Ainsi, pour réduire au niveau de la mer le pendule à secondes calculé dans le lieu de l'observation, il faudra le multiplier par $1 + \frac{2h}{a}$, c'est-à-dire qu'en le nommant l' comme nous l'avons dit tout à l'heure, on aura :

Longueur du pendule à secondes au niveau de la mer $= l' + \frac{2hl'}{a}$.

La méthode précédente me semble la plus exacte de toutes celles que l'on a employées pour ce genre d'expériences, surtout quand on veut les répéter, avec des caractères exactement comparables, en différents lieux éloignés les uns des autres. Quand on l'applique

c les soins qu'elle exige, elle donne entre les résultats partiels exactitude surprenante. J'en rapporterai pour exemples les ervations suivantes faites par M. Mathieu et moi à Dunkerque, 1809.

Expériences du pendule faites à Dunkerque

OURS.	NOMBRE d'oscillations de l'horloge dans un jour solaire moyen.	NOMBRE d'oscillations du pendule dans un jour solaire moyen.	LONGUEUR du pendule dans l'air.	LONGUEUR du pendule à secondes décimales dans le vide calculée.	ÉCARTS autour de la moyenne.
			m	m	m
1809, 27	100035,265	100008,170	0,7419044	0,7420718	—0,0000148
28	100035,034	100007,425	0,7419249	0,7420812	— 54
		100007,071	0,7419366	0,7420874	+ 8
..... 1	100034,928	100007,753	0,7419257	0,7420867	+ 1
		100007,080	0,7419266	0,7420775	— 91
2	100034,928	100007,874	0,7419210	0,7420842	— 24
		100007,706	0,7419230	0,7420837	— 29
4	100035,444	100007,193	0,7419368	0,7420896	+ 30 (*)
		100007,145	0,7416346	0,7420866	+ 0
5	100035,244	100006,670	0,7419339	0,7420788	— 78
		100006,584	0,7419594	0,7421029	+ 163
6	100035,044	100008,057	0,7419372	0,7421030	+ 164
7	100034,882	100007,367	0,7416362	0,7420918	+ 52
ıne, ou longueur du pendule décimal à Dunkerque.....					0,7420866

ème fil que dans les expériences précédentes, seulement la boule est suspendue par le point Cette nouvelle disposition de l'appareil a été maintenue pendant les six dernières séries.

)n voit que le point de suspension de la boule a été changé le ıars. Ce changement avait pour objet de compenser les erreurs auraient pu provenir d'un défaut d'homogénéité dans la boule. ut toujours avoir cette précaution dans le cours des expériences. a méthode que je viens d'exposer a été imaginée par Borda,

et il en a fait usage, conjointement avec M. de Cassini, pour déterminer la longueur du pendule à secondes à l'Observatoire de Paris. Nous avons depuis employé cette méthode, MM. Arago, Mathieu, Bouvard et moi, sur divers points de l'arc de la méridienne depuis Formenterajusqu'à Dunkerque, et nous avons pu apprécier toute son exactitude. La seule modification que nous y avons faite consiste à avoir rendu l'appareil portatif sans lui avoir rien ôté de sa précision. Car le pendule dont s'était servi Borda n'avait pas moins de 4 mètres de longueur, au lieu que celui dont nous faisons usage n'a guère que 76 centimètres. Cette nouvelle disposition de l'appareil était indispensablement nécessaire pour que nous pussions l'employer dans nos voyages (*). La principale cause de cette simplification consiste dans l'extrême exactitude du procédé qui nous sert à mesurer la longueur de notre pendule; cette exactitude nous dispense de chercher une plus grande précision dans une augmentation de longueur. Notre mesure se fait au moyen d'un instrument portatif et d'un très-petit volume, avec lequel on rend sensibles jusqu'à des millièmes de millimètre. Cet instrument, que l'on appelle *comparateur*, est indépendant des erreurs de division auxquelles des verniers sont sujets, lorsqu'on s'en sert pour mesurer toujours à peu près dans les mêmes points d'un limbe ou d'une règle divisée. On en trouvera une courte description dans une note placée à la fin de ce chapitre, et j'exposerai en même temps la manière d'en faire usage. Je souhaite que l'extrême simplicité de cet appareil, et sa parfaite exactitude encouragent les voyageurs instruits à s'occuper davantage des expériences du pendule lorsqu'ils parcourent des contrées où l'on n'a pas encore pu mesurer un arc du méridien terrestre. De pareilles observations seraient extrêmement utiles pour la connaissance de la figure de la

(*) Toutefois, postérieurement aux expériences rapportées ici, M. Arago a proposé, avec raison, de faire l'expérience sur le pendule sexagésimal plutôt que sur le décimal, parce que sa longueur se rapprochant davantage du mètre, la comparaison des barres avec l'étalon métrique se fait avec plus de certitude et de facilité. J'ai opéré ainsi dans toutes les expériences qui me sont propres, et que je rapporterai plus loin.

Terre, surtout si elles étaient faites dans l'hémisphère austral, auquel les observations de La Caille semblent donner un aplatissement différent de celui que l'on observe sur l'hémisphère boréal.

Pour ne pas interrompre le raisonnement, j'ai omis une disposition qu'il est fort utile de donner au couteau de suspension, afin qu'il n'altère pas le mouvement du pendule. Elle consiste d'abord à faire en sorte que le centre de gravité de ce couteau se trouve extrêmement près de l'arête de suspension : en outre, il faut qu'il soit surmonté par une vis mobile, comme on le voit dans la *Pl.* XXII, afin de pouvoir faire varier son centre d'oscillation. Par ce moyen, on règle le couteau de manière que ses oscillations isolées soient à fort peu près les mêmes que celles du pendule total. Alors, en effet, la masse du couteau n'a aucune influence pour accélérer ou retarder son mouvement, et il est comme s'il n'existait pas. Pour arriver à ce but, nous commençons par accorder à peu près le couteau seul avec l'horloge ; ensuite on y attache le fil, auquel la boule est déjà suspendue ; et l'on accorde encore le tout avec l'horloge, ou du moins on fait en sorte que les oscillations soient longtemps à se séparer ; cela se fait en allongeant ou raccourcissant le fil, sans modifier le couteau. Alors le couteau et le pendule se trouvent aussi à peu près d'accord ; je dis à peu près, car il est impossible qu'il n'y ait pas à cet égard quelque différence ; mais l'influence de cette différence est comme anéantie par le peu de distance du centre de gravité du couteau à la ligne de suspension. Ce procédé ingénieux a été pareillement imaginé par Borda. Il s'était assuré de son exactitude en répétant successivement la mesure du pendule à secondes avec deux couteaux réglés de cette manière, mais dont les poids étaient très-différents, et il avait trouvé qu'il n'en résultait aucun changement dans les coïncidences. J'ai confirmé cet important résultat, par des expériences faites dans une même station (le fort de Leith, en Écosse), avec des couteaux d'une acuité très-différente. Les longueurs conclues du pendule simple se sont trouvées exactement pareilles. Laplace avait supposé que le tranchant des couteaux pouvait être assimilé à un cylindre circulaire d'un rayon très-court, autour du centre duquel les oscillations s'effectuaient ; et il en

avait conclu la nécessité d'une petite correction soustractive de la longueur du pendule donnée par les mesures immédiates. Les expériences que je viens de citer, prouvent que, si cette correction est vraie théoriquement, elle est, par le fait, absolument insensible, quand le mouvement oscillatoire du couteau est mis préalablement en concordance aussi approchée que possible avec celui du pendule total, comme Borda le prescrivait, et comme on doit le faire toujours quand on emploie son procédé. Cela tient, je crois, à ce que le tranchant des couteaux, plus ou moins bien polis, n'est physiquement qu'une droite semée d'aspérités plus ou moins saillantes, mais toujours très-petites, comme on le reconnaît en les observant au microscope. Alors ils ne posent jamais absolument que sur quelques-unes de ces aspérités, et le rayon de celles-ci étant d'une dimension insensible, la correction qui en résulterait devient pareillement inappréciable, surtout, comme je le répète, lorsque les oscillations propres du couteau et celles du pendule total ont été rendues préalablement concordantes.

On ne saurait prendre trop de soin à ce que le contact du plan d'acier, avec la boule de platine, puis avec la règle, s'opère avec exactitude, *sans soulèvement*. On n'en peut bien juger que par la transmission d'un trait de lumière, qui disparaît au point de contact. Lorsque celui-ci s'opère sur la boule avec justesse, on la voit osciller verticalement, comme par un mouvement de titillation.

Au moyen de la méthode précédente, les variations du pendule à secondes à différentes latitudes deviennent sensibles, même pour des parallèles qui ne sont que peu éloignés les uns des autres. J'en rapporterai plus bas des exemples, où je rassemblerai les résultats les plus exacts qui aient été ainsi obtenus dans les diverses régions de la Terre.

NOTE I.

J'ai promis de démontrer la formule rapportée, page 437, pour la correction des amplitudes ; voici cette démonstration (*).

Nommons $2a$ l'arc dans lequel le pendule oscille, en sorte que a soit l'angle qu'il décrit de part et d'autre de la verticale. Pendant le temps qu'il emploie à faire une oscillation entière dans cet arc, il ferait un peu plus d'une oscillation infiniment petite ; il en ferait $1 + \frac{1}{16}\sin^2 a$; ceci est un résultat de mécanique.

Supposons donc, qu'en partant de cette amplitude, on laisse le pendule osciller dans l'air ; l'arc a, diminuant continuellement, deviendra $a', a'', \ldots, a^{(n)}$; les membres correspondants d'oscillations infiniment petites seront $1 + \frac{1}{16}\sin^2 a'$, $1 + \frac{1}{16}\sin^2 a''$, et ainsi de suite ; en sorte qu'après un nombre n d'oscillations finies, écoulées depuis l'époque où l'écart du pendule était a, le nombre des oscillations infiniment petites correspondantes sera la somme de tous les termes précédents, c'est-à dire

$$n + \frac{\sin^2 a'}{16} + \frac{\sin^2 a''}{16} + \frac{\sin^2 a'''}{16} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\sin^2 a^{(n)}}{16};$$

ainsi, pour obtenir ce nombre en termes finis, il faut sommer la série qui s'ajoute à n. Pour cela nous nous appuierons sur ce principe d'expérience, que les arcs a', a'' décroissent en progression géométrique quand le nombre des oscillations croît en progression arithmétique. Comme ces arcs sont fort petits, on pourra établir la même loi entre leurs sinus, c'est-à-dire qu'en partant de l'instant où l'écart du pendule était a, on aura, après n oscillations,

$$\sin a^{(n)} = \frac{\sin a}{K^n},$$

K étant un coefficient constant pour le même pendule et dépendant de sa longueur, de sa forme et de ses autres qualités physiques. Cette loi, que Borda avait remarquée et que nous avons vérifiée par l'expérience, pourrait aussi se déduire de la théorie, en supposant la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse. Peut-être n'aurait-elle plus lieu pour de très-grands angles ; mais il nous suffit qu'elle soit exacte dans le cas où nous voulons l'employer. D'après cela, on peut exprimer chacun des termes de la série en

(*) Dans la précédente édition de cet ouvrage, la démonstration qui suit renfermait une faute de calcul évidente, laquelle consiste à avoir omis d'écrire le carré du nombre n aux dénominateurs de la série dont la somme est désignée par S. Cette faute a été corrigée ici, et le résultat final est le même que Borda avait obtenu.

fonction du premier ; et en représentant leur somme par S, on aura

$$S = \frac{\sin^2 a}{16}\left(\frac{1}{K^2} + \frac{1}{K^4} + \frac{1}{K^6} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{K^{2n}}\right).$$

Les termes compris entre les parenthèses forment une progression géométrique, on peut les sommer ; et l'on a alors

$$S = \frac{\sin^2 a}{16} \cdot \frac{K^{2n} - 1}{(K^2 - 1)\,K^{2n}}.$$

On peut éliminer K, et ne laisser dans la formule que le premier terme avec le dernier $a^{(n)}$; en effet, on a

$$\sin a^{(n)} = \frac{\sin a}{K^n};$$

par conséquent

$$K^{2n} = \left(\frac{\sin a}{\sin a^{(n)}}\right)^2 \quad \text{et} \quad K^2 = \left(\frac{\sin a}{\sin a^{(n)}}\right)^{\frac{2}{n}};$$

de là on tire

$$S = \frac{\frac{\sin^2 a}{16}\left[\left(\frac{\sin a}{\sin a^{(n)}}\right)^2 - 1\right]}{\left[\left(\frac{\sin a}{\sin a^{(n)}}\right)^{\frac{2}{n}} - 1\right]\left(\frac{\sin a}{\sin a^{(n)}}\right)^2} = \frac{1}{16}\,\frac{(\sin^2 a - \sin^2 a^{(n)})}{\left[\left(\frac{\sin a}{\sin a^{(n)}}\right)^{\frac{2}{n}} - 1\right]}.$$

La résistance de l'air est très-petite dans nos expériences, parce que notre boule de platine est très-pesante, et que le fil qui la soutient présente très-peu de surface. Cela fait que l'amplitude décroît avec beaucoup de lenteur ; de sorte qu'en général, les arcs a et $a^{(n)}$ sont toujours peu différents. On peut profiter de cette circonstance pour extraire la racine *nième* de $\frac{\sin a}{\sin a^{(n)}}$ par approximation. Cela se fait aisément par le moyen des logarithmes ; car on a, dans les logarithmes ordinaires,

$$\left(\frac{\sin a}{\sin a^{(n)}}\right)^{\frac{2}{n}} = 10^{\frac{+\,2\log\left(\frac{\sin a}{\sin a^{(n)}}\right)}{n}};$$

or, en développant le second membre,

$$\left(\frac{\sin a}{\sin a^{(n)}}\right)^{\frac{2}{n}} = 1 + \frac{2\,M}{n} \cdot \log\frac{\sin a}{\sin a^{(n)}} + \frac{4\,M^2}{1.2.n^2}\log^2\frac{\sin a}{\sin a^{(n)}} + \text{etc.},$$

M étant le module *inverse* des Tables logarithmiques, ou 2,302585. Mais comme $\frac{\sin a}{\sin a^{(n)}}$ diffère très-peu de l'unité, on peut se borner à la première puissance de son logarithme ; et, en introduisant ce résultat dans l'expression

de S, il vient

$$S = \frac{1}{16}\,\frac{[\sin^2 a - \sin^2 a^{(n)}]}{\frac{2M}{n}\log\left(\frac{\sin a}{\sin a^{(n)}}\right)} = \frac{n[\sin^2 a - \sin^2 a^{(n)}]}{32\,M\log\left(\frac{\sin a}{\sin a^{(n)}}\right)},$$

ou encore

$$S = \frac{n[\sin a - \sin a^{(n)}][\sin a + \sin a^{(n)}]}{\left[32\,M\log\left(\frac{\sin a}{\sin a^{(n)}}\right)\right]};$$

par conséquent, la somme des oscillations infiniment petites correspondantes à n oscillations finies du même pendule, partant de l'amplitude a, et terminées à l'amplitude $a^{(n)}$, sera

$$n + \frac{n\,[\sin a - \sin a^{(n)}]\,[\sin a + \sin a^{(n)}]}{32\,M\log\left(\frac{\sin a}{\sin a^{(n)}}\right)}.$$

La petitesse à laquelle on restreint toujours les arcs extrêmes a, $a^{(n)}$, dans les expériences, permet de les supposer proportionnels à leurs sinus. Par conséquent, dans cette condition de limitation, l'on peut écrire $\sin[a - a^{(n)}]$, au lieu de $\sin a - \sin a^{(n)}$; et $\sin[a + a^{(n)}]$, au lieu de $\sin a + \sin a^{(n)}$. La réduction à faire au nombre n d'oscillations observées, pour avoir le nombre d'oscillations infiniment petites, qui auraient été faites dans le même intervalle de temps par le pendule employé aux expériences, sera ainsi :

$$\frac{n\sin[a + a^{(n)}]\sin[a - a^{(n)}]}{32\,M\log\left(\frac{\sin a}{\sin a^{(n)}}\right)}.$$

Cette expression est la même que Borda a présentée, sans démonstration, dans son beau Mémoire sur la mesure du pendule, insérée par Delambre au tome III de son ouvrage intitulé : *Base du système métrique décimal*, p. 354. C'est celle aussi qui a été employée pour calculer toutes les expériences faites par nous, en différents points de l'Europe, avec le même appareil.

Il ne me reste plus qu'à donner la formule dont nous nous sommes servis pour réduire le centre de figure de la boule à son centre d'oscillation, pour faire les corrections relatives au poids du fil, de la calotte, à la pesanteur de l'air; en un mot, pour ramener le pendule observé à l'état du pendule simple. Notre formule diffère un peu de celle que Borda employait, et qu'il a consignée dans son Mémoire sur le pendule, parce qu'en opérant avec un appareil quatre fois plus court que le sien, nous avons dû pousser un peu plus loin l'approximation relativement à certaines quantités qui auraient pu devenir sensibles dans nos expériences, quoiqu'elles ne le fussent pas dans son appareil. Comme la formule renferme un assez grand nombre de quantités, je vais, pour fixer les idées, rapporter, avec les lettres qui les désignent, leurs significations et les valeurs numériques qu'elles avaient

dans nos [illegible] pareils; cela pourra servir de guide à ceux qui voudraient faire de semblables observations. Les longueurs sont exprimées en parties du mètre, et les poids en grammes.

Distance de l'axe de suspension au centre de la boule de platine. . . . . = L

Rayon de la boule de platine à la température de 0°. . . . . = R = $0^m,018260$[illegible]

Poids de la boule de platine en grammes. . . = M = $5264^g,457$

Distance de l'axe de suspension jusqu'au bas de la boule. . . . . = A

Distance de l'axe de suspension au commencement du fil. . . . . = $b = 0^m,0343$

Distance du centre de g[illegible]otte au centre de la boule . . . . . = D = $0^m,0300985$

Poids de la calotte [illegible] . . . . . = $m = 6^g,168$

Poids du fil en gram[illegible] . . . . . = $p = \frac{(A-b-2R)}{2,007}\,0^g,246$[illegible]

Le nombre $0^g,246$[illegible] l'une longueur de notre fil égale à $2^m,007$.

Quand toutes ces quantités [illegible]nues par l'observation, le pendule simple l, synchrone avec le pe[illegible]ervé, aura pour longueur dans l'ab[illegible]

$$l = [illegible]\frac{2R^2}{5ML^2}\Big) - Q,$$

en supposant

$$Q = \frac{\frac{p}{6M}\left[L+b+R+\frac{2(bR-R^2-b^2)}{L}\right]+\frac{m}{M}\left(D-\frac{D^2}{L}\right)+\frac{pR^2}{5ML^2}\left(L+b-R\right)+\frac{2mR^2}{5ML^2}\left(L-D\right.}{1+\frac{p}{2M}\left(1+\frac{b-R}{L}\right)+\frac{m}{M}\left(1-\frac{D}{L}\right)}$$

En calculant l'influence des erreurs que peuvent introduire la conformation de l'appareil et les diverses approximations que l'on est obligé de faire pour appliquer le calcul à ses diverses parties, je me suis assuré qu'aucune de ces erreurs ne peut influer dans la formule pour plus de un millième de millimètre dans les cas les plus défavorables (*).

(*) Je profite de cette occasion pour faire remarquer que dans l'ouvrage que nous avons publié, M. Arago et moi, sur les opérations d'Espagne, page 464, cette formule déjà réduite a été transcrite avec une faute d'impression heureusement évidente; elle porte sur le coefficient du dernier terme du dénominateur que l'on a écrit $\frac{M}{m}$, au lieu de $\frac{m}{M}$, qui est son vrai valeur, nécessitée par la condition même de l'approximation sur laquelle cette formule repose.]

NOTE II.

Description et usage du comparateur.

Le comparateur est un instrument qui sert, comme son nom l'indique, our comparer entre elles des longueurs peu différentes les unes des autres, t son but est d'indiquer leurs plus petites différences avec une extrême préision.

Il est essentiellement composé d'une règle métallique TR, *Pl.* XXII, ui doit être bien droite et assez forte pour ne pas se fléchir, quand elle est osée sur un plan solide horizontal. Cette règle, à l'une de ses extrémités orte un talon fixe T, qui sert à appuyer un des bouts des mesures que l'on ompare. Un châssis mobile RR parcourt la surface de la règle, et peut se xer à volonté sur un quelconque de ses points, au moyen de deux fortes vis e pression RR.

Ce châssis forme la partie essentielle du comparateur. Il porte un touillon fixe *c* autour duquel tourne le levier coudé *bcb'*, dont les deux branhes *b*, *b'*, ont des longueurs inégales, qui sont entre elles comme 1 est à 10. Il uit de là que, si l'on pousse le sommet *b* du petit bras d'une quantité égale *x*, le bout du grand bras *b'* décrit autour du centre commun un angle ix fois plus considérable, par conséquent égal à 10*x*. Pour mesurer ce ouvement, on applique sur le châssis un arc circulaire DD, divisé en cinuièmes de millimètre, et l'on fixe, à l'extrémité du grand bras *b'*, un verier V, qui permet d'évaluer les dixièmes de cette division, par conséquent les inquantièmes de millimètre; et comme les mouvements du point V sont écuples de ceux du point *b*, on voit que chaque partie indiquée par le ernier répond en *b* à deux millièmes de millimètre.

Maintenant, quand on veut comparer avec cet instrument les longueurs e deux règles B, B' très-peu différentes l'une de l'autre, on place l'une 'elles, B par exemple, sur le comparateur, de manière qu'elle repose libreıent sur sa surface, et que l'une de ses extrémités soit appuyée contre talon T; puis on amène le châssis vers l'autre extrémité de B, et on presse contre cette extrémité jusqu'à ce que le vernier V réponde à peu rès au milieu de la division. Cela fait, on serre les vis de pression du hâssis, et on s'écarte de l'appareil pendant quelque temps pour lui laisser eprendre la température du lieu. Il est bon d'avoir un thermomètre placé ur la surface même de la règle du comparateur.

Quand on pense que la température du lieu s'est rétablie dans l'appareil, n se rapproche et on lit la division à laquelle répond le vernier V. Puis, sans déplacer le châssis du comparateur, on ôte la règle B, on lui substitue la ègle B', et on laisse encore la température se rétablir. Alors on revient lire le nouveau l'indication du vernier. Si la division est la même que pour la ègle B, les deux règles sont égales en longueur; si la division est différente,

l'arc parcouru par le vernier indique en cinq-centièmes de millimètre la différence des longueurs.

Nous avons supposé que la température de l'appareil reste constante pendant toute l'opération. Il faut toujours s'efforcer d'atteindre cette condition en se plaçant à l'ombre, dans de grandes salles où la température varie peu. Mais si, malgré toutes ces précautions, il survenait quelques changemens dans la température, on réduirait les longueurs mesurées et l'intervalle TT' du comparateur à la même température, au moyen des dilatations connues des métaux. Lorsque le comparateur et les règles que l'on compare sont de même métal, ces corrections sont inutiles, parce qu'alors l'intervalle TT' du comparateur se dilate exactement comme la règle qui est posée sur sa surface, et, par conséquent, leur différence reste constante, malgré le changement de leur température. Comme les métaux les plus employés sont le cuivre et le fer, je joindrai ici leur dilatation pour 1° du thermomètre centésimal, et pour une longueur égale à l'unité :

Dilatation du cuivre,... $C = 0,0000178$;
du fer..... $F = 0,0000114$.

Lorsque l'on veut se servir d'un comparateur, il faut commencer par vérifier les divisions de son vernier, ou du moins il faut les rapporter, ainsi que toutes les autres divisions dont on fait usage, à un étalon bien connu, que l'on puisse toujours retrouver et vérifier lui-même. Je donnerai plus tard le moyen qu'il faut employer pour cet objet.

Je me bornerai à dire ici que toutes les observations, toutes les mesures dont je viens de parler, ne doivent pas se faire à l'œil nu, mais avec une forte loupe qui permette de lire exactement les divisions. Il est aussi extrêmement important que le contact des règles avec le talon du comparateur et avec le petit levier soit bien établi, et l'on ne saurait y donner trop d'attention.

De la règle qui sert à mesurer la longueur du pendule, et de la manière la plus avantageuse de la diviser.

La règle qui sert à mesurer le pendule devant être elle-même mesurée sur le comparateur, il faut que ses deux extrémités soient parfaitement libres. Cependant il faut aussi pouvoir la suspendre à la place du pendule, de manière que son extrémité supérieure se trouve dans le plan même de suspension. On atteint ces deux conditions au moyen du couteau percé représenté dans la *Pl.* XXII. Quand on veut mesurer le pendule, on ajuste ce couteau sur la tête de la règle, on le serre par le moyen d'une vis, et l'on examine, par le passage d'un trait de lumière, s'il est bien en contact avec elle. L'opération faite, on ôte le couteau et l'on porte la règle sur le comparateur. Il faut que la règle soit en fer, afin que ses contractions et ses expansions s'opèrent avec uniformité, ce qui n'a pas lieu pour l'acier trempé, dans lequel ces phénomènes s'opèrent par saccades irrégulières. Mais la tête de la règle sur laquelle le couteau s'applique doit être d'acier, afin que le tranchant du couteau ne puisse pas y pénétrer ; car si cela

arrivait, le sommet de la règle se trouverait élevé au-dessus du plan de suspension, et la longueur mesurée serait plus grande que celle du pendule oscillant.

Le couteau étant fixé sur la règle, et celle-ci étant suspendue à la place du pendule, on pousse doucement sa languette jusqu'à ce qu'elle touche le petit plan d'acier que l'on avait précédemment amené en contact avec la boule de platine. Nous avons expliqué cette opération, page 439. Le contact établi et vérifié, on serre la vis d'arrêt de la languette, on retire la règle et on la porte sur le comparateur.

C'est ici le cas de dire qu'avant de faire sortir la languette, l'artiste a tracé sur la règle et sur la languette, des divisions égales qui les traversent l'une et l'autre, et qui sont marquées par ordre 0, 1, 2, 3,... etc.; ainsi on peut juger que la languette est rentrée complétement, lorsque sa division 0 coïncide avec la division 0 de la règle, et qu'il en est de même de toutes les autres divisions correspondantes. Mais si le n° 0 de la languette coïncide avec le n° 1 du vernier, le n° 2 avec le n° 3, et ainsi de suite, on doit conclure que la languette est sortie d'une division, et en général, la différence des numéros des divisions coïncidentes indique la quantité dont la languette a marché. Par conséquent, si l'on connaît la longueur absolue de la règle lorsque la languette est rentrée, et si l'on connaît aussi la valeur des divisions, la somme de la règle et des divisions donnera directement la longueur totale qu'il s'agissait de mesurer.

Cela suffirait si la quantité dont on fait sortir la languette répondait toujours à un nombre exact de divisions; mais cette exactitude est comme impossible. Il arrive presque toujours que la coïncidence n'est point exacte, et que la languette sort d'un certain nombre de divisions, plus ou moins une fraction qu'il s'agit de déterminer.

C'est alors que le comparateur est utile. On y porte la règle et on amène le châssis mobile en contact avec l'extrémité de la languette, de manière que le vernier réponde, à peu près, au milieu des divisions; puis, lorsque la température uniforme s'est rétablie, on lit ce vernier; et l'on fait ensuite marcher la languette de manière à compléter la coïncidence des divisions. La marche du vernier indique la quantité de ce mouvement. C'est précisément la fraction que l'on voulait déterminer. On l'ajoute à la longueur absolue de la règle et au nombre de divisions entières de la languette; la somme est la longueur totale cherchée.

Dans une des règles qui a servi à nos expériences, les divisions marquaient des cinquièmes de millimètre. La longueur absolue de cette règle, la languette étant rentrée, était $0^m,6999828$, à la température de la glace fondante, ou, en millimètres, $699^{mm},9828$; nous nommerons ce nombre β, en attribuant à la dimension linéaire qu'il exprime la valeur variable qu'elle acquiert à la température où l'on a opéré. Le 27 février 1809, la longueur du pendule d'expérience se trouva égale à β plus 300 divisions entières, plus une fraction qu'il s'agissait de déterminer, et que nous représenterons par x. L'expression de la longueur cherchée était donc, en millimètres, $\beta+60+x$, on la porta sur le comparateur, le vernier marqua 117 parties et $\frac{3}{10}$, ou

117,2 p; ainsi, en désignant par A la longueur constante, mais inconnue, qui aurait ramené le vernier à zéro, on avait

$$\beta + 60 + x = A + 117,2\,p;$$

mais après avoir amené la languette à la coïncidence la plus voisine, qui était la 301e, le vernier a marqué 121 parties; on avait donc alors

$$\beta + 60,2 = A + 121,0\,p;$$

retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on en tire

$$x - 0^{mm},2 = -3,8\,p, \qquad \text{ou} \qquad x = 0^{mm},2 - 3,8.p.$$

Puisque chaque partie du vernier vaut $\frac{1}{1000}$ de millimètre, ou $0^{mm},002$, 3,8 p valent $0^{mm},0076$; par conséquent, $x = 0^{mm},1924$, et la longueur totale devient

$$\beta + 60 + 0,1924 \qquad \text{ou} \qquad 760^{mm},1752.$$

Il ne reste plus qu'à donner à cette longueur la valeur spéciale que la dilatation linéaire du fer lui assignait, pour la température à laquelle on avait opéré : c'est ce que j'expliquerai dans la note suivante.

N'oublions pas que toutes ces observations de coïncidences doivent se faire avec le plus grand soin et avec des microscopes très-forts, afin de donner plus d'exactitude au résultat. Il est presque impossible que les divisions soient assez régulières pour qu'on puisse les faire coïncider toutes à la fois. Mais on tâche de satisfaire le mieux possible à leur ensemble; et comme leur nombre est considérable, puisqu'elles doivent être fort petites, cette compensation donne aux coïncidences une constance singulière, que l'on peut éprouver par le vernier du comparateur lui-même; car en détruisant et rétablissant la coïncidence sur les mêmes divisions, on le voit toujours revenir au même point.

C'est par la même méthode que l'on peut vérifier les divisions de la languette et celles du vernier, en les comparant à un étalon bien connu. Commençons par les premières. On déterminera d'abord le nombre de divisions de la languette et du vernier qui, prises ensemble, égalent l'étalon dont il s'agit. Cette comparaison s'opérera en posant la règle sur le comparateur avec la languette, et plaçant l'étalon sur son prolongement. Puis, quand on a lu le vernier, on ôte l'étalon, et l'on fait sortir la languette d'un nombre de divisions entières, le plus approchant de la longueur de l'étalon; le reste de la différence s'évalue en parties du vernier. Cela fait, on détermine combien une division de la languette vaut de parties du vernier, en voyant de combien elle le fait marcher. Ces deux comparaisons donnent deux équations du premier degré, qui déterminent la valeur des divisions de la languette et du vernier en parties de l'étalon, auquel on les a comparés.

Si l'on désirait avoir plus de détails sur ces comparaisons, on les trouvera dans l'ouvrage que nous avons publié, M. Arago et moi, sous le titre suivant : *Recueil d'observations géodésiques, astronomiques et physiques, exécutées en Espagne, en France, en Angleterre et en Écosse*. Paris, 1821, in-4°.

NOTE III.

Calcul numérique des réductions qu'il faut faire à la longueur mesurée du pendule pour en déduire celle du pendule à secondes.

La première de ces réductions concerne la mesure même. Supposons que les coïncidences du pendule et de l'horloge aient été observées à la température t, et que le contact du plan d'acier ait eu lieu à la température t', en sorte que $t'-t$ soit l'excès de la seconde sur la première. Si l'on nomme C la dilatation du fil métallique du pendule que nous avons toujours pris de cuivre, sa longueur primitive étant supposée égale à A lors des coïncidences, sera augmentée $AC(t'-t)$ à l'instant du contact. Il faudra donc la diminuer de cette quantité. En outre, nous avons supposé que la longueur β, de la règle divisée, était connue pour la température de la glace fondante. Par conséquent, si la mesure de la longueur a été faite avec cette règle à la température t'', chacune de ses parties a dû se dilater d'une quantité Ft'', en représentant sa dilatation propre par F, pour l'unité de degré et longueur. Il faut donc augmenter, dans cette proportion, le nombre des divisions qu'elle indique pour ramener leur expression à ce qu'elle aurait été si, dans l'opération du mesurage, la règle avait été employée avec cette même température de la glace fondante à laquelle on a évalué sa longueur. Mais, comme ces corrections sont toujours très-petites, on peut les faire sur la longueur même du pendule que la règle indique, c'est-à-dire, que si l'on trouve cette longueur égale à A, il faut lui substituer

$$A[1-C(t'-t)+Ft''], \qquad \text{ou} \qquad A-AC(t'-t)+AFt''.$$

Le premier terme représente la mesure actuellement obtenue, et les deux autres les corrections de dilatation. Nommons A' cette valeur ainsi corrigée.

La réduction précédente étant faite, on connaît la longueur totale du pendule composé, depuis le plan de suspension jusqu'au bas de la boule de platine. Il en faut retrancher le rayon de cette boule pour avoir la distance du centre au plan de suspension. Je nommerai cette distance L. Soit R le rayon de la boule à la température de la glace fondante; appelons P la dilatation du platine pour 1° du thermomètre centésimal. Nous avons déjà nommé t la température lors des coïncidences; ainsi le rayon de la boule était alors égal à $R(1+Pt)$; c'est donc cette quantité qu'il faut retrancher de A pour avoir L, ce qui donne

$$L = A' - R(1+Pt);$$

suivant les expériences de Borda, on a

$$P = 0,000008565.$$

On démontre, en mécanique, que lorsqu'une sphère pesante, dont le rayon est R, oscille à l'extrémité d'un fil sans masse, le centre d'oscillation est au-dessous du centre de la sphère d'une quantité égale à $\frac{2R^2}{5L}$, L désignant, comme ci-dessus, la distance de ce dernier centre au point de suspension. Il faut donc ajouter cette quantité à L pour réduire le pendule composé à l'état du pendule simple qui ferait ses oscillations dans le même temps. De plus, comme le fil et la calotte ne sont pas dépourvus de pesanteur, il faut encore faire une petite correction pour avoir égard à leur poids. Nous avons donné la formule de cette correction dans la page 450. En la représentant par Q, nous aurons :

$$\text{Longueur du pendule dans l'air, } L' = A' - R(1 + Pt) + \frac{2R^2}{5L} - Q.$$

Pour réduire cette longueur à ce qu'elle serait dans le vide, supposons le mouvement de la boule assez lent pour que l'air qui l'enveloppe puisse toujours se disposer autour d'elle comme dans l'état de repos. Alors son poids absolu dans le vide étant P, si l'on nomme δ la densité actuelle de l'air comparativement au métal dont elle est faite, son poids apparent, durant les oscillations, était $P(1 - \delta)$. La gravité g' qui la sollicitait alors était donc à la gravité naturelle g, dans le rapport $\frac{P(1-\delta)}{P}$ ou $1 - \delta$. Conséquemment, si les oscillations s'étaient opérées dans le vide, le pendule L' aurait marché plus vite avec cette longueur qu'il n'a fait sous l'influence de la gravité diminuée; ou, ce qui est équivalent, le pendule L'', qui aurait exécuté dans le vide des oscillations de même durée que les siennes, aurait dû être plus long que L'. Or les longueurs des pendules synchrones sont proportionnelles aux intensités des gravités qui les sollicitent; on aura donc

$$L'' = L' \frac{g}{g'} = \frac{L'}{1 - \delta} = L' + \frac{L'\delta}{1 - \delta}.$$

L'excessive petitesse de δ permet de le négliger comparativement à l'unité dans le dénominateur du terme correctif, et alors on a simplement

$$L'' = L' + L'\delta.$$

C'est l'expression que Borda avait employée, et dont nous avons aussi fait usage. Maintenant, pour calculer δ, il faut savoir que, à la température de la glace fondante, et sous la pression de $0^m,76$, la densité du platine peut être évaluée à 15910, celle de l'air étant 1. Par conséquent, sous la pression p et la température t, observée lors des coïncidences, la densité de l'air a dû être

$$\frac{p}{0^m,76(1 + t.0,0375)\,15910},$$

celle du platine étant l'unité. La longueur L' doit donc être augmentée

dans cette proportion, pour obtenir la longueur L″ du pendule, qui, en oscillant dans le vide, aurait été synchrone au pendule observé. On aura ainsi

$$\text{Longueur du pend. dans le vide, } L'' = L' + \frac{L'p}{0^m,76\,(1 + t.0,00375)\,15910}.$$

Il est maintenant facile de déduire de ces résultats la longueur du pendule à secondes qui ferait N′ oscillations dans un jour solaire ; car, en supposant que le pendule observé en fasse N′ + n, on aura, par la formule de la page 442,

$$\text{Longueur du pendule à secondes, } L''' = L'' + \frac{2L''n}{N'} + \frac{L''n^2}{N'^2}.$$

Enfin il ne reste plus qu'à réduire ces observations au niveau de la mer. Soient h la hauteur de la station en mètres, a le rayon de la Terre aussi en mètres ; le pendule réduit au niveau de la mer sera $L''' + \frac{2hL'''}{a}$.

Pour compléter le tableau de ces opérations, j'en joindrai ici un exemple numérique.

Calcul de la longueur du pendule à secondes observée à Dunkerque, le 27 février 1809, *par* MM. Mathieu *et* Biot.

Observations des coïncidences.

Coïncidence n° 2, n'existe pas à	$7^h53^m35^s$	Mathieu.	
	7.53 . 40	Biot.	
exacte à...	$7^h54^m45^s$	Math.	$7^h54^m27^s,5$
	54 . 10	Biot.	
passée à...	$7^h55^m35^s$	Mathieu.	
	55 . 0	Biot.	

Bar. $0^m,77425$. Therm. bar. $= +9^o,1$. Therm. air $= +7^o,23$.
Demi-amplitude mesurée sur l'échelle horiz. $A = 4^{par.},6 = 1^o\ 8'\ 33''$.

Le pendule va *moins vite* que l'horloge.

Coïncidence n° 3, n'existe pas à	$9^h50^m30^s$	
	50 . 40	
exacte à...	$9^h51^m20^s$	$9^h51^m25^s$
	51 . 30	
passée à...	$9^h52^m35^s$	
	52 . 45.	

Bar. $0^m,77405$. Therm. bar. $= +9^o,6$. Therm. air $= +7^o,78$.
Amplitude A′ : $2^{par.},8 = 0^o\ 41'\ 44''$.

Ce tableau renferme plusieurs résultats qui ont besoin d'explications. Notre règle divisée est destinée à la mesure du pendule à secondes décimales ; et avec la languette qui la termine, elle n'a pas plus de $0^m,77$. Il fallait donc faire le pendule à peu près décimal ; et comme il ne doit pas différer beaucoup de l'horloge, on conçoit qu'il nous fallait une horloge décimale. Comme

nous n'en avions point à notre disposition, on en prit une sexagésimale; mais on changea le balancier, et on lui en substitua un autre propre à battre les secondes décimales; ce nouveau balancier étant compensé par un artifice à peu près pareil à celui que l'on emploie dans les chronomètres. Nous avons déterminé la marche de notre horloge par un grand nombre d'observations astronomiques; et à l'époque de l'observation que je viens de rapporter, elle faisait 100035,265 oscillations dans un jour solaire moyen. D'ailleurs le tableau de sa marche diurne, rapportée page 443, montre qu'elle était parfaitement régulière.

La manière dont nous observions les coïncidences est celle que j'ai décrite page 438; mais afin de les fixer avec plus de justesse, nous établissions les limites entre lesquelles elles se trouvaient comprises, et nous pouvions alors compter davantage sur l'instant où chacun de nous séparément avait cru devoir les fixer; on prenait ensuite la moyenne de ces deux indications.

D'après ces observations, on peut trouver le nombre d'oscillations que le pendule aurait faites dans un jour moyen. Nous avons expliqué la méthode p. 431.

1re coïncidence.....	$7^h\ 54^m 27^s,5$
2e coïncidence.....	9. 51. 25 .0
Différence ou intervalle des deux coïncidences..	$1^h\ 56^m 57^s,5$

ce qui forme un nombre d'oscillations égal à 7017,5, parce que la numération du cadran de l'horloge était sexagésimale.

Pendant ce temps, le pendule a perdu deux oscillations sur l'horloge, c'est-à-dire qu'il en a fait 7015,5; ainsi, pendant que l'horloge ferait 100000 oscillations, il en perdrait proportionnellement un nombre exprimé par

$$\frac{2.100000}{7017,5} = 28^s,50.$$

Mais la correction du pendule, [illegible] calculée par la formule de la p. 437, [illegible] pour un nombre d'oscillations [illegible] du pendule, [illegible] peut. Cette quantité [illegible] donc être [illegible] qui le réduit à [illegible]

Ainsi, pendant que l'horloge [illegible] 100000 = [illegible] en un jour solaire moyen, [illegible] nombre d'oscillations [illegible] 100000 : 35,265, [illegible] conséquent le nombre des oscillations faites par le pendule en un jour moyen [illegible] par la proportion suivante : 100000 : oscillations de l'horloge en un jour moyen = [illegible] oscillations du pendule, comme la marche de l'horloge en un jour moyen [illegible] 35,265 est à la marche du pendule [illegible]

[illegible]

ou

[illegible]

Le dernier terme — 0,009 étant toujours très-petit dans ces expériences, on peut le regarder comme constant dans le même lieu, et alors tout le calcul se réduit à une simple soustraction.

Venons maintenant à la mesure de la longueur : c'est celle que nous avons rapportée page 454, et elle a été trouvée de $760^{mm},1752$ depuis le plan de suspension jusqu'au bas de la boule. Nous avons nommé A cette longueur.

La température moyenne lors des coïncidences était.	$t = +7^{\circ},54$
lors du contact du plan...	$t' = +8^{\circ},22$
Excès de la température lors du contact.....	$t' - t = +0^{\circ},68$
Température lors du contact de la barre.....	$t'' = +8^{\circ},49$

Or, le fil du pendule était de cuivre et la règle était de fer; ainsi la longueur A, corrigée de la dilatation de ces deux métaux, sera

$$A' = 760,1752 + 760,17\ (-C.0^{\circ},68 + F.8^{\circ},49);$$

nous emploierons, d'après Borda,

la dilatation du cuivre... $C = 0,0000178$,
du fer..... $F = 0,0000114$.

Avec ces données, on trouve

$$A' = 760,1752 + 0,064373 = 760,239573.$$

La même mesure, faite avec une autre barre, donnait 760,229953; on a pris la moyenne des deux résultats, et l'on a eu.....	$A' = 760,234763$
Otez le rayon de la boule R (1 + P.7°,54).....	18,260513
	$L = 741,974250$
Réduction au centre d'oscillation.....	$\frac{2R^2}{5L} = +0,179734$
	742,153984
Correction pour le poids du fil et de la calotte, calculée par la formule de la page 450.....	−0,249586
Longueur du pendule simple dans l'air.....	$L' = 741,904398$
Réduction au vide, page 456.....	+0,046117
Longueur du pendule dans le vide.....	$L'' = 741,950515$
Réduction au pendule à secondes.....	+0,121239
Longueur du pendule à secondes dans le vide.....	$L''' = 742,071754$
ou en mètres.....	$0^{m},7420718$

La réduction au niveau de la mer est insensible, parce que la station de Dunkerque n'était élevée que de 2 ou 3 mètres au-dessus de ce niveau.

SUR LES MESURES DU PENDULE

EFFECTUÉES EN DIFFÉRENTES RÉGIONS DE LA TERRE.

Pour compléter l'exposition précédente, j'insère ici un Mémoire dans lequel j'ai rassemblé les résultats des observations du pendule qui pouvaient être considérées comme les plus certaines que l'on eût faites jusqu'à l'époque où il fut composé. J'y ai discuté les conséquences générales qu'on en peut légitimement déduire, tant sur les variations de la pesanteur en différentes parties de la terre, que sur la configuration du sphéroïde terrestre, considérée dans ses rapports avec ces variations.

La détermination de la figure de la terre a été, depuis un siècle et demi, l'un des plus constants objets des travaux de l'Académie des Sciences de Paris. A partir de la première mesure du degré de Picard, qui servit à Newton pour constater l'existence de la gravitation universelle, les efforts de l'astronomie la plus délicate, de la physique la plus scrupuleuse, de la géométrie la plus profonde, ont été mis en œuvre pour fixer tous les éléments de ce grand phénomène, et développer les conséquences qu'ils pouvaient fournir non-seulement sur la forme, mais encore sur la constitution intérieure du sphéroïde terrestre. Trois méthodes, ou plutôt trois sortes d'épreuves distinctes, ont été appliquées à cette recherche. La première, toute directe et purement graphique, consiste à mesurer des arcs de méridiens et de parallèles sur divers points de la surface, c'est-à-dire à déterminer par l'observation les longueurs de ces arcs, leurs amplitudes astronomiques, leurs inflexions et les angles sous lesquels ils se coupent; puis, à construire géométriquement la configuration du sphéroïde sur lequel ils doivent se placer. Cette construction, appliquée aux résultats de toutes les opérations modernes, donne indubitablement à la terre une forme aplatie aux pôles, renflée à l'équateur, conformément à ce que l'analogie indique pour l'équilibre d'une masse fluide tournant autour d'un axe et dont toutes les parties s'attirent mutuellement

Mais lorsque l'on veut aller au delà de ce premier aperçu, et assimiler le sphéroïde à quelque forme simple, par exemple à l'ellipsoïde, on y découvre des irrégularités très-sensibles qui l'en écartent, et dont la réalité est incontestable, puisqu'elles excèdent de beaucoup les erreurs que l'on pourrait attribuer aux observations. Lorsque l'on examine de cette manière l'arc du méridien qui s'étend de Greenwich à Formentera, les portions successives de cet arc, considérées en allant du nord au sud, donnent des décroissements de degrés qui sont absolument sans aucune loi, et vers le 46e degré en particulier ils offrent une anomalie énorme (*). Or, si le méridien terrestre était elliptique, la latitude moyenne de ce même arc est telle que, dans toute son étendue, le décroissement successif des degrés devrait être sensiblement constant. L'arc de parallèle, récemment mesuré entre Bordeaux et Padoue (**), présente des phénomènes analogues; car ses diverses parties, réduites à une même latitude, offrent dans la longueur des degrés consécutifs des différences considérables pareillement dépourvues de toute loi. Des irrégularités semblables, non moins fortes comme non moins certaines, se montrent aussi sur les diverses parties de l'arc du méridien mesuré par les Anglais dans l'Inde; et MM. Plana et Carlini en ont trouvé de plus considérables encore dans le Piémont. Ces exemples montrent que la figure de la terre est beaucoup plus compliquée qu'on ne l'avait cru d'abord. C'est pourquoi on a cherché à affaiblir l'influence de ses irrégularités, en combinant les valeurs moyennes des degrés mesurés à des latitudes très-distantes, et les assujettissant seules aux relations elliptiques, afin d'en déduire l'aplatissement du sphéroïde, que l'on a trouvé ainsi peu différent de $\frac{1}{309}$. Mais, d'après ce que nous venons de dire, il est évident que ce résultat n'est qu'une approximation dont il serait difficile d'apprécier l'exactitude, et qu'en tout cas il ne saurait avoir une application physique rigoureuse.

Une autre méthode de déterminer l'aplatissement du sphéroïde,

---

(*) Delambre, IIIe volume de la *Base du système métrique décimal*, p. 548.

(**) Mémoire sur la mesure d'un arc de parallèle moyen entre l'équateur et le pôle. (*Connaissance des Temps* pour 1829, page 290.)

que je considérerai comme la seconde dans l'ordre logique, quoiqu'elle ne soit pas telle dans l'ordre historique, c'est celle qui le conclut de l'influence qu'il exerce sur les mouvements de la lune. Cette méthode est due à M. Laplace. Elle suppose que le sphéroïde est très-peu différent d'une sphère, ce qui, pour la terre, est un fait incontestable. Quelle que soit la constitution intérieure d'un tel sphéroïde, son attraction sur un point extérieur peut être exprimée par une série dont les termes sont ordonnés suivant les puissances inverses de la distance. Le premier de ces termes représente l'attraction d'une sphère égale en masse au sphéroïde; le second représente ce qui s'ajouterait à cette attraction si le sphéroïde était elliptique; enfin, les suivants expriment de même ce qu'il faut ajouter aux premiers pour compléter les effets de la véritable figure. Or, ces premiers termes se trouvant divisés par de moindres puissances de la distance, demeurent seuls sensibles lorsque l'on calcule l'action de la terre à une distance aussi grande que celle où la lune est placée; et, en conséquence, lorsque l'on parvient à démêler dans les mouvements de ce satellite les inégalités dont ils sont la cause, on peut, d'après ces effets, apprécier la valeur propre des termes qui les ont produits. On obtiendrait donc ainsi la valeur réelle de l'aplatissement si le sphéroïde était exactement elliptique; et, lorsqu'il ne l'est pas, on obtient ce que l'on pourrait appeler la partie elliptique de l'aplatissement. Pour la terre, M. Laplace trouve ainsi $\frac{1}{304}$ d'après les observations de Burg; et ce résultat diffère à peine de $\frac{1}{309}$ que donne la comparaison des degrés mesurés à des latitudes très-distantes. Un tel accord, s'il était fondé sur des relations rigoureuses, prouverait que le sphéroïde terrestre est purement elliptique; mais il perd beaucoup de sa force lorsque l'on considère l'étendue des irrégularités qu'il faut négliger dans les arcs partiels du même méridien, ainsi que les suppositions auxquelles il faut les soumettre, pour en déduire $\frac{1}{309}$ d'aplatissement (*).

(*) Je n'ai pas cité ici les phénomènes de la nutation et de la précession des équinoxes, parce qu'ils n'assignent point la valeur absolue de la frac-

La troisième et dernière méthode que l'on ait pour déterminer la figure de la terre est due à Newton, et elle repose sur une analogie encore plus éloignée que la précédente. Concevons un sphéroïde fluide, peu différent de la sphère, et composé d'un nombre quelconque de couches de densités diverses, dont toutes les particules s'attirent mutuellement en raison directe de leurs masses et inverse du carré de leurs distances. Donnons à ce corps un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixé sur sa surface, et cherchons la figure que cette surface, ainsi que les couches intérieures, devront prendre, pour rester en équilibre relatif entre elles, sous la double influence des attractions moléculaires et de la force centrifuge née du mouvement de rotation. Il est clair que, dans ce cas, la forme extérieure de la masse fluide et la loi de la pesanteur à la surface se trouveront liées l'une à l'autre par une mutuelle dépendance. L'état actuel de l'analyse ne permet pas de déterminer cette relation dans la généralité d'énoncé que nous venons de donner au problème. Mais Newton avait réussi à la découvrir dans le cas de l'homogénéité ; et, après lui, Clairaut est parvenu à la calculer également dans le cas, beaucoup plus général, où le sphéroïde est composé d'un nombre quelconque de couches elliptiques de densités arbitrairement variables. Alors l'intensité de la pesanteur et les longueurs des degrés du méridien vont en croissant, depuis l'équateur jusqu'au pôle, proportionnellement au carré du sinus de la latitude; tandis que les rayons menés du centre décroissent, au contraire, suivant la même loi; et il existe entre la variation totale de la pesanteur et celle des rayons ce rapport remarquable : l'excès de la pesanteur au pôle sur la pesanteur à l'équateur étant divisé par cette dernière, et l'excès de l'axe de l'équateur sur l'axe du pôle étant divisé par ce dernier, forment deux fractions dont la somme est constante et toujours égale au double de l'aplatissement que le sphéroïde aurait dû prendre dans le cas de l'homogénéité, la durée de sa rotation res-

---

tion qui exprime la partie elliptique de l'aplatissement de la terre; ils déterminent seulement deux limites entre lesquelles cette fraction est nécessairement comprise, limites qui sont $\frac{1}{111}$ et $\frac{1}{111}$.

tant la même. Maintenant, si l'on suppose que cet état primitif de fluidité et cette distribution régulière des couches fluides ont été l'état primitif des corps planétaires ; si l'on suppose en outre que parmi toutes les figures d'équilibre possible peu différentes de la sphère, ces couches ont pris l'elliptique, et l'ont conservée en se solidifiant ; enfin si l'on admet que la pesanteur à la surface du sphéroïde ait aussi conservé précisément l'intensité qu'elle avait lors de la solidification, sans qu'aucune révolution intérieure étrangère à la formation de cette surface l'ait postérieurement modifiée, il est clair qu'alors les relations indiquées par la théorie de l'attraction pour les sphéroïdes elliptiques deviennent complétement applicables, et que l'aplatissement de l'ellipse peut être également déterminé et doit conduire à une valeur pareille, soit par les longueurs du pendule, soit enfin par l'évaluation de l'influence que l'aplatissement exerce dans les mouvements des corps éloignés sur lesquels le sphéroïde agit par attraction. Mais ces suppositions sont toutes nécessaires pour que les relations propres à l'ellipse existent entre les mesures du pendule et les mesures des degrés, ou même dans chacun de ces phénomènes séparément. Ainsi, la première chose à faire n'est pas de les supposer existantes, mais de chercher par l'expérience à voir si elles ont réellement lieu dans toutes leurs particularités.

Nous avons fait remarquer plus haut que les degrés du méridien, mesurés en diverses parties de la terre, s'écartent très-notablement des rapports que leur assignerait une figure elliptique régulière et générale. La théorie de l'attraction fait voir que cet écart doit être moins sensible dans les variations du pendule que dans les variations des degrés, parce que, dans celles-ci, les termes qui écartent l'expression du rayon terrestre de l'état elliptique se trouvent affectés de coefficients plus considérables. C'est là sans doute ce qui a porté les géomètres à appliquer immédiatement aux mesures du pendule une formule de variation proportionnelle au carré du sinus de la latitude, conformément à l'hypothèse elliptique rigoureuse ; et, par une conséquence naturelle, les observateurs ont toujours cherché à représenter leurs expériences par une semblable loi de variation, dont ils introduisaient les résultats dans le théorème de

Clairaut pour en conclure l'aplatissement. Or, les valeurs de cet élément, ainsi obtenues, s'étant trouvées généralement différentes de celles que donnent les inégalités lunaires, et les longueurs des degrés du méridien comparées entre elles à de grandes distances, il a paru en résulter une contradiction formelle, et difficilement explicable, entre ces conséquences diverses, également déduites de la théorie de l'attraction. Mais avant d'en venir à cette conclusion, il est évident qu'il aurait fallu discuter d'abord les longueurs observées du pendule en elles-mêmes, indépendamment de toute hypothèse sur la constitution primitive du sphéroïde, et sur les rapports de la pesanteur actuelle avec la forme que la surface a pu contracter au moment de la solidification. Car, si la loi générale de variation, proportionnelle au carré du sinus, se montre dans ces longueurs, modifiée d'une manière assez suivie, et assez sensible, pour qu'on ne puisse pas attribuer ses écarts aux erreurs des expériences, il en faudra conclure que l'aplatissement, qui serait hypothétiquement déduit de ces données dans la supposition d'une figure elliptique régulière, n'a pas une application physique réelle et rigoureuse ; et qu'ainsi il n'y a aucune nécessité qu'une pareille combinaison de nombres coïncide, soit avec la partie elliptique de l'aplatissement mesurée par la théorie de la lune, soit avec l'aplatissement idéal qui se conclurait hypothétiquement de la mesure des degrés. Mon but aujourd'hui est de prouver que de telles inégalités existent en effet dans les longueurs observées du pendule, et qu'elles s'y montrent avec trop de continuité et dans une proportion trop énergique pour qu'on puisse les attribuer à des attractions purement locales et accidentelles, ou pour qu'on doive les confondre avec les erreurs des observations. Voilà ce que l'exactitude des expériences actuellement faites dans les diverses contrées de la terre me semble établir avec évidence, lorsqu'elles sont judicieusement choisies et discutées philosophiquement.

Ce fut dans le dessein de réunir quelques nouvelles données, sur ce grand problème, que je partis, vers la fin de 1824, avec mon fils, E. Biot, pour l'Italie et l'Espagne. Nous avions d'abord pour but principal de compléter les mesures du pendule sur le grand arc de parallèle qui s'étend aujourd'hui de Bordeaux à Fiume, et que l'on

peut espérer de voir, dans quelques années, se prolonger jusqu'à la mer Noire. Nous nous proposions ensuite d'aller faire les mêmes expériences à Lipari, au milieu des volcans les plus actifs de l'Italie. Puis nous devions repasser par l'Espagne pour aller les répéter à Formentera, extrémité australe de notre méridienne, afin d'assurer aux résultats de cette station toute la certitude que sa situation exige, et que les premiers essais faits en 1808 ne suffisaient pas pour lui donner. Enfin nous devions compléter notre voyage par la mesure du pendule à Barcelone, afin d'obtenir ainsi des résultats intermédiaires entre Formentera et le 45e parallèle. Le ministère du roi Louis XVIII ayant accueilli ce projet avec la plus grande faveur, tous les moyens de l'accomplir nous furent libéralement accordés. La goëlette *la Torche* fut mise pour cet objet à notre disposition, et nous n'avons eu qu'à nous louer constamment des soins obligeants qui nous ont été prodigués par M. le capitaine Legoarant de Tromelin, qui la commandait, ainsi que par les officiers qui servaient sous ses ordres. L'un d'eux même, M. Denans, aujourd'hui lieutenant de vaisseau, voulut bien partager avec nous notre désert de Formentera, et s'y dévouer, ainsi qu'à Barcelone, à nous assister de toutes les manières possibles dans nos observations. Toutes les facilités imaginables nous furent d'ailleurs accordées de la part des gouvernements étrangers chez lesquels nos expériences nous appelaient, et auxquels le gouvernement du roi avait, longtemps d'avance, recommandé notre mission. Cette bienveillance s'est même manifestée au delà du terme de notre voyage; car M. le maréchal de camp Fallon, directeur du bureau topographique de Vienne, a bien voulu faire rattacher à la triangulation générale du parallèle le point où nous avions observé près de Fiume, ce que les rigueurs de l'hiver ne nous avaient pas permis d'effectuer; et il nous a libéralement communiqué tous les éléments de cette jonction. Il est satisfaisant pour les amis des sciences d'éprouver cette facilité de relations que le progrès des lumières a maintenant établie entre eux dans toutes les parties du monde civilisé. Mais cet avantage leur est assez essentiel pour qu'ils le remarquent partout où il existe, et pour qu'ils se fassent un devoir d'en manifester leur reconnaissance.

Tableau B.

LIEUX des observations.	L
Unst	6
Portsoy	5
Fort de Leith	5
Clifton	5
Arbury-Hill	5
Londres	5
Shanklin-Farm	5
Paris à l'Observatoire (salle de la Méridienne)	48

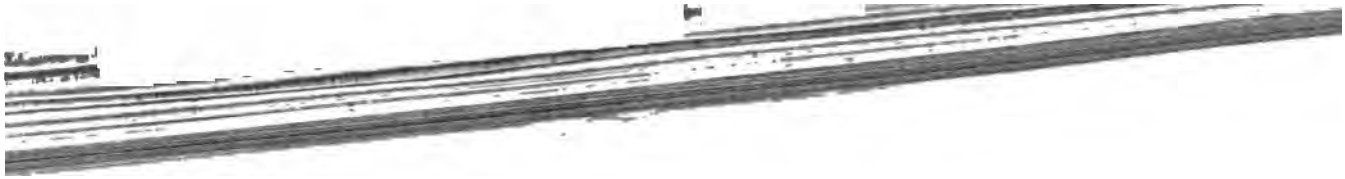


Tableau A.

LIEUX des observations.
Unst .....
Fort de Leith .....
Dunkerque .....
Paris à l'Observatoire (salle de la Méridienne) .....
Paris à l'Observatoire (salle du Mural) .....
Clermont-Ferrand .....
Milan .....
Padoue .....
Fiume .....
Bordeaux .....
Figeac .....
Barcelone .....
Formentera .....
Lipari .....

de ce voyage d'une année sont consignés dans le
cé en regard de la présente page. On les y a réunis
vaient été précédemment obtenus par le même pro-
points de l'arc de France : ils sont tous rapportés
xagésimal. On y a exprimé d'abord les longueurs
obtenues dans chaque station, telles que l'expé-
nées, et l'on y a joint ensuite les valeurs définitives
sent quand on y applique la correction de hauteur.
ne on sait, offre toujours quelque incertitude théo-
avons constamment prise proportionnelle au carré
au centre de la terre. Mais les éléments séparés que
renferme permettront de la modifier dans tel rap-
udra. D'ailleurs, dans la discussion qui va suivre,
soin d'établir nos résultats les plus saillants d'après
ons faites à de si petites élévations au-dessus de la
orrection de hauteur y devînt presque insensible, et
ent les altérer.

léter les éléments relatifs à la variation de la pesan-
éridien qui s'étend d'Unst à Formentera, nous rap-
un second tableau, désigné par B, les observations
arc par le capitaine Kater, à l'aide d'un pendule de
, dont les résultats ont été transformés en longueurs
près la mesure du pendule absolu effectuée par le
ateur à Londres. Nous y joignons la longueur absolue
Paris, dans la salle de la Méridienne, telle qu'elle se
endule de Londres, d'après les oscillations d'un pen-
araison observé par le capitaine Sabine dans ces deux
ui achève de lier les résultats des deux méthodes que
oyées pour la détermination des longueurs absolues.
areillement appliqué à ces données la correction de
ulée d'après le carré de la distance, comme nous
dans le tableau précédent.

ant ce tableau au précédent, on voit que les longueurs
tives aux stations d'Unst, Leith et Paris, s'accordent
e la manière la plus parfaite, soit qu'on les prenne
ures directes obtenues par la méthode de Borda, ou

qu'on les conclue du pendule absolu du capitaine Kater, à Londres, d'après le transport des oscillations : un accord aussi précis est une sûre confirmation des deux méthodes.

Grâce à l'amour des sciences qui anime aujourd'hui non-seulement les savants de profession, mais encore les marins et les officiers de toutes armes à qui leur état donne de fréquentes occasions de voyage, les expériences du pendule ont été fort multipliées depuis un petit nombre d'années. On connaissait jusqu'ici, sur la surface du globe, trente-quatre points où les rapports d'intensité de la pesanteur terrestre ont été déterminés d'une manière extrêmement précise. Ce serait peu d'ajouter à ces résultats, comme nous venons de le faire, un sixième de leur nombre, c'est-à-dire de donner la longueur du pendule dans six nouvelles stations; mais la situation relative des lieux dans lesquels nous avons opéré donne à ces longueurs une utilité toute particulière. En effet, les mesures du pendule que la navigation a permis de faire sont, en général, disséminées sur les diverses parties du globe, de sorte qu'un petit nombre d'entre elles présentent des relations spécialement propres à éclairer la question de la figure de la terre : au lieu que l'ensemble de nos expériences offre maintenant la mesure absolue de la pesanteur sur six points d'un même parallèle terrestre de 15° d'étendue, et sur neuf points d'un arc de méridien de plus de 22°, qui traverse cet arc de parallèle. A cela nous pouvons joindre encore les sept autres expériences analogues, également faites sur ce même méridien par le capitaine Kater, à l'aide de procédés dont la concordance avec les nôtres a été constatée par la parfaite coïncidence des résultats obtenus à Unst, à Leith et à Paris. Or cette distribution géométrique des observations sur les diverses parties d'un même méridien et d'un même parallèle qui se coupent, les rend particulièrement propres à faire bien connaître les variations de la pesanteur sur cette portion du sphéroïde terrestre; et même une telle distribution est absolument indispensable pour que l'on puisse déterminer les lois de ces variations avec certitude, en démêlant, dans la continuité des résultats, ce qui dépend des causes générales, et ce qui peut être attribué à des anomalies accidentelles ou aux erreurs des expé-

riences. Les observateurs qui ont jusqu'ici présenté leurs propres mesures du pendule, ou qui les ont réunies en général avec les expériences déjà connues, les ont traitées comme des résultats qui seraient également probables et uniquement susceptibles d'erreurs fortuites. Car ils les ont fondues ensemble par la méthode des moindres carrés, en les assujettissant à la loi de variation proportionnelle au carré du sinus de la latitude, dans la vue d'obtenir, avec les moindres écarts possibles, les deux constantes propres à cette loi, et d'en conclure ensuite l'aplatissement elliptique par le théorème de Clairaut. Mais ce mode général de fusion et d'agglomération me semble ici l'inverse de la marche que l'on aurait dû suivre; puisqu'au lieu d'atténuer les écarts de la loi du carré du sinus, écarts qui pouvaient être l'expression de phénomènes réels, il fallait au contraire les mettre le plus possible en évidence, pour éprouver la loi elle-même, et reconnaître, dans la succession des résultats, les altérations qui pouvaient déceler des causes puissantes et étendues d'attraction. Or, que de telles causes existent en effet et modifient considérablement les relations qui devraient avoir lieu dans l'état elliptique, c'est, je crois, ce dont on ne pourra douter après la discussion suivante.

Je commence par considérer les expériences faites, sur l'arc, ou très-près de l'arc méridien, qui s'étend de Formentera jusqu'à Unst. Il existe sur cet arc plusieurs stations, telles que Unst, Leith et Paris, où les expériences ont été répétées deux fois par des observateurs différents dont les résultats se sont trouvés très-sensiblement d'accord entre eux. On peut, je crois, accorder une égale probabilité aux mesures de Formentera et de Barcelone, qui ont été faites dans mon dernier voyage avec deux boules de différent diamètre, et par le concours de deux observateurs dont chacun a exécuté plusieurs fois toutes les parties de l'opération. Pour avoir un poids moral égal sur d'autres points, j'ai réuni les observations du capitaine Kater, à Londres, avec celles que nous avons faites, M. Mathieu et moi, à Dunkerque : ce qui peut s'effectuer d'une manière rigoureuse et indépendante de toute hypothèse par un procédé que j'expliquerai plus bas. Je réunis de même, par ce procédé, les expériences de Clermont et de Figeac, qui répondent

à des latitudes très-peu différentes, laissant celles de Barcelone et de Formentera séparées. Par ces combinaisons, j'obtiens six longueurs du pendule bien certaines, réparties à peu près de 5° en 5° de latitude, sur un arc de plus de 22° de longueur. Mais avant d'aller plus loin, il est nécessaire d'expliquer comment ces combinaisons partielles ont été faites, afin de montrer qu'elles ont pu être établies, sans aucune hypothèse préalable, sur les coefficients de la loi que l'on voulait vérifier, et seulement en supposant l'existence sensiblement approchée de cette loi sur les trois petits intervalles de latitude qu'embrassent les observations ainsi combinées. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de réunir les opérations du capitaine Kater, à Londres, avec celles que nous avons faites, M. Mathieu et moi, à Dunkerque. La différence de nos stations est de 29′ en latitude; or, d'après la comparaison générale des observations déjà faites, on peut admettre que la loi de variation proportionnelle au carré du sinus de la latitude existe, en général, d'une manière sensiblement exacte sur un si petit arc, sauf à ne rien prononcer sur la valeur particulière du coefficient de la proportion entre ces deux points si voisins du globe. Mais, par cela seul que la proportion sera admise, on pourra calculer la latitude intermédiaire qui correspondrait à la moyenne arithmétique entre les deux pendules observés; et il est facile de voir que le carré du sinus de cette latitude sera précisément la demi-somme des carrés du sinus des latitudes locales. Cette règle peut être employée pour réduire à une même latitude la moyenne arithmétique d'un nombre quelconque de longueurs, observées dans autant de stations diverses. Le carré du sinus de la latitude, correspondante à la longueur moyenne, sera toujours égal à la moyenne arithmétique prise entre les carrés des sinus de toutes les stations.

En effet, soient l_1, l_2, l_3,... les longueurs du pendule observées aux stations dont les latitudes sont L_1, L_2, L_3,..., etc. Si ces stations sont assez voisines pour qu'une même loi de variation proportionnelle au carré du sinus de la latitude puisse leur être appliquée, en nommant a et b les deux constantes de cette loi pour la portion du sphéroïde que les observations embrassent, on aura :

$$l_1 = a + b \sin^2 L_1,$$
$$l_2 = a + b \sin^2 L_2,$$
$$l_3 = a + b \sin^2 L_3,$$
etc.

Désignons maintenant par L la latitude intermédiaire qui répondrait à une longueur du pendule égale à la moyenne arithmétique de toutes ces longueurs. En représentant cette moyenne par l, on aura les deux équations

$$l = \frac{1}{n} \Sigma . l_1, \qquad l = a + b \sin^2 L.$$

Mais les premières équations, étant ajoutées ensemble et divisées par leur nombre n, donnent

$$\frac{1}{n} \Sigma l_1 = a + \frac{b}{n} \Sigma . \sin^2 L_1;$$

conséquemment on aura

$$\sin^2 L = \frac{1}{n} \Sigma . \sin^2 L_1;$$

ce qui est précisément la propriété que nous avons énoncée plus haut. A l'aide de cette propriété, nous avons aisément déduit des observations isolées les combinaisons moyennes qui devaient naturellement offrir plus de certitude que chacune d'elles.

Quand on suppose la variation de la longueur du pendule proportionnelle au carré du sinus de la latitude, deux longueurs absolues l_1, l_2, mesurées à deux latitudes connues L_1, L_2, suffisent pour déterminer le coefficient b de cette proportion, ainsi que la constante a qui complète les valeurs absolues, et représente le pendule équatorial. En effectuant successivement ce calcul pour les quatre intervalles consécutifs qui nous sont donnés par les cinq moyennes réparties entre Formentera et Unst, nous obtiendrons autant de valeurs particulières de ces deux quantités, et nous pourrons ainsi reconnaître si elles sont constantes ou variables. Les résultats de ce calcul sont rassemblés dans le tableau suivant, où $\log b$ donne b en millimètres, comme je le ferai toujours.

OBSERVATIONS combinées successivement par couples.	Longueurs moyennes du pendule observées ou formées.	Latitudes correspondantes à ces longueurs moyennes. *l.*	Logarithme du coefficient du carré du sinus, conclu de chaque couple. log *b*.	Longueur du pendule équatorial conclue. *a*.
	mm	° ′ ″		mm
Unst : Kater, Biot. . .	994,942120	60.45.25	0,7400049	990,758130
Leith : Kater, Biot. . . .	994,533134	55.58.37	0,7411971	990,747728
Londres et Dunkerque	994,101902	51.16.38	0,7425517	990,737225
Clermont et Figeac . .	993,520041	45.11.46	0,6377051	991,334103
Barcelone.	993,232131	41 23.15	0,5407604	991,713829
Formentera	993,069660	38.39.56		

Le coefficient *b* de la proportion reste à peu près le même dans les trois premiers intervalles, c'est-à-dire depuis Unst jusqu'au parallèle moyen de Clermont et de Figeac (*). Depuis ce parallèle jusqu'à Barcelone, il commence à décroître d'une manière fort sensible; et il décroît plus encore dans le dernier intervalle, de Barcelone à Formentera. Cette progression d'affaiblissement est tellement marquée, qu'il faudrait supposer dans les observations des erreurs de 8 et 9 centièmes de millimètre, pour pouvoir conserver au coefficient du carré de sinus la valeur qu'il a dans les intervalles plus voisins du nord. Or, c'est ce qu'il paraît impossible d'admettre, avec l'habitude que l'on a aujourd'hui de ces sortes d'expériences, et d'après l'accord des résultats partiels donnés par les deux boules dans les deux dernières stations. Les longueurs du pendule équatorial, conclues de chaque intervalle, présentent une progression non moins frappante. Les trois premières sont sensiblement constantes et d'accord entre elles; mais elles donnent toutes un pendule équatorial beaucoup trop faible.

(*) Cette régularité, d'accord avec celle du pendule équatorial dans les trois premiers intervalles, semble montrer que la correction de hauteur à Clermont et à Figeac, quoique assez considérable, n'apporte dans les résultats de ces stations aucune anomalie sensible, et paraît en conséquence devoir peu différer de la vérité.

Car on verra plus bas que la longueur réelle de ce pendule, telle que la donnent les mesures faites à l'équateur même, ou à de très-petites latitudes, est $991^{mm},005776$, sans que l'on puisse admettre, dans la moyenne, un écart notable de ce nombre. Ici les valeurs conclues des latitudes supérieures à 45° donnent des longueurs beaucoup plus faibles; tandis que les latitudes inférieures en donnent de trop fortes, et, de part et d'autre, avec une constance qu'il paraît impossible d'attribuer à des erreurs d'observation.

Il faut remarquer que ces irrégularités sont en harmonie avec celles que les degrés du méridien présentent sur le même arc. D'après les tableaux donnés par Delambre, dans le t. III de la *Base du système métrique*, p. 548, la plus grande anomalie des degrés de France se montre entre les parallèles de 44° 41′ 48″ et 47° 30′ 46″; et leur variation successive offre un ralentissement considérable entre Formentera et Barcelone (*), où nous trouvons aussi que la variation du pendule éprouve un affaiblissement marqué.

Nous pouvons d'ailleurs donner une confirmation frappante de ces résultats, d'après des observations qui n'ont pas concouru à les produire. M. le capitaine Duperrey a transporté, avec tous les soins qui le caractérisent, deux pendules de comparaison, de Paris à Toulon, et de Toulon à Paris. La longueur du pendule simple étant connue dans la première de ces stations, on peut calculer sa longueur dans l'autre d'après les carrés des nombres d'oscillations infiniment petites que le pendule de comparaison, réduit à une même température, et au vide, a faites dans chacune d'elles en un jour moyen. En effet, si ce nombre est N pour Paris, où la longueur absolue observée est λ, et qu'il soit $N + n$ pour tout autre lieu où la longueur observée serait λ_1, on aura

$$\lambda_1 = \lambda + \frac{2n}{N}\lambda + \frac{n^2}{N^2}.\lambda.$$

(*) A Formentera, les résultats obtenus, en 1825, par les deux boules s'écartent de $0^m,002140$ autour de leur moyenne. A Barcelone, ils s'écartent de $0^m,018141$. Nous verrons bientôt que les observations du capitaine Duperrey fournissent une confirmation directe des résultats moyens de cette dernière station.

Alors, en réduisant respectivement λ, λ_1 au niveau de la mer, et combinant les longueurs réduites l, l_1 avec les latitudes correspondantes, on en déduira la valeur moyenne du coefficient du carré du sinus pour les deux stations considérées. On peut même remarquer que cette valeur, dépendant surtout de la différence $\lambda_1 - \lambda$, ne serait pas sensiblement affectée par de petites erreurs de 1 ou 2 centièmes de millimètre, qui pourraient se trouver dans l'évaluation absolue de λ. Car n étant toujours très-petit par rapport à N, ces erreurs, supposées déjà très-petites par elles-mêmes, se trouveraient atténuées par le facteur $\frac{n}{N}$, de manière à n'avoir aucune influence observable dans les résultats.

Les éléments de ce calcul, et ses conséquences pour les observations du capitaine Duperrey sont réunis dans le tableau suivant. On a pris pour longueur du pendule simple à Paris la moyenne entre les deux qu'on y a obtenues par le procédé de Borda, et l'on a pris de même pour Toulon la moyenne des longueurs données par les deux pendules du capitaine Duperrey. Celles-ci, comme les précédentes, ne différaient d'ailleurs entre elles que de 1 ou 2 centièmes de millimètre.

LIEUX d'observation.	Latitudes boréales. L.	Nombre d'oscillations infiniment petites du pendule de comparaison réduit au vide et au niveau de la mer.	Longueur du pendule simple. l.	Logarithme du coefficient du carré du sinus conclu. log b.	Longueur du pendule équatorial conclue. a.
Paris ...	48°.50'.14"	N° 1. 90336,6668 N° 3. 90168,4978	mm 993,856463	0,6933747	mm 991,058878
Toulon..	43. 7.20	N° 1. 90314,6060 N° 3. 90145,9556	993,365222		

Le coefficient du carré du sinus se trouve ici plus faible qu'il

ne l'était de Dunkerque au 45e degré, et plus fort que du 45e degré à Barcelone, conformément à l'existence d'un décroissement progressif ; et, ce qui offre une confirmation plus précise encore, la valeur 0,6933747, qui est assignée à son logarithme, par ces expériences faites du 49e au 43e degré, est presque exactement la moyenne entre les valeurs 0,7425517 et 0,6377051 trouvées par nos premières expériences pour l'intervalle du 51e au 41e degré. Rien de tout cela ne peut se concilier avec la valeur du même coefficient, obtenue pour les latitudes plus boréales.

Cette valeur 0,6933747 devant convenir, à fort peu près, aux diverses parties de l'arc que les latitudes de Paris et de Toulon embrassent, elle doit suffire pour déduire avec une grande approximation, de ces deux stations extrêmes, les longueurs absolues du pendule aux latitudes intermédiaires comprises dans leurs intervalles. En l'appliquant ainsi à la recherche des longueurs du pendule, sur les parallèles de Clermont, Figeac et Barcelone, on trouve les résultats suivants :

NOMS DES LIEUX.	Latitudes boréales. L.	Longueurs du pendule simple au niveau de la mer conclues des observations de Paris et Toulon.	Longueurs du pendule simple mesurées aux stations mêmes, réduites au vide et au niveau de la mer.	Excès de l'observation immédiate sur les longueurs conclues de Paris et Toulon.
		mm	mm	mm
Clermont-Ferrand. . .	45°.46'.48"	993,594064	993,582277	—0,011787
Figeac.	44.36.45	993,493494	993,457805	+0,035689
Barcelone	41.23.15	993,216485	993,232131	—0,015646

Les écarts exprimés dans la dernière colonne sont dans les limites d'erreurs que les observations embrassent, même sans y faire intervenir les effets possibles des circonstances locales. Un pareil accord entre des résultats déduits d'éléments tout à fait in-

dépendants les uns des autres, puisque le pendule de Paris n'était entré pour rien dans nos premiers calculs, semble mettre individuellement les résultats hors de doute, et achève par conséquent de donner une entière certitude aux conséquences numériques déduites plus haut de leurs rapports.

Nous pouvons répéter les mêmes épreuves sur un autre méridien également situé en Europe, en réunissant les observations faites par le capitaine Sabine, au Spitzberg et à Drontheim en Norwége, avec les expériences que nous avons faites nous-mêmes à Padoue et à Lipari. Nos résultats se lient avec ceux du capitaine Sabine, au moyen du pendule absolu observé à Londres par le capitaine Kater, pendule qui s'est trouvé identiquement conforme avec le nôtre à Unst, à Leith et à Paris. Nous avons ainsi quatre longueurs absolues du pendule, réparties sur un même arc méridien de $41^{\circ}\frac{1}{2}$ de longueur (*). En calculant le coefficient du carré du sinus par les trois intervalles successifs que ces stations embrassent, on trouve les résultats suivants :

NOMS DES LIEUX d'observation.	Longueurs observées du pendule simple réduites au vide et au niveau de la mer. *l.*	Latitudes boréales. L.	Logarithme du coefficient du carré du sinus conclu de chaque couple. log *b*.	Longueur du pendule équatorial conclue. *a*.
	mm	° ′ ″		mm
Spitzberg	996,035870	79.49.58	0,7821340	990,169277
Drontheim.	995,013219	63.25.54	0,6811560	991,174193
Padoue	993,607295	45.24. 3	0,6440549	991,373420
Lipari	993,079164	38.28.37		

Ici, la marche générale des résultats est la même que sur le méridien de Formentera et d'Unst. Le coefficient du carré du

(*) Les longueurs tirées des expériences du capitaine Sabine sont ici réduites au niveau de la mer, comme les nôtres, d'après la simple propor-

sinus s'affaiblit à mesure que la latitude diminue. Le pendule équatorial, donné d'abord beaucoup trop faible par l'extrémité la plus boréale de l'arc, devient ensuite trop fort quand on le conclut de la partie australe, précisément comme sur le méridien d'Unst et de Formentera. Seulement, les valeurs absolues ne sont pas les mêmes ; elles sont, en général, plus faibles. Ces résultats, uniquement déduits des observations, semblent prouver avec évidence que, sur le continent d'Europe, les intensités de la pesanteur s'écartent fortement des lois de l'ellipticité.

Pour compléter ces épreuves, il faudrait les prolonger jusqu'à l'équateur ; mais les observations manquent pour cet objet sur le dernier méridien que nous venons de considérer. Nous sommes plus heureux pour celui d'Unst. Très-près de son point d'intersection avec l'équateur, nous trouvons Saint-Thomas, où le pendule a été observé par le capitaine Sabine. Si l'on compare la longueur absolue qui en résulte, avec la mesure de Formentera, ce qui comprend un intervalle de 38°, on trouve les résultats suivants :

LIEUX d'observation.	Longueurs observées du pendule simple dans le vide et au niveau de la mer.	Latitudes boréales.	Logarithme du coefficient du carré du sinus conclu. log *b*.	Longueur du pendule équatorial conclue. *a*.
Formentera.	mm 993,069660	38°.39′.56″	0,7005968	mm 991,110622
Saint-Thomas . . .	991,110881	0.24.41		

Ici le coefficient du carré du sinus se relève de manière à se rapprocher des valeurs que les latitudes plus boréales lui donnent.

---

tion du carré de la distance au centre de la terre. Cela les rend un peu différentes de celles qu'il a obtenues avec un autre mode de réduction plus arbitraire : nous avons agi ainsi pour toutes celles de ses expériences que nous avons employées.

Ce résultat paraît n'être point particulier au méridien de Formentera et d'Unst. Nous le retrouvons entre New-York et la Jamaïque, deux stations du capitaine Sabine qui sont à peu près à la même longitude entre elles, et dont la première se trouve presque exactement sur le parallèle de Barcelone. En effet, ces deux stations fournissent les résultats suivants :

LIEUX d'observation.	Longueurs observées du pendule simple dans le vide et au niveau de la mer. l.	Latitudes boréales. L.	Logarithme du coefficient du carré du sinus ramené. log b.	Longueur du pendule équatorial conclue. a.
New-York	mm 993,158649	40°.42'.43"	0,7075788	mm 990,988870
Jamaïque.	991,472505	17.56. 7		

On voit que le coefficient du carré du sinus se relève ici comme entre Formentera et Saint-Thomas, et même il devient un peu plus fort; mais le pendule équatorial conclu se trouve plus faible de $0^{mm},121752$, quantité fort considérable.

Pour développer ce phénomène, nous n'avons qu'à calculer les longueurs absolues du pendule aux latitudes de New-York et de la Jamaïque, d'après les mesures de Barcelone et de Saint-Thomas, en employant, pour la réduction, les valeurs du coefficient propres à ces dernières; nous aurons ainsi le tableau suivant :

Latitude de la station de New-York.	40°42′ 3″
Latitude de la station de Barcelone.	41.43.15
Log *b* à cette latitude (tableau de la page 472). .	0,5407604
	mm
Réduction à la latitude de New-York : conclue.	0,041306
Longueur observée du pendule à Barcelone. .	993,232131
Longueur du pendule à New-York : conclue. .	993,190825
Observée.	993,158649
Excès d'intensité sur le méridien d'Unst et de Barcelone	+0,032176
Latitude de la station de la Jamaïque.	17° 56′ 7″
Latitude de la station de Saint-Thomas.	0. 24.41
Log *b* à cette station (tableau de la page 477) . .	0,7005968
	mm
Réduction à la latitude de la Jamaïque : conclue .	+0,475663
Longueur observée du pendule à Saint-Thomas.	991,110881
Longueur du pendule à la Jamaïque conclue. . .	991,586544
Observée.	991,472505
Excès d'intensité sur le méridien d'Unst et de Saint-Thomas	+0,114039

On voit que l'intensité de la pesanteur à New-York se trouve un peu moindre qu'à Barcelone; mais à la Jamaïque elle est beaucoup plus faible qu'à Saint-Thomas : c'est ce qui raccourcit comparativement le pendule équatorial sur le méridien de New-York et de la Jamaïque. En général, la discussion des expériences voisines de l'équateur nous prouvera bientôt qu'il existe à Saint-Thomas une anomalie locale, qui donne un pendule trop long.

Les expériences actuelles n'offrent plus que deux autres stations qui soient situées sensiblement à une même longitude : ce sont celles du Groenland et de la Sierra-Leone, où le capitaine Sabine a observé. Ses expériences donnent les résultats suivants :

LIEUX d'observation.	Longueurs observées du pendule réduites au vide et au niveau de la mer. l.	Latitudes boréales.	Logarithme du coefficient du carré du sinus conclu. $\log b$.	Pendule équatorial conclu. a.
	mm	° ′ ″		mm
Groenland	995,746455	74.32.19	0,7087658	990,995856
Sierra-Leone. . . .	991,107348	8.29.28		

Pour comparer ces résultats avec ceux du méridien de France et d'Écosse, réduisez l'observation d'Unst à la latitude du Groenland au moyen du coefficient b propre à la latitude d'Unst. Réduisez de même le pendule de Saint-Thomas à la latitude de Sierra-Leone au moyen du coefficient b propre à Formentera ; vous aurez ainsi les valeurs suivantes :

DÉSIGNATION DES LIEUX.	Longueurs conclues du pendule simple dans le vide et au niveau de la mer. l.	Logarithme du coefficient du carré du sinus conclu. $\log b$.	Pendule équatorial conclu. a.
	mm		mm
Groenland conclu d'Unst.	995,863039	0,7091298	991,108451
Sierra-Leone conclu de St-Thomas	991,220043		

Le coefficient du carré du sinus est à très-peu près le même sur les deux méridiens ; ainsi le décroissement total de la pesanteur y est pareil entre les latitudes ainsi comparées. Mais les valeurs absolues de l sont toutes deux plus fortes de près de 12 centièmes de millimètre sur le méridien de Formentera et d'Unst. Une telle différence excède de beaucoup les erreurs dont les expé-

riences sont susceptibles. Il en faut donc conclure qu'il existe aussi dans la pesanteur à Unst un excès relatif d'intensité du même ordre que celui que Saint-Thomas présente.

Cet excès se manifeste encore avec plus d'évidence lorsque l'on compare Unst à Drontheim, station du capitaine Sabine qui diffère peu d'Unst en latitude. Si l'on prend les pendules observés dans ces deux lieux, et qu'on fasse subir à chacun d'eux la petite réduction nécessaire pour le ramener au parallèle intermédiaire, en employant, pour cet objet, la valeur du coefficient *b* propre à chaque station, on trouve les résultats suivants :

NOMS des lieux.	Latitudes boréales.	Longueur du pendule simple observée, réduite au vide et au niveau de la mer.	Logarithme du coefficient du carré du sinus employé pour la réduction au parallèle moyen.	Réduction au parallèle moyen dont la latitude est 62° 5′ 40.	Longueur conclue du pendule réduite au parallèle moyen.
		mm		mm	mm
Drontheim..	63°.25′.54″	995,013219	0,7821340	—0,115006	994,898213
Unst	60.45.25	994,942121	0,7400049	+0,107760	995,049888
			Excès d'intensité à Unst. . . .		+ 0,151668

Ainsi l'excès d'intensité relatif à Unst est indubitable. Traduit en oscillations, il répond à une différence de 6 $\frac{117}{200}$, dans la marche diurne d'une horloge, qui serait transportée du méridien d'Unst sous celui de Drontheim, en suivant le parallèle moyen dont la latitude est 62° 5′ 40″. Il est présumable qu'une si grande inégalité se manifestera puissamment dans les degrés d'Écosse, lorsque l'arc du méridien qui doit s'étendre jusqu'à Unst aura été complétement mesuré.

Ceci nous conduit à comparer entre elles les longueurs du pendule observées sur les mêmes parallèles géographiques, ou très-près d'un même parallèle ; car, lorsque la différence de latitude des stations est fort petite, on peut généralement admettre entre elles la loi du carré du sinus, et s'en servir pour les réduire toutes à un même parallèle moyen. A la vérité, pour effectuer cette

réduction avec une entière rigueur, il faudrait avoir déterminé les valeurs du coefficient du carré du sinus pour le méridien de chaque station à la latitude où elle se trouve, puisque nous venons de reconnaître qu'il existe entre ces valeurs de très-grandes inégalités. Mais, si les différences en latitude sont fort petites, et par conséquent les réductions très-faibles, l'incertitude qui pourra souvent exister, dans la valeur locale de ce coefficient, aura très-peu d'influence sur le résultat définitif; et, dans tous les cas, on devra se borner aux comparaisons où elle sera sans importance.

Nous commencerons par le parallèle qui s'étend de Bordeaux à Fiume, et nous emploierons pour coefficient de réduction celui que les expériences du capitaine Duperrey donnent entre Toulon et Paris. On a vu plus haut que ce coefficient s'accorde exactement avec la valeur que l'on déduirait par interpolation des expériences faites entre Dunkerque et Barcelone. Avec ce mode de réduction, les observations faites depuis Bordeaux jusqu'à Fiume présentent le tableau suivant, où les stations sont rangées par ordre en allant de l'ouest vers l'est.

NOMS des lieux d'observation.	Latitudes boréales	Longueurs du pendule simple observées, réduites au vide et au niveau de la mer	Logarithme du coefficient du carré du sinus employé pour la réduction $\log k$.	Réduction au 45e degré.	Longueur conclue du pendule dans le vide et au niveau de la mer sur le 45e parallèle	Écarts des résultats partiels autour de la moyenne
		mm		mm	mm	mm
Bordeaux..	44°.50'.26"	993,152935	0,6933447	+ 0,012365	993,165300	—0,0555
Figeac....	44.36.45	993,157805		+ 0,060051	187856	—0,0324
Clermont	45.46.48	993,582277		—0,060483	521794	+ 0,0044
Milan....	45.28.1	993,547610		—0,036211	511431	—0,0082
Padoue...	45.24.3	993,607294		0,031085	576209	—0,0558
Fiume....	45.19.0	993,584075		—0,024558	559517	+ 0,0396
Longueur moyenne du pendule en Europe sur le parallèle de 45e nord.					993,520371	

Toutes les longueurs observées dans les six stations étant ainsi rendues comparables entre elles, si l'on examine leur succession en allant de l'est vers l'ouest, on trouve que la plus petite intensité de la pesanteur a lieu à Bordeaux, station la plus occidentale du parallèle. Cette intensité devient plus grande à Figeac, plus grande encore à Clermont-Ferrand, où elle est sensiblement égale à la moyenne. A Milan, de l'autre côté des Alpes, on lui retrouve à très-peu de chose près la même valeur qu'à Clermont. Mais elle s'accroît fortement à Padoue, où les astronomes italiens ont trouvé une discordance locale de 13",5 entre la latitude observée et la latitude qui se déduirait de Milan par les opérations géodésiques. Padoue est, de toutes nos stations sur ce parallèle, celle où la pesanteur acquiert la plus grande intensité relative; elle s'y écarte de la moyenne exactement autant qu'à Bordeaux en sens contraire, et sa variation totale entre ces deux stations fait, sur les longueurs du pendule, une différence de $0^{mm},110809$: ce qui répondrait à une variation de $4^{s},818$ dans la marche diurne d'une horloge qui suivrait le temps moyen. A l'est de Padoue, à Fiume, l'excès d'intensité de la pesanteur se soutient encore d'une manière marquée, quoiqu'il y soit pourtant moindre. La conclusion générale de ces phénomènes, c'est qu'il existe sur ce parallèle une cause physique très-étendue, qui y rend l'intensité de la pesanteur comparativement plus forte à l'orient des Alpes qu'à l'occident. Serait ce l'état volcanique de l'Italie qui aurait cette influence? On serait peu porté à le croire en voyant que le pendule de Lipari, mesuré au milieu des volcans les plus actuellement actifs de cette contrée, et sur le penchant même d'un ancien cratère, indique une intensité de la pesanteur relativement un peu plus forte à la vérité, mais de très-peu plus forte que celle qui s'observe à Formentera presque sur le même parallèle géographique, où l'action des volcans ne peut être soupçonnée. La mesure géodésique du parallèle compris entre Bordeaux et Padoue semblerait devoir donner sur ce point plus de lumière; mais l'excessive difficulté qu'offre la mesure des amplitudes astronomiques, et peut-être aussi cette espèce de nécessité de revenir plusieurs fois sur des opérations de ce genre, avant de parvenir à leur don-

uer une suffisante exactitude, tout cela fait que l'on ne peut pas en employer les résultats partiels comme numériquement rigoureux. Cependant on peut remarquer que la plus grande inégalité des degrés successifs de cet arc a lieu à son origine occidentale, où l'intensité de la pesanteur se montre la plus faible; et cette inégalité, qui s'élève à 187 mètres, est d'un ordre tel qu'elle paraît ne pas pouvoir être au moins tout entière attribuée aux observations.

Nous considérerons maintenant un autre parallèle beaucoup plus boréal, celui de 75°, qui est exactement intermédiaire entre les stations du capitaine Sabine au Groenland, au Spitzberg, et à Hammerfest en Norwége. La différence extrême de ces stations en longitude est de 42°35′45″, d'où l'on voit qu'elles appartiennent à des méridiens très-différents. Dans le calcul des petites réductions qui doivent les ramener à une même latitude, nous donnerons au carré du sinus la valeur que les expériences mêmes lui assignent entre le Spitzberg et Drontheim; nous aurons ainsi le tableau suivant, où les stations sont rangées par ordre en allant de l'ouest vers l'est.

NOMS des lieux d'observation.	Latitudes boréales.	Longueur du pendule simple observée, et réduite au niveau de la mer.	Logarithme du coefficient du carré du sinus employé pour la réduction. log *b*.	Réduction au 75e degré de latitude.	Longueurs du pendule conclues pour le parallèle de 75° nord.	Écarts des résultats partiels autour de la moyenne.
		mm		mm	mm	mm
Groenland .	74°.32′.19″	995,746455	0,7821340	+0,024720	995,771175	−0,021
Spitzberg . . .	79.49.18	996,035870		−0,216945	995,818925	+0,025
Hammerfest.	70.40. 5	995,531153		+0,257876	995,789029	−0,004
Longueur moyenne du pendule à 75° de latitude nord . . .					995,793043	

Ici les expériences n'indiquent plus, dans l'intensité de la pesanteur, des variations à beaucoup près aussi considérables que

· les parallèles de 60° et 45°. Même, on peut dire que les dif-
ences de nos trois pendules, réduits à la même latitude, tombent
ıs les limites d'erreurs que les observations comportent; et cet
:ord atteste que le coefficient du carré du sinus employé pour
réduire ne s'écarte pas beaucoup de la valeur qui convient à
hautes latitudes en Europe. En conséquence, nous en ferons
ıge, pour conclure de ces trois observations si bien concordantes
longueur du pendule polaire. Mais, afin de limiter la réduction
:e qu'elle a de strictement nécessaire, nous ne l'appliquerons
ı aux trois longueurs que nous venons d'obtenir pour le paral-
: de 75° : nous commencerons par ramener nos trois pendules
ın seul en prenant leur moyenne, que nous appliquerons à la
itude de 74° 35′ 25″,6, trouvée par la règle de la page 470,
ative au carré des sinus; et ce sera à cette moyenne, ainsi dé-
ite purement des expériences, que nous ferons subir la faible
luction nécessaire pour la ramener au pendule polaire. Nous au-
ıs ainsi le tableau suivant :

NOMS des lieux dont ı a combiné les observations.	Latitude moyenne du pendule qui y correspond.	Longueur moyenne du pendule propre à cette latitude.	Logarithme du coefficient du carré du sinus employé pour la réduction. log *b*.	Réduction au pôle.	Pendule polaire conclu
:roenland .. pitzberg ... :ammerfest.	74°.35′.25″,6	mm 695,771159	0,7821340	mm 0,417804	mm 696,188963

Pour apprécier la certitude de cette réduction, il suffit de dire
'on n'y trouverait qu'une différence de $\frac{2}{100}$ de millimètre, si,
lieu de la calculer, comme nous l'avons fait, avec le coefficient
ɔpre à ces hautes latitudes, tel qu'il résulte de l'expérience, on eût
ployé le coefficient beaucoup trop faible qui appartient aux lati-
les d'Édimbourg et de Leith. Mais ce mode d'opération eût été évi-
nment moins exact, et contraire à toutes les analogies que présente

l'accroissement progressif du coefficient vers les hautes latitudes.

Nous discuterons maintenant les expériences faites près de l'équateur ou à l'équateur même, pour en déduire la valeur réelle du pendule équatorial. Comme, jusqu'à 20° de latitude, les réductions à l'équateur sont très-peu sensibles, nous les étendrons jusque-là. Mais, pour mieux apprécier l'accord ou la discordance des observations avant de les combiner, nous commencerons par réduire individuellement à un parallèle commun toutes celles qui se rapprochent par la latitude, et ce sera à leur moyenne que nous appliquerons la réduction à l'équateur, réduction que nous calculerons avec le coefficient du carré du sinus trouvé par New-York et la Jamaïque, parce qu'il paraît plus exempt d'irrégularités locales que celui de Saint-Thomas et Formentera. Et cependant telle est la petitesse des réductions dont nous aurons besoin, que l'emploi même de ce dernier coefficient ne produirait, dans aucun des pendules réduits, une différence appréciable à l'observation. Le tableau de ces résultats est mis en regard de la présente page. Les observations marquées de la lettre F ont été faites par le capitaine Freycinet. La lettre S dénote celles du capitaine Sabine.

Les résultats individuels des stations, comparés immédiatement les uns aux autres, offrent ici des différences généralement plus fortes et plus nombreuses qu'on n'en trouve à de plus hautes latitudes, sur un même parallèle. Toutefois, les longueurs moyennes du pendule équatorial, déduites des divers parallèles, soit nord, soit sud, s'accordent entre elles dans les limites de l'ordre des erreurs que les observations comportent; ce qui est tout ce que l'on peut espérer. Il est remarquable que le plus grand écart, entre ces moyennes, porte sur les observations faites à l'équateur même, quoique, vu la petitesse des réductions que les autres exigent, l'exactitude du coefficient que nous avons employé pour le carré du sinus doive certainement suffire pour les ramener fidèlement à la valeur équatoriale. Mais aussi l'on doit remarquer que, si l'on excepte l'Ile-de-France, c'est à l'équateur même que se trouvent les plus grandes discordances individuelles entre les longueurs observées, quand on les compare à l'ensemble des résultats.

Si nous réunissons cette longueur moyenne du pendule équa-

RÉDUCTION au pendule équatorial calculé.	PENDULE équatorial conclu.	ÉCARTS des résultats partiels autour de la moyenne.
mm	mm	mm
−0,596598	991,058181	+0,031166
−0,596598	991,043230	+0,016215
−0,180167	991,021374	−0,005641
−0,180167	991,030694	+0,003679
0,000000	990,981597	−0,045418
.....	991,027015	

torial avec celles que nous avons obtenues plus haut pour le pôle et pour le 45e degré de latitude, elles offriront la progression suivante, que nous pouvons considérer comme le résultat le plus immédiat des observations.

	Longueurs du pendule simple réduites au vide et au niveau de la mer.	Différences successives.	Doubles différences.	Différences secondes.
	mm	mm	mm	mm
Au pôle....	996,188963	2,668612	5,337224	0,350552
A la latitude de 45°...	993,520351	2,493336	4,986672	
A l'équateur.	991,027015			

On voit que les différences successives sont notablement inégales; elles le sont beaucoup plus que les observations individuelles ne le sont entre elles, quelque part qu'on les choisisse. Ce phénomène ne peut donc être révoqué en doute, ni attribué à quelque accident de localité. Or, il est tout à fait contraire à l'hypothèse elliptique. Car, dans celle-ci, la variation de longueur du pendule étant proportionnelle au carré du sinus de la latitude, si l'on représente son expression générale par

$$l = a + b \sin^2 L,$$

a et b étant deux constantes, dont la première représente le pendule équatorial lui-même, on aura évidemment

	Longueurs du pendule.	Différences successives.	Différences secondes.
Au pôle $L = 90°$....	$l = a + b$	$\frac{1}{2} b$	0
Sur le 45e parallèle $L = 45°$....	$l = a + \frac{1}{2} b$	$\frac{1}{2} b$	
A l'équateur $L = 0$.....	$l = a$		

On voit donc que, dans cette hypothèse, les différences premières des trois longueurs ainsi choisies doivent être constantes, et égales à la moitié du coefficient du carré du sinus. Or ici, en tirant ces différences de l'ensemble des observations mêmes, nous les trouvons sensiblement inégales, et plus fortes du 45e degré au pôle que du 45e degré à l'équateur. C'est précisément le même résultat que nous avions déjà individuellement reconnu, par la discussion des observations faites en Europe de part et d'autre du 45e parallèle. Nous ne faisons donc ici que retrouver ce résultat sous une autre forme, mais avec une nouvelle augmentation de probabilités, puisqu'il se trouve déduit d'observations plus nombreuses, et toutes différentes de celles par lesquelles nous l'avions constaté d'abord.

Il suit de là qu'un observateur qui veut calculer l'aplatissement de la terre d'après les mesures du pendule, dans l'hypothèse elliptique, à l'aide du théorème de Clairaut, doit trouver des résultats fort différents les uns des autres, selon la portion d'hémisphère où dominent les observations qu'il emploie. Car, par exemple, s'il combine le pendule équatorial donné immédiatement par les expériences, avec la valeur de la constante donnée par des observations intermédiaires entre le 45e degré et le pôle, ou entre le 45e degré et l'équateur, ou enfin dans toute l'étendue de l'hémisphère boréal, il obtiendra les trois valeurs rassemblées dans le tableau suivant, où la lettre a représente le pendule équatorial 991mm,027015, tel que nous l'avons trouvé plus haut.

	Valeur du coefficient du carré du sinus b.	Aplatissement elliptique conclu du théorème de Clairaut $0,00865 - \frac{b}{a}$.
De 90° à 45°...	mm 5,337224	$0,00865 - 0,00538555 = \frac{1}{306,33}$
De 45° à 0°...	4,986672	$0,00865 - 0,00503182 = \frac{1}{276,38}$
De 90° à 0°...	5,161948	$0,00865 - 0,00520869 = \frac{1}{290,59}$

Le premier de ces aplatissements est presque exactement celui que donnent les inégalités lunaires; le second s'accorde presque identiquement avec celui que le capitaine Freycinet a déduit de l'ensemble de ses observations, qui étaient faites principalement depuis le 45e degré jusqu'à l'équateur. Le dernier enfin diffère à peine de $\frac{1}{288}$, que le capitaine Sabine a déduit de toutes ses expériences qui s'étendaient depuis l'équateur jusqu'au Spitzberg, et auxquelles il a associé celles qui avaient été faites en Angleterre et en France. Mais, en général, lorsque l'on sait que le coefficient du carré du sinus est très-sensiblement différent dans les parties du globe situées à diverses latitudes, on conçoit que la valeur qu'on lui attribue, et par conséquent l'aplatissement elliptique qui en résulte par le théorème de Clairaut, doivent être considérablement modifiés par la distribution géographique des stations. On pourrait même, d'après la discussion précédente, assigner d'avance le choix de stations qu'il faudrait faire pour obtenir telle ou telle valeur de l'aplatissement comprise entre les limites extrêmes que nous avons tout à l'heure indiquées. Mais de pareilles combinaisons de nombres n'auraient, d'après ce qui précède, aucune application physique véritable, et ne se lieraient par aucun rapport réellement théorique avec la forme du sphéroïde que nous habitons.

En abandonnant ainsi ces rapports illusoires, on peut encore chercher à découvrir, par les seules expériences, si l'intensité absolue de la pesanteur et les lois de ses variations générales sont les mêmes dans l'hémisphère austral que dans l'hémisphère boréal; ce qui n'empêcherait pas que les aplatissements de ces deux hémisphères pussent être inégaux. A la vérité, ayant montré plus haut, comme nous l'avons fait, que les longueurs absolues du pendule sont influencées dans l'hémisphère boréal par des causes très-puissantes et très-étendues, il devient difficile de fixer bien précisément comment la comparaison des deux pesanteurs doit être faite pour être exacte, et quelles parties des deux hémisphères seront les plus convenables pour cette épreuve. A plus forte raison, ne pourrait-on pas se fier à des observations isolées, dans lesquelles on pourrait toujours suspecter que l'égalité ou l'inégalité des longueurs serait produite par des causes purement locales. Malheu-

reusement, l'hémisphère austral, beaucoup moins civilisé que le nôtre, est bien loin d'avoir été aussi exploré; et la navigation seule a pu y recueillir quelques résultats qui se lient les uns aux autres. Sous ce rapport, on ne trouve rien de préférable au parallèle du port Jackson et du cap de Bonne-Espérance, sur lequel MM. les capitaines Freycinet, Duperrey et le général Brisbane ont observé le pendule en quatre points qui embrassent un arc de 132° 45′ en longitude. Pour ne former aucune hypothèse sur la valeur du coefficient du carré du sinus, qu'il convient d'appliquer à ces observations, nous les avons réduites au parallèle qui répond à la moyenne des longueurs observées, et nous avons obtenu les résultats suivants :

NOMS des lieux d'observation et des observateurs.	Latitudes australes.	Longueurs du pendule observées, réduites au vide et au niveau de la mer.	Moyenne de toutes les longueurs observées dans les quatre stations.	Latitude correspondante à la moyenne des pendules; calculée.
Le Cap (Freycinet) ...	33°.55′.15″	mm 992,577798		
Port Jackson (Freycinet).	33.51.34	992,614696	mm 992,571514	33° 51′ 48″ S.
Port Jackson (Duperrey).	33.51.40	992,578448		
Paramata (Brisbane) ...	33.48.42	992,535135		

Nous n'avons en Europe, dans l'hémisphère boréal, aucune série d'observations faites sur un parallèle aussi voisin de l'équateur; mais nous pouvons calculer la longueur correspondante du pendule, d'après les observations de New-York et de Barcelone, en leur appliquant les valeurs du coefficient du carré du sinus propres aux intervalles qui les séparent de l'équateur. On obtient ainsi les résultats suivants :

NOMS des lieux d'observation.	Latitudes boréales.	Longueurs du pendule observées réduites au vide et au niveau de la mer.	Logarithme du coefficient du carré du sinus employé pour la réduction. log *b*.	Réduction à la latitude de 33° 51′ 48″ nord.	Longueur conclue du pendule sur le parallèle de 33° 51′ 48″ nord.
	° ′ ″	mm		mm	mm
Barcelone....	41.23.15	993,232131	0,008794	—0,635936	992,596195
New-York ...	40.42.43	993,158649	0,075788	—0,586262	992,572387
Longueur moyenne du pendule sur le parallèle de 33° 51′ 48″ N.					992,584291
Long. moy. observée sur le même parallèle au sud de l'équateur					992,571514
Excès de la pesanteur boréale.....					+0,012777

La différence des deux résultats étant de l'ordre des erreurs que les observations et les réductions comportent, on peut regarder les intensités de la pesanteur sur ces deux parallèles comme sensiblement égales entre elles.

On peut faire un rapprochement analogue, en comparant les observations des capitaines Freycinet et Duperrey aux îles Malouines, avec celles de Londres et de Dunkerque : en effet, on a, dans l'hémisphère austral :

LIEUX D'OBSERVATION et noms des observateurs.	Latitudes australes.	Longueurs du pendule observées, réduites au vide et au niveau de la mer.	Moyenne des longueurs observées dans les deux stations.	Latitude correspondante à la moyenne des longueurs.
	° ′ ″	mm	mm	
Malouines (Freycinet).	51.35.18 S.	994,055282	994,084925	51° 33′ 31″ S.
Malouines (Duperrey).	51.31.44	994,114567		

Maintenant, la moyenne des observations de Londres et Dunkerque étant réduite au même parallèle, on aura, pour l'hémisphère boréal :

LIEUX d'observation.	Latitudes boréales.	Longueur du pendule observée réduite au vide et au niveau de la mer.	Logarithme du coefficient du carré du sinus employé pour la réduction. log b.	Réduction à la latitude 51° 28' 31" nord.	Longueur [illegible] du pendule à la latitude de 51° 28' 31" nord.
Londres, Dunkerque.	51°.16'.38"	mm 964,101902	0,7411971	mm +0,026387	mm 994,1[illegible]
Longueur moyenne observée sur le même parallèle au sud de l'équateur					994,[illegible]
Excès de la pesanteur boréale.....					+ 0,0[illegible]

On voit que, par cet exemple comme par le précédent, la pesanteur boréale se trouverait plus forte que l'australe, à pareille latitude, d'une très-petite quantité. Mais, par cela même que la différence est si petite, et conclue d'observations si peu nombreuses, il n'est guère possible de rien prononcer à cet égard, et il faut attendre que de nouvelles expéditions, faites vers de hautes latitudes australes, nous fournissent d'autres points de comparaison.

La discussion précédente n'est pas limitée à montrer les seules conséquences certaines que nous puissions maintenant déduire des expériences du pendule; elle nous apprend encore comment ces expériences doivent être dirigées à l'avenir pour pouvoir être réellement utiles à la théorie de la terre. Puisque des causes très-étendues et très-puissantes paraissent affecter considérablement l'intensité de la pesanteur sur les diverses parties des méridiens et des parallèles, il faut diriger nos expériences de manière à suivre les effets de ces grandes modifications, afin de parvenir à découvrir leurs lois, si toutefois elles ne sont pas tout à fait irrégulières. Ainsi, désormais il serait peu utile de tenter des expériences isolées, à moins que le hasard ne conduisît à les faire en quelque point remarquable par l'intensité des anomalies; et il faudra, au contraire, s'attacher davantage à les étendre sur le prolongement des arcs déjà observés. Ces réflexions s'appliquent évidemment aussi aux mesures mêmes des arcs de méridiens et de parallèles. On a vu

plus haut quel intérêt la grande intensité relative de la pesanteur à Unst jettera sur les opérations qui s'exécutent, depuis plusieurs années, en Écosse, pour prolonger l'arc de France et d'Espagne jusque dans cette île. Rien ne serait plus utile, pour compléter ce grand arc européen, qu'une opération faite en Afrique dans l'établissement anglais de Cape Coast, situé à la fois très-près de l'équateur et du méridien des îles Shetland. N'y mesurât-on que la longueur du pendule, ce qui n'exige que la possession actuelle du sol, on ajouterait un élément très-important aux mesures d'Europe. C'est ici que nous devons bien déplorer la perte du courageux et infortuné Bowdich, qui connaissait si parfaitement ces contrées, qui s'était fait aimer, respecter de ces mêmes Ashantics, devenus depuis les plus acharnés ennemis des Anglais sur cette plage, et qui, peut-être, aurait détourné ces malheurs de ses compatriotes si, pour le bien des sciences, il y eût été renvoyé une seconde fois, comme il en avait un si ardent désir. Son zèle, qui s'élançait impétueusement vers tout ce qui pouvait être utile, avait embrassé avec ardeur l'idée de se livrer à ces importantes déterminations, lorsque le malheur et la mort l'arrêtèrent. Le prolongement du parallèle de Bordeaux et Fiume jusqu'à la mer Noire est aussi une opération que nous devons appeler de tous nos vœux. Mais pour qu'elle soit tout à fait utile à la théorie de la terre, ainsi que toute autre mesure de parallèle, il faut indispensablement donner à la mesure des azimuts toute la perfection qu'y peut apporter la lunette méridienne, et les lier successivement les uns aux autres sur toute la ligne, non par des successions de triangles dont la somme d'erreurs est toujours croissante, mais par des observations de relèvements immédiatement réciproques, entre les stations où les azimuts seront successivement observés. Les mêmes remarques s'appliquent au parallèle de Brest à Strasbourg, que l'on mesure actuellement; car il faut bien se persuader que, dans l'état actuel de la théorie du globe, des opérations de ce genre ne peuvent avoir absolument aucune utilité scientifique, si elles ne sont pas exécutées avec toutes les recherches de la plus minutieuse précision.

Une autre conséquence qui résulte de la discussion dans laquelle

nous venons d'entrer sur les mesures du pendule, est relative au choix de sa longueur pour étalon de mesure, ainsi que l'ont fait récemment les Anglais.

Le but que l'on se propose, lorsqu'on cherche dans les phénomènes naturels un étalon de mesure, c'est qu'il puisse être défini rigoureusement, et à perpétuité, par certaines conditions abstraites, qui donnent toujours la possibilité de le retrouver avec exactitude. Le pendule remplirait évidemment ces conditions, si sa longueur sur les diverses parties du globe suivait des lois régulières exactement définissables. Mais, lorsque nous voyons cette longueur différer notablement d'un méridien à un autre pour la même latitude, et varier sur le même méridien d'une manière trop irrégulière pour pouvoir être généralement définie, il s'ensuit que, si l'on veut caractériser l'étalon qu'on en dérive, il faudra fixer non-seulement le méridien géographique, mais la latitude et jusqu'au choix même de la place particulière où on l'aura observé. Or, indépendamment de l'incertitude qu'entraîne essentiellement un tel mode de fixation, qui peut dire si, dans le même lieu, l'intensité de la pesanteur, et par suite la longueur du pendule, sera dans deux mille ans, ou même dans quelques siècles, exactement égale à ce qu'elle est aujourd'hui? C'est de quoi nous ne pouvons nullement répondre; on peut même concevoir que de simples changements, opérés par la main des hommes, modifient assez le sol pour changer cette intensité d'une manière appréciable. Que devons-nous penser des catastrophes locales que peut produire la nature? Les abaissements et les exhaussements progressifs du sol, que l'on a observés dans certaines contrées, le seul travail continuel des volcans, et les variations perpétuelles du magnétisme à la surface du sphéroïde terrestre, n'annoncent-ils pas des modifications intérieures dont l'intensité relative de la pesanteur doit vraisemblablement se ressentir? De tout cela, il faut nécessairement conclure que la longueur du pendule n'a pas les caractères de généralité et d'invariabilité que l'on doit chercher dans un étalon de mesure que l'on prépare pour la postérité.

La grandeur de la terre, base de notre système métrique, offre-t-elle des conditions préférables? A la vérité, les inégalités des

méridiens, attestées par les mesures des parallèles, doivent y porter leur incertitude; et, sur le même méridien, les inégalités des degrés successifs ne permettent pas non plus d'y appliquer, avec rigueur, les lois de l'ellipse auxquelles notre mètre a été cependant assujetti. Mais d'abord, l'influence de ces inégalités s'affaiblit beaucoup lorsque l'on combine ensemble de grands arcs, mesurés à des latitudes très-distantes, puisque les arcs de Suède, de France, du Pérou et de l'Inde, étant combinés ensemble dans l'hypothèse elliptique, donnent toujours pour le mètre des valeurs qui diffèrent seulement dans les centièmes de millimètre. En outre, il faut remarquer qu'un accord complet de ces diverses évaluations, quoique désirable, mais vraisemblablement impossible, n'est point du tout nécessaire pour définir le mètre d'une manière durable. Car, pour obtenir ce seul et principal avantage, il suffirait d'avoir, sous des méridiens physiquement définis du globe, des arcs dont les amplitudes astronomiques et les amplitudes géodésiques fussent déterminées avec assez d'exactitude pour que leur rapport fixât la longueur du mètre avec une suffisante précision. En effet, on retrouverait toujours ce même rapport, et, par conséquent, la même longueur du mètre, si l'on mesurait de nouveau, sur ces méridiens, des amplitudes égales aux premières ou peu différentes, comprises entre les stations extrêmes qui seraient, ou les mêmes, ou peu différentes de celles-là. Or, cette fixité de rapport entre les amplitudes géodésiques et les amplitudes célestes est un point dont nous nous approchons tous les jours, par le perfectionnement continuel des observations astronomiques, joint au concours général d'opérations géodésiques qui s'effectuent maintenant sur toutes les parties du continent européen. Les résultats de ces travaux, étant tous actuellement expressibles en mètres, en deviendront autant de représentations physiques tracées sur le globe même, et donneront ainsi à l'étalon de France toute la permanence que l'on peut espérer d'atteindre sur cette terre soumise à l'action continuellement changeante du temps.

ADDITION AU PRÉCÉDENT MÉMOIRE.

Dans les mesures définitives du pendule absolu dont nous venons de rapporter l'ensemble, nous avons employé la méthode de Borda, modifiée par deux circonstances principales : la première, c'est de faire le pendule aussi peu différent du mètre pour que les barres qui la mesurent puissent être directement rapportées à l'étalon métrique des archives de France au moyen du comparateur; la seconde modification consiste à déterminer les excursions variables des languettes des barres, non par un simple vernier, mais par la coïncidence moyenne d'une multitude de divisions sensiblement égales, comme nous l'avons expliqué pages 459-461 du quatrième volume de la *Base du système métrique;* et cette méthode, que nous avons indiquée à la p. 239 du présent volume, admet également l'emploi du comparateur. Il suit de là, que la longueur totale des barres et de leur languette sortie, représentant la distance du plan de suspension au bas de la boule de platine, s'obtient avec toute la précision de cet instrument; c'est-à-dire, pour le mètre, jusqu'aux millièmes de millimètre; les écarts des évaluations partielles entre elles n'étant que dans ces millièmes, et ne s'élevant jamais aux centièmes. Mais, dans le calcul du pendule, cette distance ne s'emploie pas avec sa valeur totale; il faut d'abord en retrancher le rayon de la boule de platine, c'est-à-dire un autre élément de longueur. Or, la manière dont Borda s'y est pris pour déterminer ce rayon est bien loin d'offrir une exactitude du même ordre que le comparateur. Car, ayant d'abord suspendu sa règle pendule au-dessus du plan inférieur de contact amené à l'horizontalité, il laissait *tomber* la languette de cette règle, tantôt immédiatement sur le plan, tantôt sur le sommet de la boule posée sur sa surface; et le diamètre de la boule était donné par la différence des excursions lue sur un vernier latéral. Mais, pour que la languette pût ainsi *tomber* librement par son seul poids, il fallait qu'elle fût libre dans sa rainure; et alors les deux divisions, fixe et mobile, du vernier latéral, étant nécessairement aussi distantes l'une de l'autre, comment pouvait-on répondre du centième de millimètre dans la lecture du vernier? Frappé de cette difficulté dès nos premières observations, M. Arago avait cherché, de son côté, à y remédier, par un appareil de contact formé de deux plans parallèles, l'un fixe, l'autre mobile, à l'aide d'une vis dont un vernier latéral, donnant le centième de millimètre, mesurait les mouvements. M'ayant confié cet appareil lors de mon voyage aux îles Shetland, en 1817, je m'en servis pour mesurer tant le diamètre absolu d'une nouvelle boule de platine dont je fis alors usage, que sa différence avec la boule de Borda, et la dimension absolue de celle-ci elle-même. Cette mesure s'étant accordée à très-peu près avec la valeur donnée par Borda, je dus continuer d'employer celle-ci, mais non pas, toutefois, sans regretter que le nouveau procédé fût encore loin de la certitude du comparateur : d'abord, par son vernier, ne pouvant accuser que des centièmes de millimètre, et ensuite par l'inégalité des pressions opérées avec la vis

dans les différents contacts du plan mobile, soit sur les boules, soit sur le plan fixe contre lequel il s'appliquait pour point de départ.

J'ai enfin imaginé un appareil exempt de ces difficultés, et propre à donner les mesures des corps, soit cylindriques, soit sphériques, avec toute l'exactitude du comparateur, ou plutôt à l'aide du comparateur même. Il est représenté, en projection verticale et horizontale, dans la *Pl.* XXIII. MMHH est une plaque en métal dont la portion HH, que nous supposerons horizontale, est destinée à porter le comparateur CV, qui s'y attache par ses vis latérales de pression. La portion MM porte un parallélipipède métallique d'acier poli T, dont la face, située du côté du comparateur, sert de plan de contact fixe. L'autre contact se fait sur le petit disque métallique PP, extrémité de la pièce mobile du comparateur, dont les excursions en avant ou en arrière font mouvoir le grand bras CV, au bout duquel est l'index des divisions circulaires ayant l'axe AA pour centre. L'appareil a été réglé de manière que, dans les excursions de la pièce mobile PPP'P'', le petit disque plan PP reste toujours parallèle à la face opposée de T : ce qui se vérifie par un procédé de retournement qui sera expliqué tout à l'heure. Enfin, une vis verticale O, terminée par un plan perpendiculaire à sa longueur, et placée entre le comparateur et le parallélipipède T, sert à élever à une hauteur convenable les corps que l'on veut interposer entre eux. Maintenant, si B est une boule dont il s'agit de mesurer le diamètre et de vérifier la sphéricité, on la pose sur le bout de la vis O, et on l'élève jusqu'à ce que son centre soit d'abord *à peu près* à la hauteur du comparateur; puis on approche celui-ci jusqu'à ce que son index réponde à peu près au milieu de sa division; et après l'avoir fixé à cette place, on achève d'élever la boule jusqu'à ce que le contact de la pièce PP sur sa surface soit exactement tangentiel : ce que l'on juge par le passage de la lumière autour du point de contact, qui doit être alors au centre du disque; ou encore parce que l'index du comparateur accuse alors le maximum d'écartement que la boule puisse produire entre le comparateur et le plan T. Cet effet obtenu de l'une ou de l'autre manière, on peut aisément vérifier la sphéricité de la boule, et mesurer les plus petites inégalités de ses diamètres; car il suffit pour cela de tourner la boule sur elle-même en différents sens, et de lire à chaque changement de contact les indications nouvelles du comparateur. Maintenant, pour connaître la valeur absolue du diamètre, correspondante à chacune de ces indications, enlevez la boule, et substituez à sa place un étalon de fer E d'une dimension presque égale au diamètre de la boule, et dont les bouts opposés *e e* soient exactement plans et perpendiculaires à sa longueur : cela exigera, en général, que vous tourniez plus ou moins la vis pour amener le centre des faces *ee* à la hauteur du disque PP qui termine la pièce mobile du comparateur. Quand vous aurez atteint ce terme, si la longueur de l'étalon est, comme nous l'avons supposé, très-peu différente du diamètre moyen de la boule, le comparateur s'arrêtera sur une division pareillement très-voisine de sa première indication, et la quantité dont il aura marché exprimera, en millièmes de

millimètre, l'excès d'une de ses longueurs sur l'autre. Vous pourrez alors vérifier si les bouts *ee* de l'étalon sont en effet plans, parallèles entre eux, et si la face de contact PP du disque mobile est également parallèle à la face de contact fixe du plan T. Car il suffira pour cela de retourner l'étalon E, pour le faire poser sur la vis O successivement par ses diverses faces latérales, et de voir si l'index du comparateur s'arrête à la même division dans tous ces cas. On pourra même étudier ainsi le travail des bouts, et s'assurer s'ils sont plans, ou concaves, ou convexes; car il suffira pour cela d'élever ou d'abaisser l'étalon, en tournant la vis de manière que le contact du disque mobile s'opère par le centre des faces *ee* ou par leurs bords, soit supérieurs, soit inférieurs, soit latéraux. Si l'on trouve que ces bouts sont bien plans, comme ils doivent l'être, on opérera de nouveau le contact au centre de leurs faces, pour plus d'exactitude; et l'on aura ainsi, par le comparateur, la différence de longueur entre le diamètre de la boule et la dimension longitudinale de l'étalon E.

Il faut remarquer ici qu'en général, ces comparaisons pourront être faites à des températures peu différentes, si l'on a soin de les effectuer l'une après l'autre sans intervalle, avec les mains gantées, et en couvrant l'appareil par une feuille de papier, pour l'abriter contre la chaleur que le corps de l'observateur rayonne. Alors, au lieu de chercher à mesurer la petite différence de température que ces précautions peuvent laisser encore, ce qu'il serait fort difficile de faire avec exactitude, on la compensera rigoureusement par la méthode des alternatives; c'est-à-dire que l'on mettra d'abord dans l'appareil l'étalon E, puis la boule, puis de nouveau l'étalon E. En prenant la moyenne des deux indications données par la première substitution et la troisième, on aura un résultat exactement relatif à la température intermédiaire où la boule a été observée.

Soient t cette température en degrés centésimaux, et F, P les dilatations linéaires du fer et du platine dont l'étalon et la boule sont faits. Alors, si E représente la longueur de l'étalon, et D le diamètre de la boule, à la température de la glace fondante, il est clair que, pour la température moyenne t à laquelle les comparaisons sont réduites, la longueur de l'étalon sera devenue $E(1 + Ft)$, et celle du diamètre de la boule $D(1 + Pt)$. Si donc l'excès de la première sur la seconde a été trouvé, par le comparateur, égal à δ, δ étant une quantité si petite que l'on puisse indifféremment lui appliquer, ou ne pas lui appliquer les réductions de température, l'énoncé du résultat en langage algébrique sera

$$D(1 + Pt) = E(1 + Ft) - \delta;$$

d'où l'on tire

$$(1) \qquad D = E + \frac{E(F - P)t - \delta}{1 + Pt}:$$

ceci donnera le diamètre de la boule à la température de la glace fondante,

lorsque l'on connaîtra celle de l'étalon à cette même température, et que l'on aura de plus observé la différence δ.

Reste donc maintenant à connaître E : or, rien n'est plus facile, car il suffit de prendre une des règles pendules dont la languette porte des divisions connues ; de la placer sur la barre du comparateur ; puis de chercher, par la méthode des coïncidences, la longueur de l'étalon E en fonction de ces divisions-là. Par exemple, pour la mesure de la boule de Borda, j'ai employé un étalon E, dont la longueur différait très-peu de $36^{mm},6$ et je l'ai mesuré en fonction de la règle de Dunkerque, dont les divisions sont des cinquièmes de millimètre, ou $0^{mm},2$. Désignons par R_0 la longueur inconnue de la règle et de sa languette, quand celle-ci est rentrée jusqu'au zéro de ses divisions, la température étant celle de la glace fondante. Si, à cette même température, nous faisons sortir la languette de $0^{mm},2$, et que nous lui ajoutions l'étalon E, très-peu différent de $36^{mm},6$, nous aurons une longueur totale $R_0 + 0,2 + E$, qui sera presque exactement égal à $R_0 + 36^{mm},8$; par conséquent, si nous lisons alors l'index du comparateur, et si nous le lisons encore en amenant réellement la languette à $36^{mm},8$, après avoir ôté l'étalon, l'excès de la seconde longueur sur la première, qui sera donné par le comparateur, représentera la valeur de $R_0 + 36^{mm},8 - (R_0 + 0^{mm},2 + E)$, ou simplement celle de $36^{mm},6 - E$; de sorte que cette valeur étant d, on en déduira

$$(2) \qquad E = 36^{mm},6 - d,$$

ce qui fera connaître la longueur de l'étalon E, en fonction des divisions de la languette et des parties du comparateur.

Nous avons supposé les comparaisons faites à la température de la glace fondante, où toutes les réductions deviennent nulles; mais, si l'on opérait à toute autre température, *pourvu qu'elle fût constante*, les résultats seraient les mêmes, sans aucune différence appréciable, parce que la règle, ainsi que sa languette et l'étalon E, étant tous trois en fer, les mêmes variations de température les modifient toutes trois dans le même rapport; de sorte que ces variations affectent seulement leur différence d. Si donc celle-ci est si petite, que ses changements propres de dilatations soient insensibles depuis la température de la glace fondante jusqu'à celle où les comparaisons sont faites, on pourra l'employer directement, telle que le comparateur la donne, et l'appliquer à la différence des valeurs réduites à la température normale; c'est-à-dire que l'équation (2) ci-dessus subsistera encore, en prenant pour d la différence observée sans y faire aucune réduction.

Or, pour ramener les comparaisons à cette condition d'une température constante, il suffit de prendre, comme tout à l'heure, les précautions convenables pour rendre les variations réelles de la température très-faibles, et de les compenser par la méthode des alternatives, en enfermant chaque observation de $R_0 + 0,2 + E$, par exemple, entre deux observations de $R_0 + 36^{mm},8$, dont on prendra la moyenne pour les lui comparer.

J'ai appliqué ce procédé à deux étalons : l'un, que je nommerai E, était, comme je viens de le dire, peu différent de 36^{mm},6 et destiné à la mesure de la boule de Borda ; l'autre, que je nommerai E', était peu différent de 35,6, et destiné à la mesure de la boule d'Écosse. Leurs bouts, touchés en divers points par le comparateur, comme je l'ai dit plus haut, se sont trouvés parfaitement plans et parallèles ; et la perfection de leur contact avec le disque mobile PP dans toutes les retournes a prouvé aussi le parallélisme parfait de cette pièce avec le plan fixe T. J'ai commencé par mesurer ces deux étalons en fonction de la règle de Dunkerque, avec toutes les précautions qui pouvaient y rendre les variations de la température très-faibles. De là sont provenus les tableaux suivants, qui, après ce qui précède, ne demandent aucune explication, si ce n'est que toutes les coïncidences qui ont concouru à les former n'ont pas été simplement observées une fois, mais sont la moyenne de cinq coïncidences générales qui ont été successivement défaites et rétablies, afin d'obtenir une coïncidence moyenne plus exacte.

JOURS des observations.	Valeurs de E conclues.	Écarts des résultats partiels autour de la moyenne.	Valeurs de E' conclues.	Écarts des résultats partiels autour de la moyenne.
	mm	mm	mm	mm
1820, mars..... 8	36,5520	— 0,0003	35,5650	+ 0,0029
	36,5528	— 0,0005	35,5572	— 0,0049
	36,5526	+ 0,0003	35,5598	— 0,0023
9	36,5494	— 0,0028	35,5660	+ 0,0039
	36,5556	+ 0,0033	35,5624	+ 0,0003
Valeurs moyennes...	E; 36,55228		E'; 35,56208	

Ceci donne l'excès de E sur E' égal à 0^{mm},99010. Cette différence pouvait se vérifier immédiatement par le comparateur, en y substituant ces deux étalons tour à tour. Seulement, comme cette alternative faisait parcourir à l'index un grand arc, il fallait, pour l'exactitude, évaluer, par une expérience spéciale, la valeur totale de cet arc en fonction des règles à languette ; c'est ce que j'ai fait, et j'ai trouvé ainsi pour E — E', 0^{mm},9908933, valeur à peine différente de la précédente.

Les valeurs des étalons E, E' étant ainsi connues, il reste à les comparer aux diamètres des deux boules, que nous désignerons par Δ, Δ', pour les températures auxquelles les observations sont faites. Désignons aussi alors

	·pérature moyenne la série médiaire	Excès de Δ' sur ε' ou $\Delta' - \varepsilon'$ en millimètres
A.		
A.		
A		mm 0,07230

longueurs que prennent nos deux étalons. Nous avons exposé
a marche de ses expériences. Le tableau placé en regard de la
ge offre tout le détail d'une d'entre elles.

ue la boule de Borda n'est pas rigoureusement sphérique; ses
nètres font, autour de leur moyenne, des oscillations qui vont
,5 du comparateur, ou à $0^{mm},009$ presque $\frac{1}{100}$ de millimètre.
e avait été fabriquée par Le Noir. La boule d'Écosse n'offre point
s de cet ordre. Les variations accidentelles de ses diamètres sont
sensibles. Elle a été fabriquée par Fortin.

pour chacune des deux boules d'autres séries pareilles, dont je
ai seulement les résultats en les réunissant aux précédents.

	Valeur de $\Delta - \varepsilon$ en millimètres.	Température en degrés centésimaux.		Valeur de $\Delta' - \varepsilon'$ en millimètres.	Température en degrés centésimaux.
	mm	°		mm	°
	— 0,05964	+ 9,3		—0,072734	+ 9,5
	— 0,05992	+ 8,7		—0,066200	+10,4
				—0,069160	+ 8,5
r moyenne $\Delta - \varepsilon$	— 0,05978	+ 9,0	Valeur moyenne de $\Delta' - \varepsilon'$	—0,069365	+ 9,5

nant, pour ramener ces résultats à la température de la glace fon-
il faut se rappeler que Δ est $D(1 + Pt)$, comme Δ' est $D'(1 + Pt')$, et
areillement, ε est $E(1 + Ft)$ comme ε' est $E'(1 + Pt')$; on aura donc,
tant ici pour t et t', les valeurs précédentes :

$$D(1 + 9^\circ,P) = E(1 + 9^\circ,F) - 0^{mm},05978,$$
$$D'(1 + 9^\circ,5P) = E'(1 + 9^\circ,5F) - 0^{mm},069565;$$

1 outre, par les expériences de Borda,

$$P = 0,000008565; \qquad F = 0,0000114;$$

1 que nous avons toujours trouvées conformes aux dilatations relatives
et du platine, quand nous avons comparé nos règles avec l'étalon
ue à diverses températures. De là on tire

$$D = E + \frac{9^\circ(F - P)E - 0^{mm},05978}{1 + 9P};$$
$$D' = E' + \frac{9^\circ,5(F - P).E' - 0^{mm},069365}{1 + 9,5P};$$

et, puisque nous avons trouvé plus haut

$$E = 36^{mm},55228 ; \qquad E' = 35^{mm},59208 .$$

il vient, en effectuant les calculs,

$$D = 36^{mm},55228 - 0^{mm},058849 = 36^{mm},493431 ;$$
$$D' = 35^{mm},56208 - 0^{mm},068405 = 35^{mm},493675.$$

L'excès de la boule de Borda sur la boule d'Écosse est donc ici de $0^{mm},999756$. J'avais trouvé à Unst $1^{mm},002375$, avec l'appareil de contact de M. Arago : ainsi, le résultat était à très-peu près le même. Mais la valeur absolue que j'avais adoptée d'après Borda, pour le diamètre de sa boule, était $36^{mm},518525$, par conséquent trop forte de $0^{mm},025094$; et je n'avais pas pu découvrir cette petite erreur avec l'appareil à contact de M. Arago, parce que, pour amener les deux plans de contact en coïncidence complète, ce qui déterminait le zéro de l'échelle, il fallait presser ces plans l'un contre l'autre beaucoup plus fortement que l'on n'osait presser les boules, ce qui faisait paraître les diamètres absolus trop grands.

Les petites réductions trouvées ici pour les rayons de nos deux boules deviennent *additives* dans les longueurs calculées du pendule, et elles s'y ajoutent avec leur valeur entière. Au contraire, elles deviennent soustractives dans le terme $\frac{2R^2}{5L}$ qui était additif à ces longueurs.

En outre, si le pendule observé a été décimal, comme cela a eu lieu dans nos expériences à Paris, Dunkerque, Clermont, Bordeaux, Figeac, et que l'on veuille traduire ce pendule en sexagésimal, ce qui exige qu'on le multiplie par $(\frac{1000}{144})^2$ ou $1 + \frac{1}{9} + 0,00625857$, il faudra agrandir les deux corrections précédentes dans le rapport.

Ces petits changements, loin de porter atteinte aux résultats généraux énoncés dans notre Mémoire, ne font, au contraire, que les confirmer davantage, en leur donnant une plus grande régularité. Ainsi, le tableau des variations progressives de la pesanteur, depuis Formentera jusqu'à Unst, rapporté page 472, acquiert par là une continuité complète qu'il n'avait point avec les premières évaluations que nous avions d'abord employées. Le seul changement qu'il puisse être utile de fixer spécialement est celui du pendule moyen, sur le 45e parallèle d'Europe, qui devient ainsi $993^{mm},534239$, au lieu de $993^{mm},520351$ que nous avions trouvé d'abord.

FIN DU TOME DEUXIÈME.

Fig. 1.

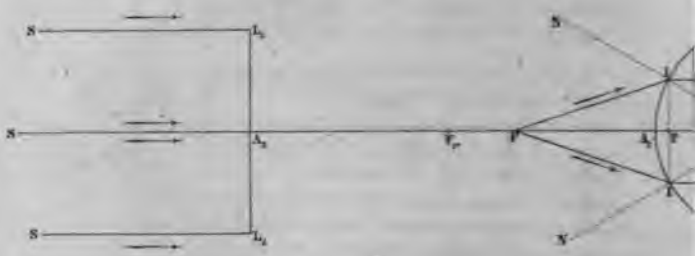


Fig. 3.

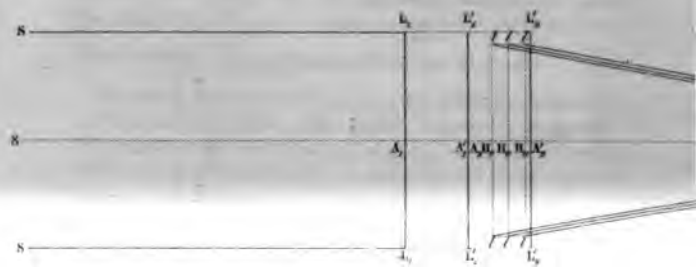


Fig. 5.

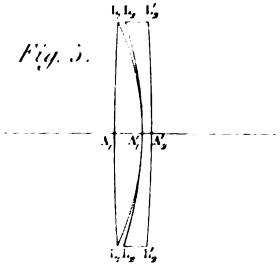
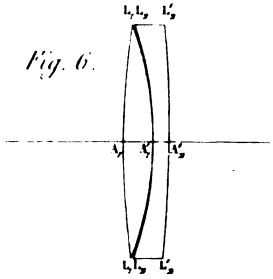
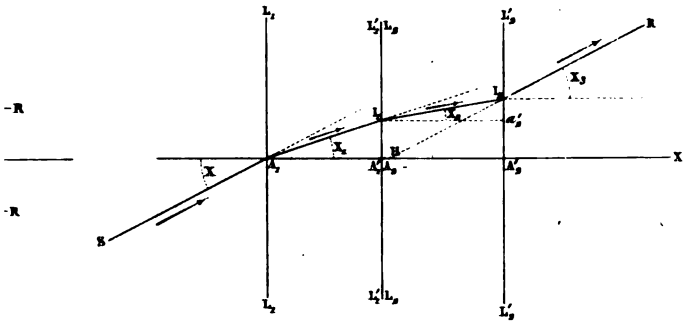


Fig. 6.



E. Wormser sc.

Fig. 2.



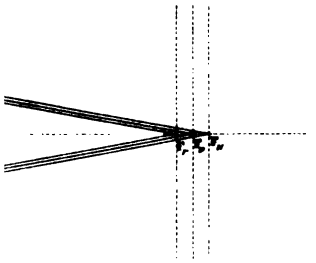
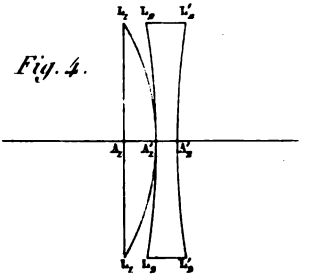


Fig. 4.



g. 7.

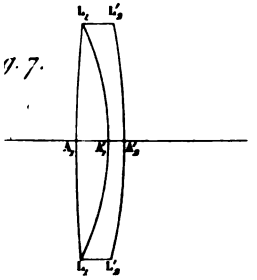


Fig. 8.

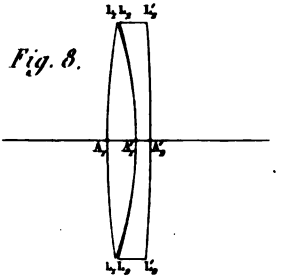


Fig. 9.

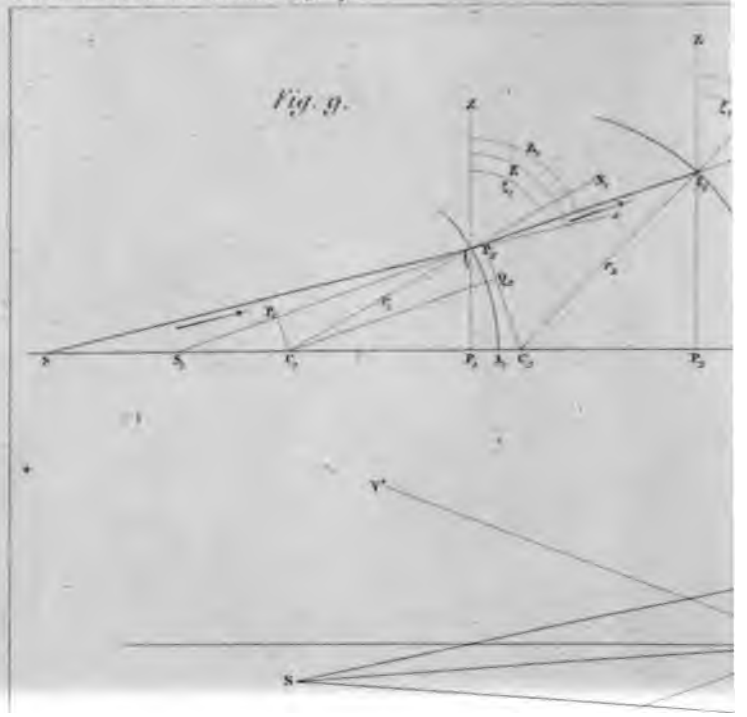
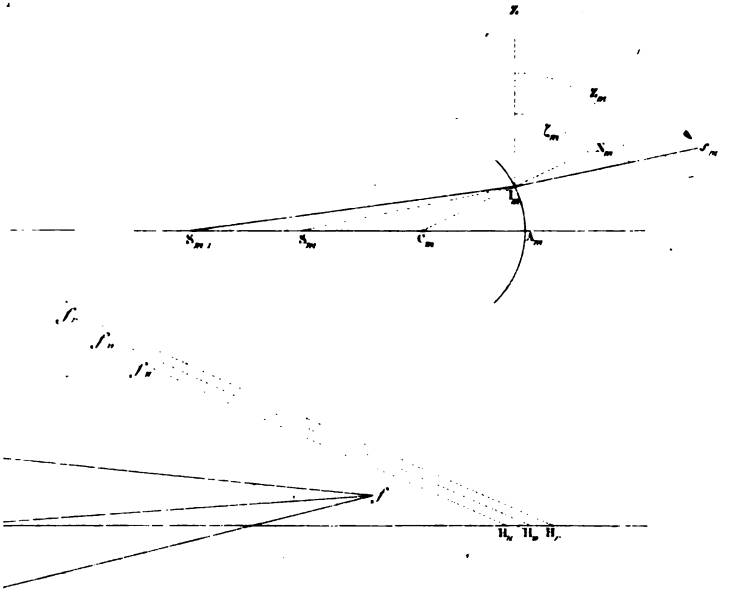
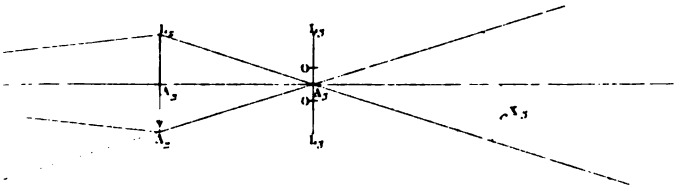
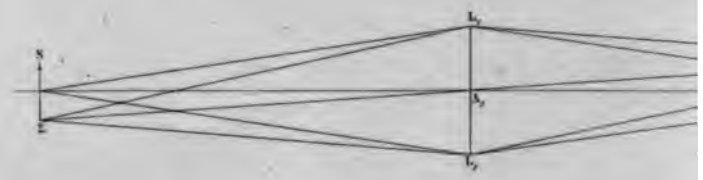


Fig. 10.


z
z_m
ζ_m
x_m
s_m
L_m
S_{m+1}
S_m
C_m
A_m
f_r
f_m
f_u
f
H_u H_m H_r

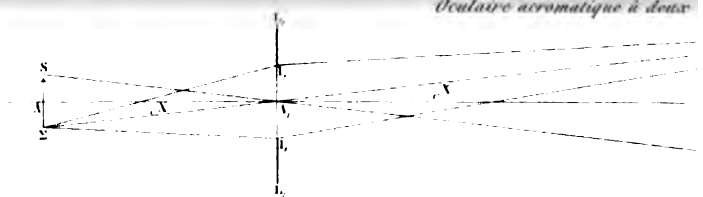
12.

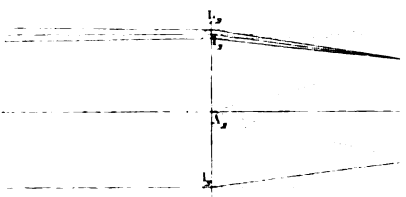

L_2
L_3
O
A_3
O
A_3
X_2
L_3
x_3



Oculaire acromati

Oculaire acromatique à deux

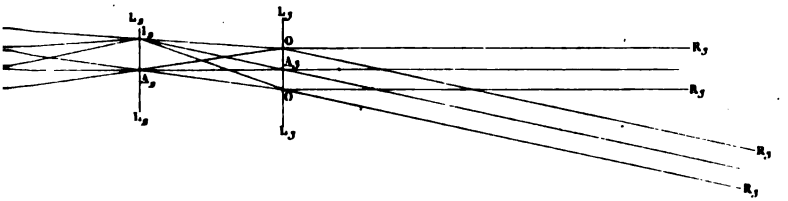




Oculaire acromatique à deux ver

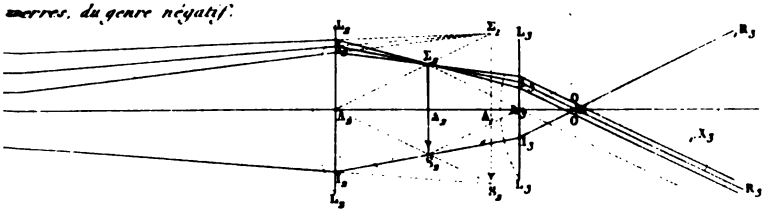
A. Warmser sc

. 13.



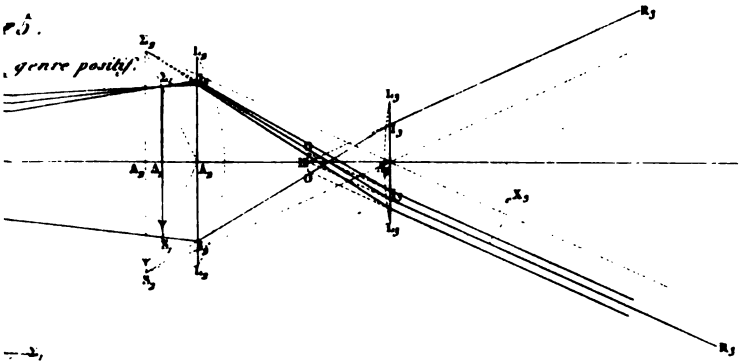
14.

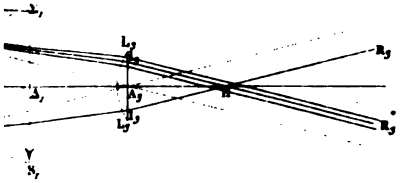
verres. du genre négatif.



15.

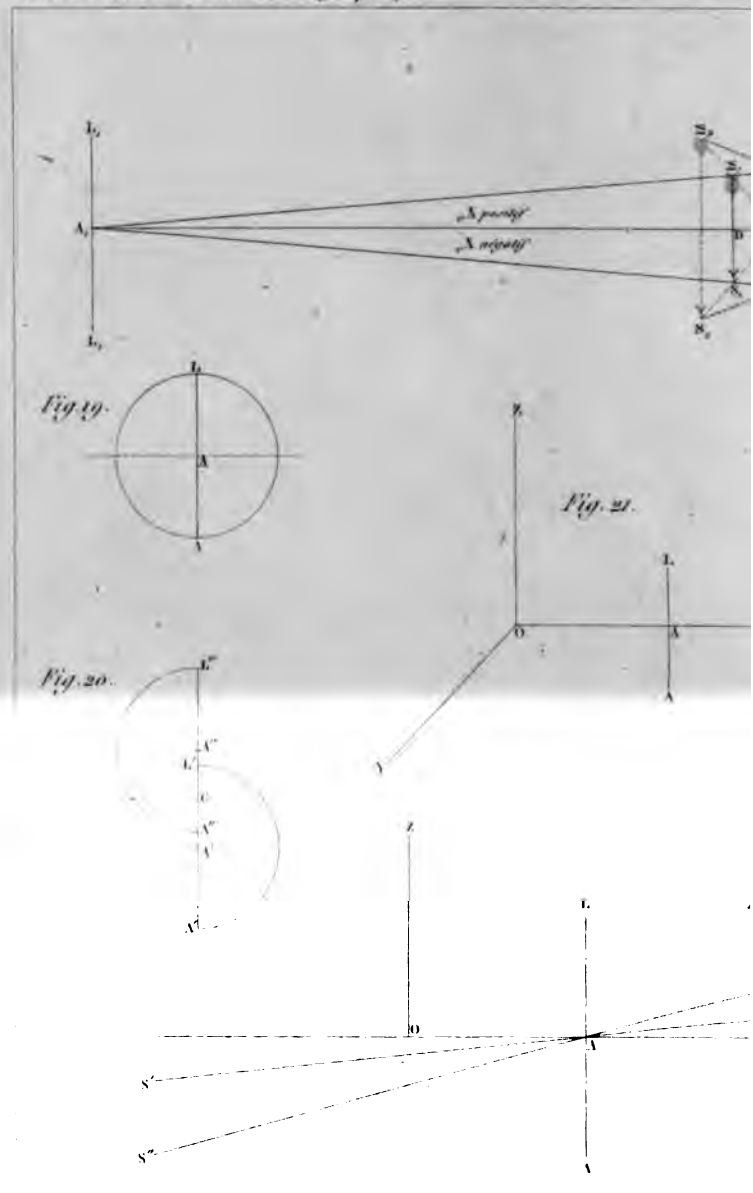
genre positif.



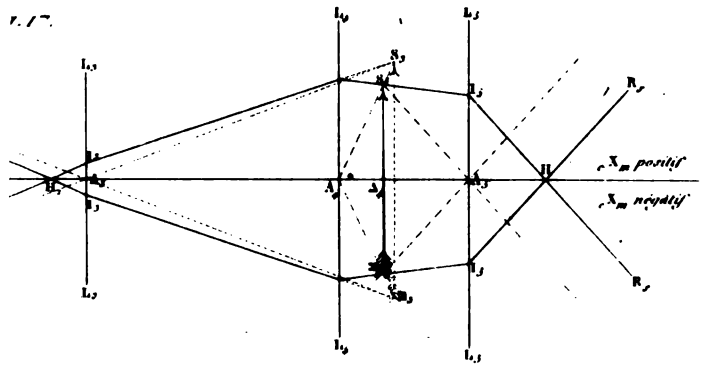


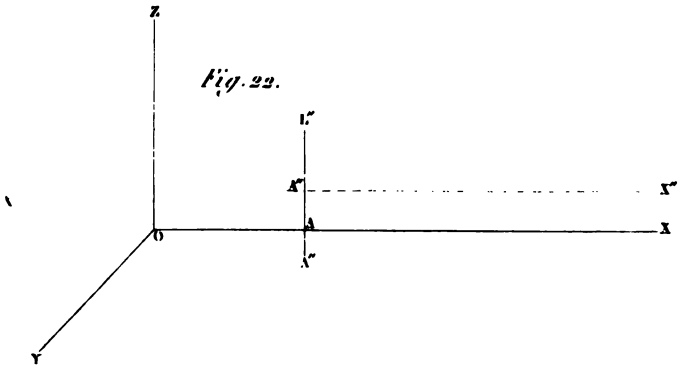
ire positif construction habituelle.

Traité élém. d'Astronomie Physique,



E. Wormser sc.


X_m positif
X_m négatif


Z
Fig. 22.
O
A
X
Y

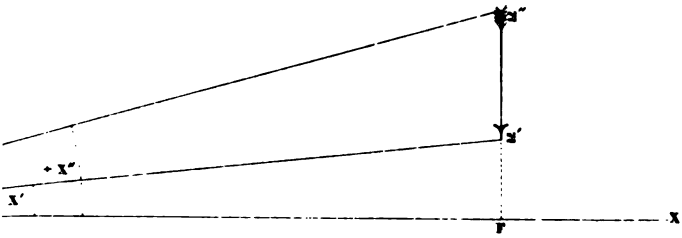
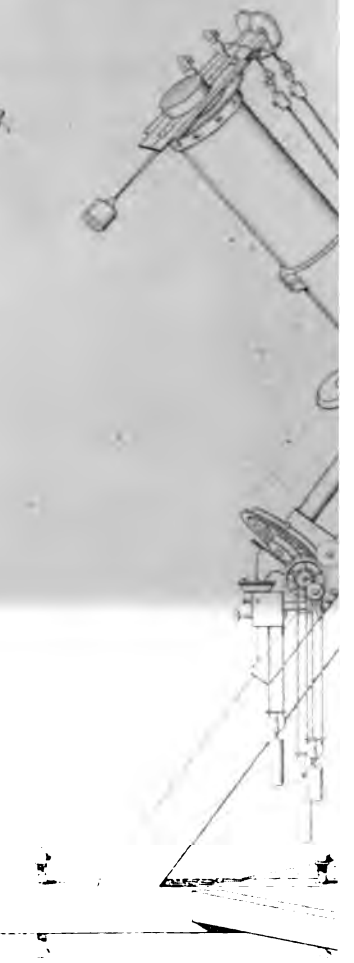

+X''
X'
F
X

Fig. 18.



L'Hermier sc.

Grand Heliomètre équatorial de Fraunhofer.

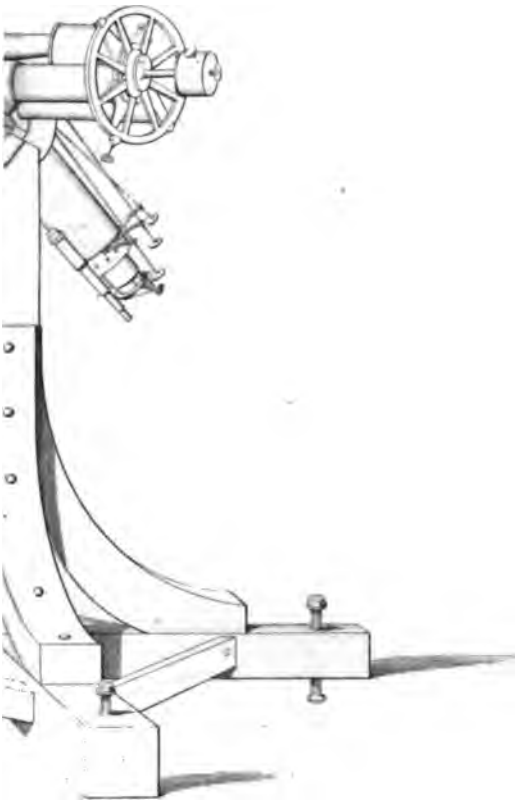


Fig. 24.

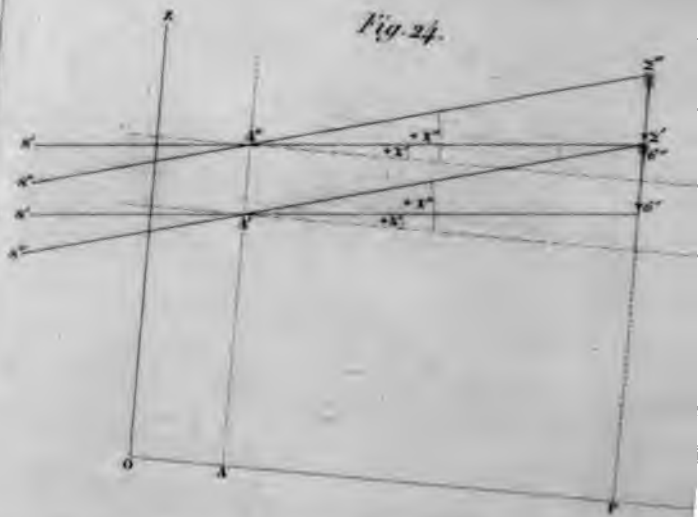
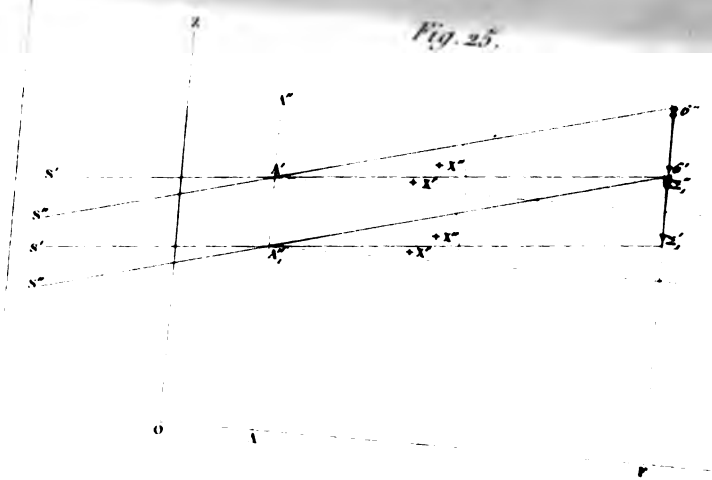


Fig. 25.



F. Marmier sc.

Fig. 24.

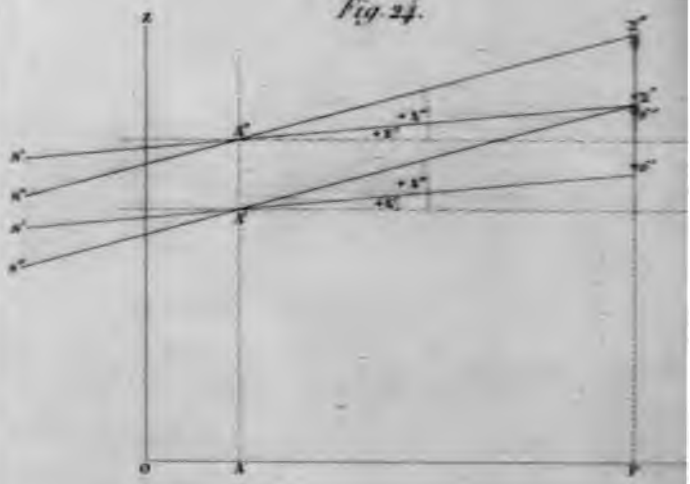
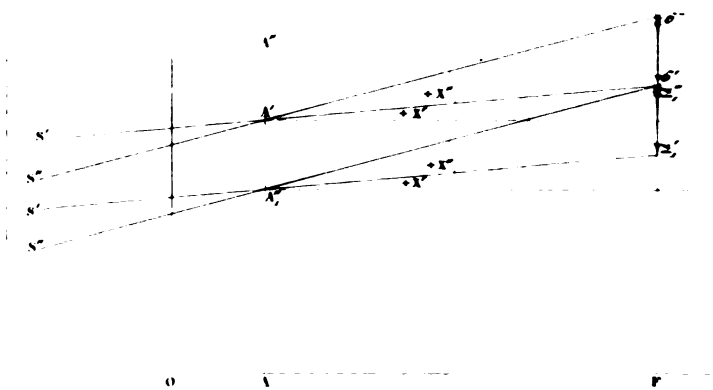


Fig. 25.



L'Homme sc.

Fig. 30.

Fig. 31.

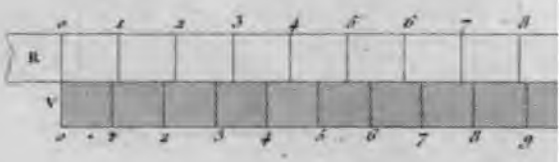


Fig. 32.

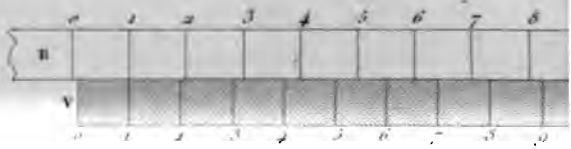


Fig. 33.

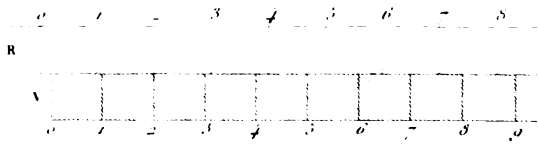
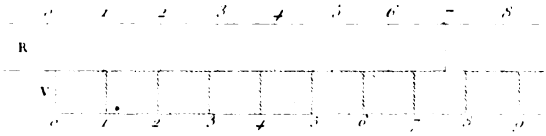


Fig. 34.



L. Bonnet s.

Fig. 35.

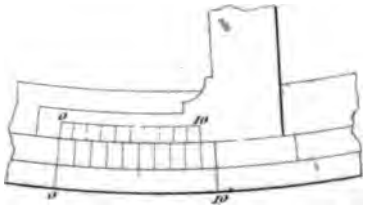


Fig. 36.

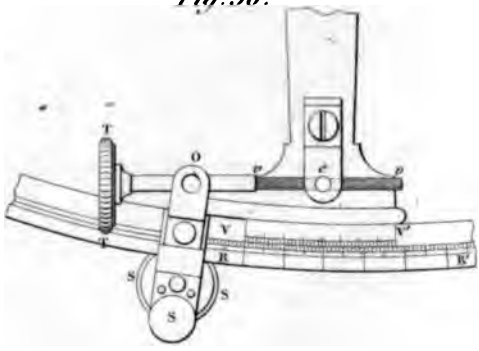


Fig. 37.

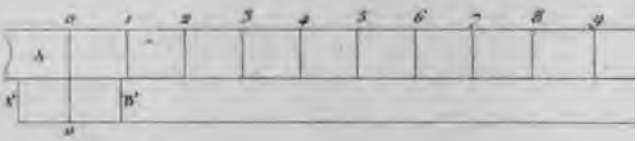


Fig. 38.

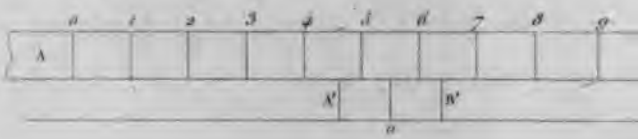


Fig. 39

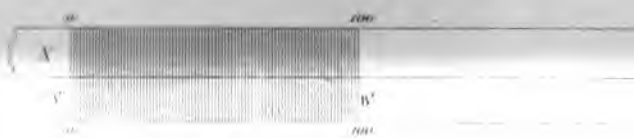


Fig. 40.

Fig. 46.

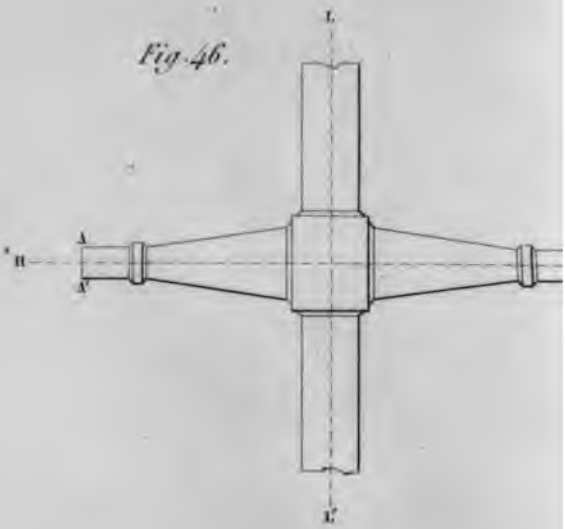
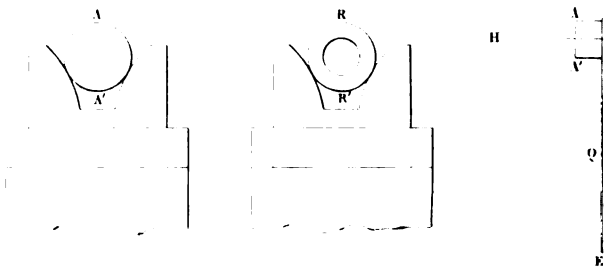


Fig. 48.



L. Rousseau sc.

Fig. 47.

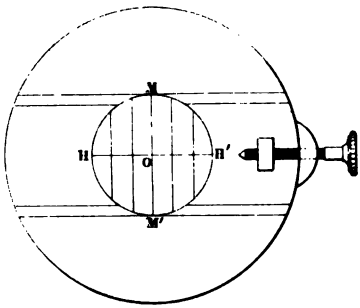


Fig. 49.

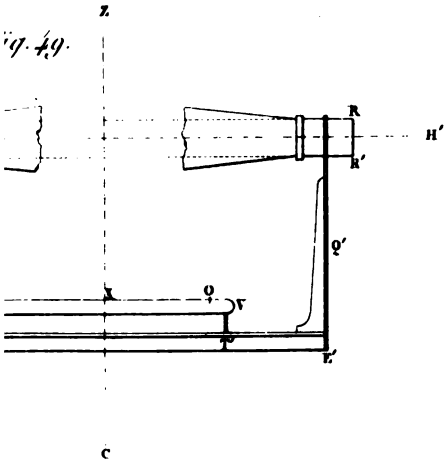


Fig. 50.

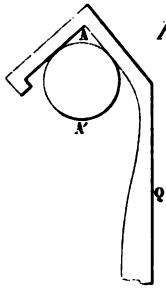
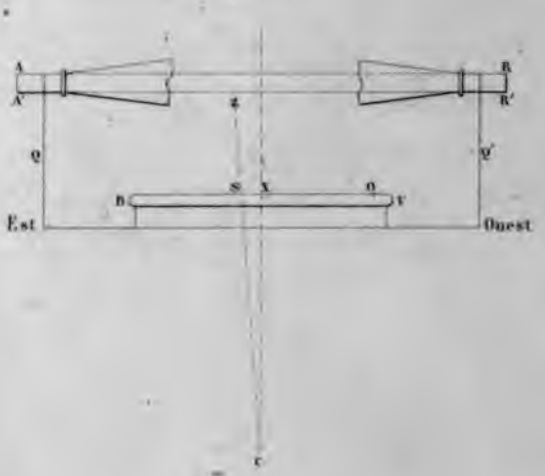


Fig. 51.



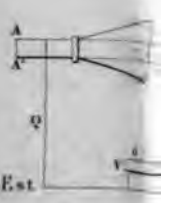


Fig. 56.

Fig. 54.

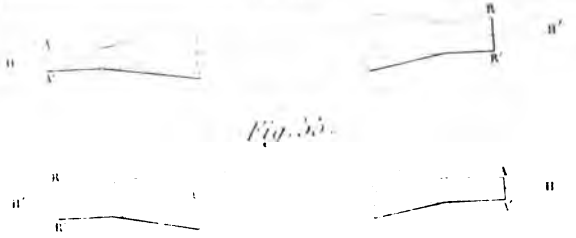


Fig. 55.

Fig. 52.

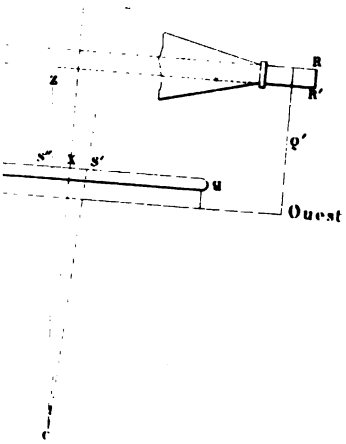


Fig. 53.

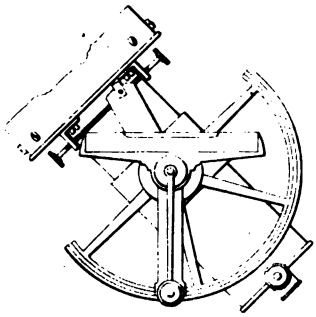


Fig. 57.

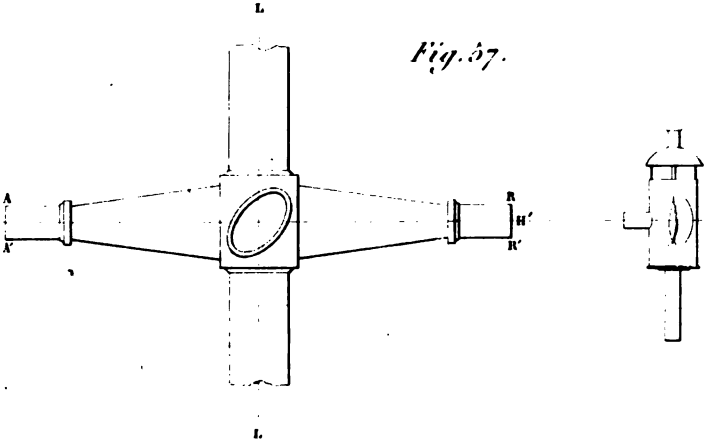


Fig. 58.

Fig. 59.

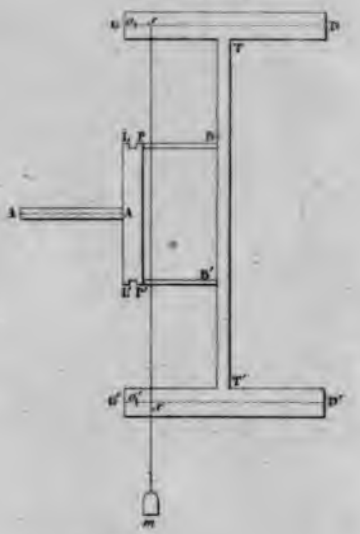


Fig. 62.

Fig. 63.

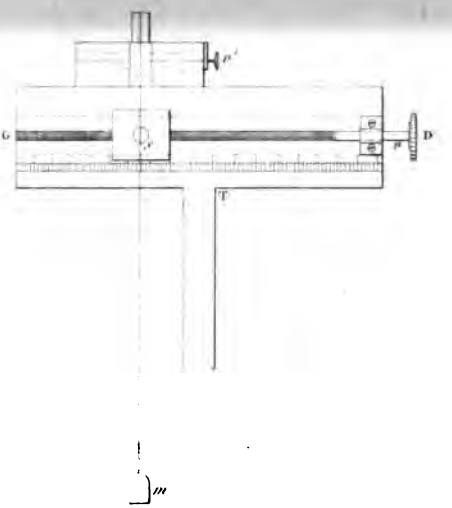


Fig. 60.

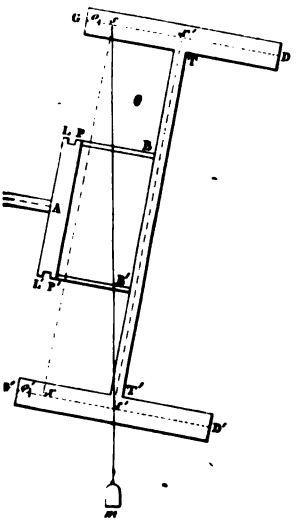


Fig. 61.

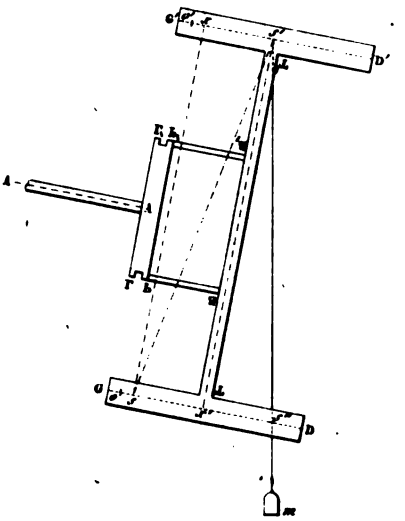


Fig. 64.

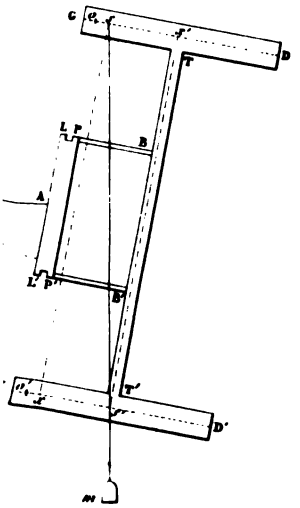


Fig. 65.

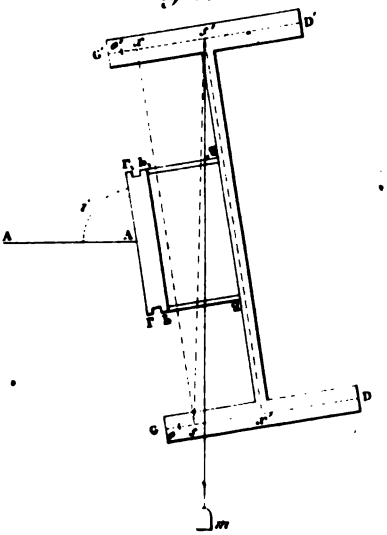


Fig. 66.

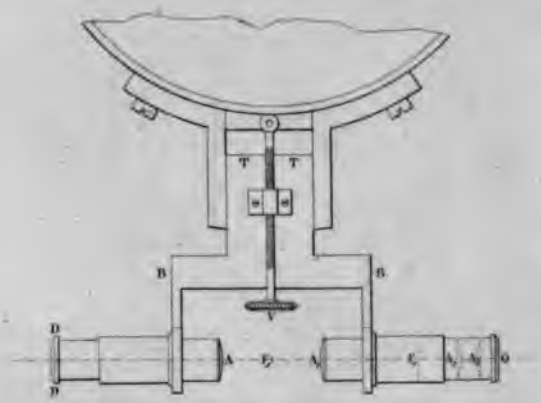
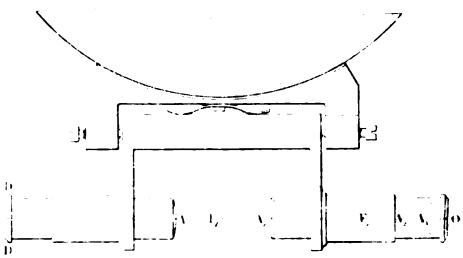


Fig. 67.



L. Bourmar sc.

Fig. 68

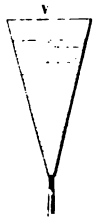


Fig. 69

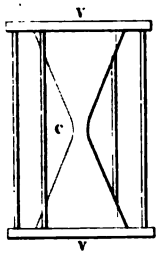


Fig. 70.

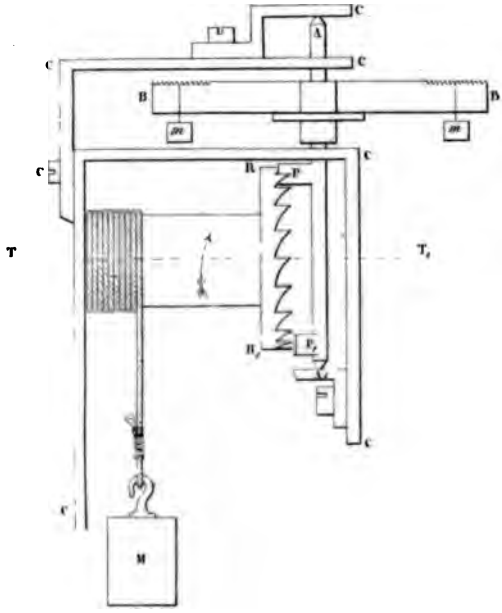
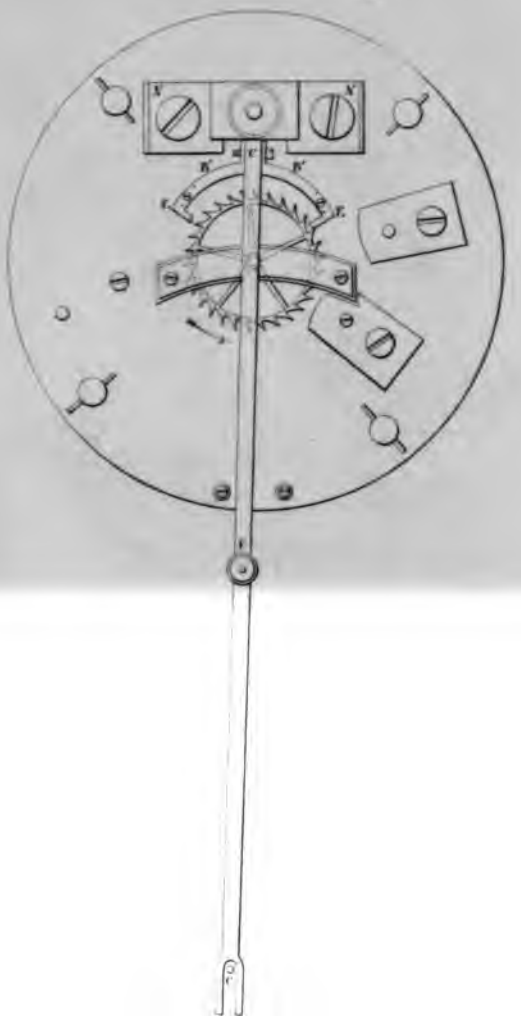


Fig. 71.



E. Hermier sc.

. 72.

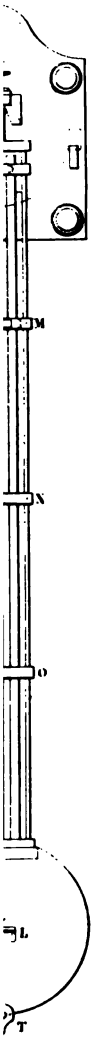
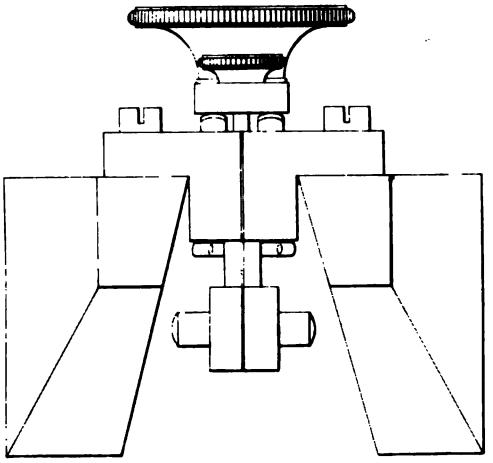
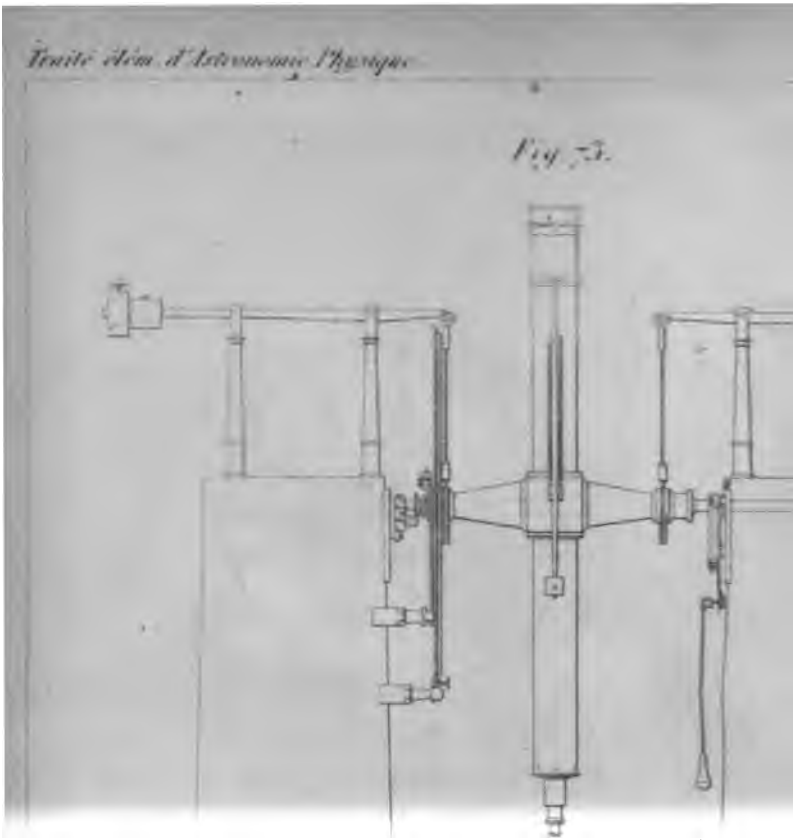


Fig. 72.



Détail de la suspension vue de face.


Traité élém. d'Astronomie Physique
Fig. 73.

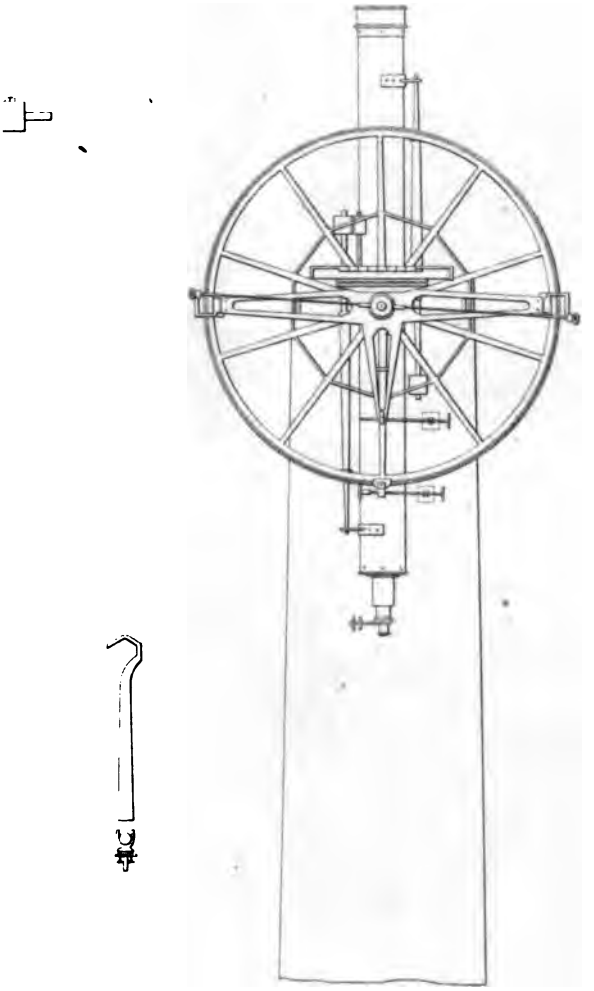


Fig. 74.

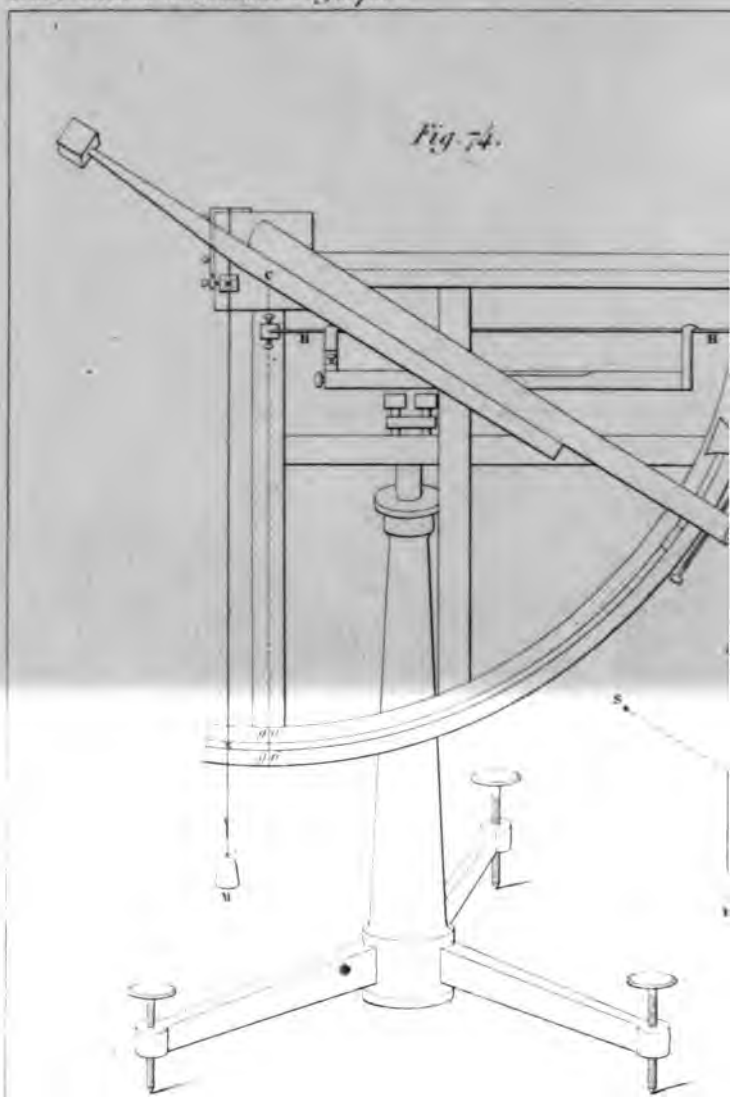


Fig. 77.

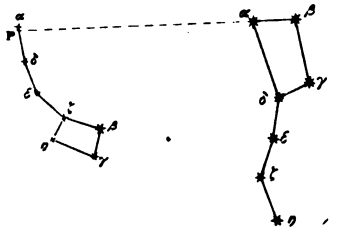


Fig. 82.

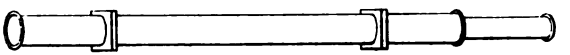


Fig. 78.

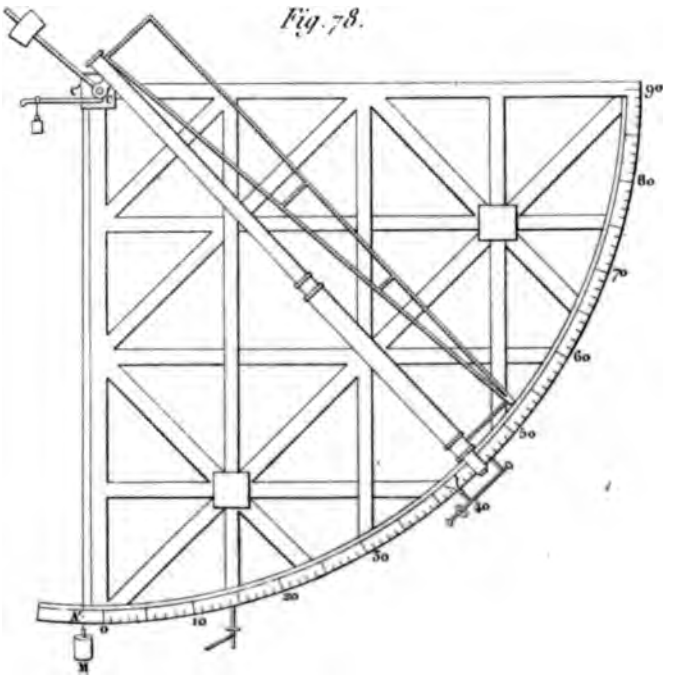
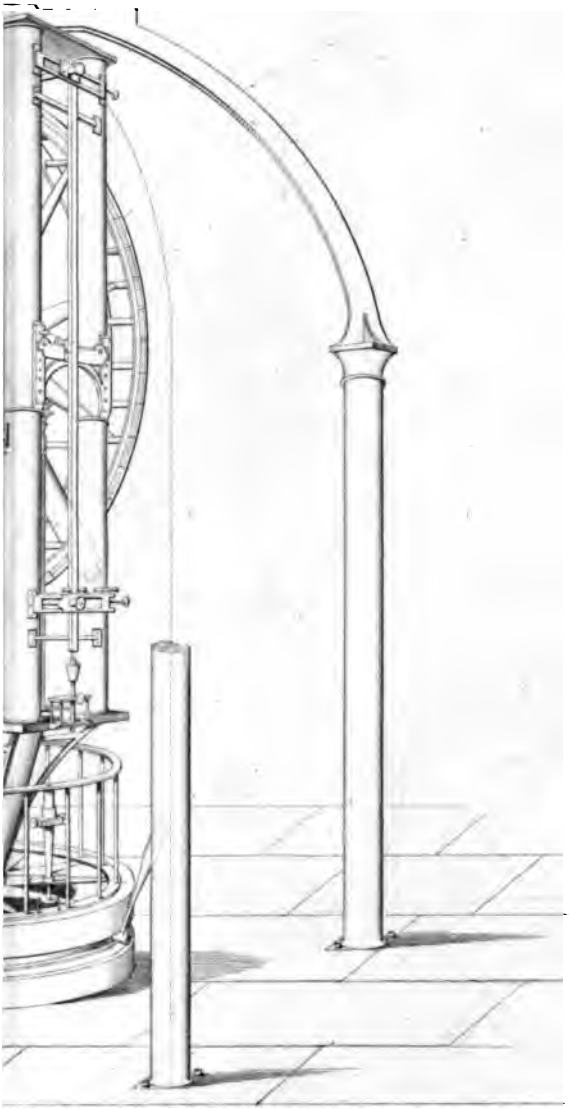


Fig. 76.

Mansor sc



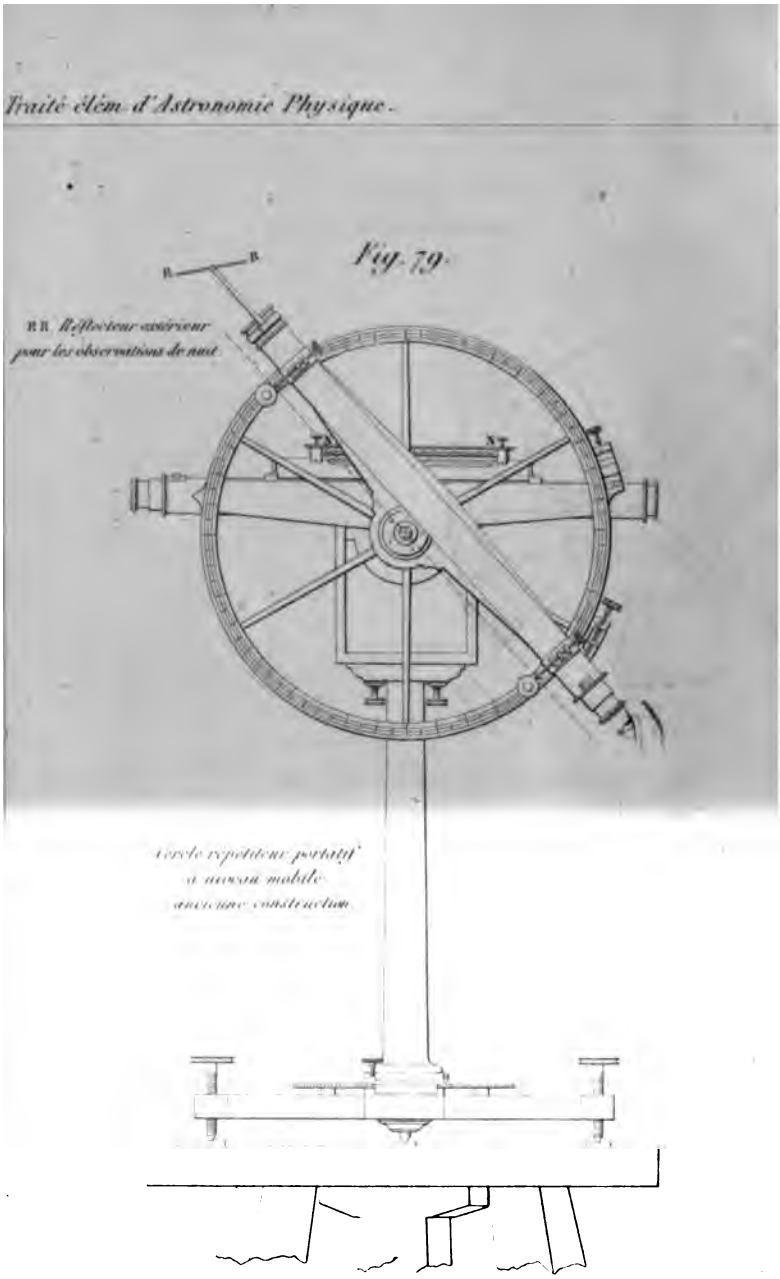


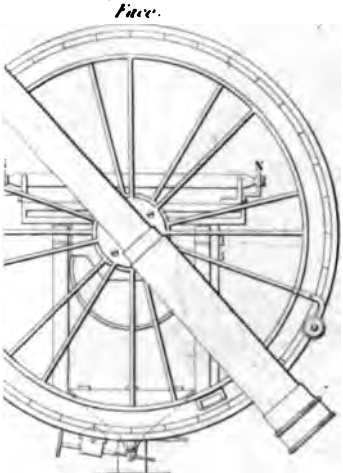
Fig. 79.
R R
R R. Réflecteur auxiliaire pour les observations de nuit.
Cercle répétiteur portatif à niveau mobile ancienne construction.

Cercle répétiteur portatif, à ni

construction de Mr Gam

Fig. 80.

Face.



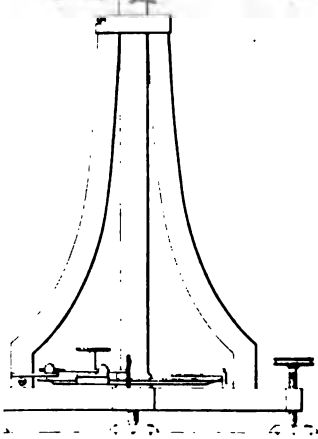


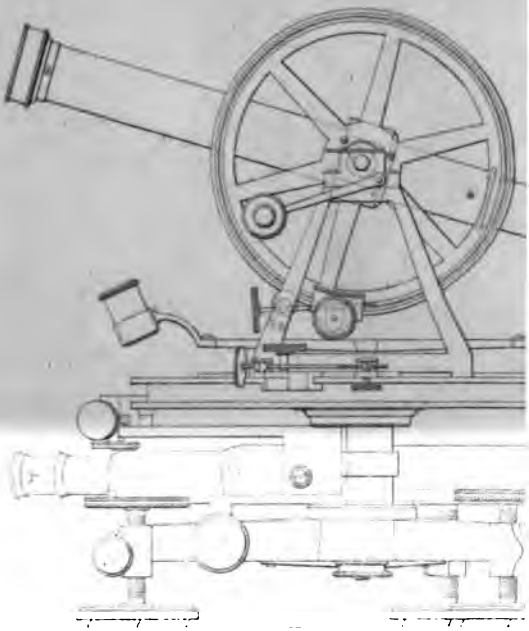
Fig. 80.

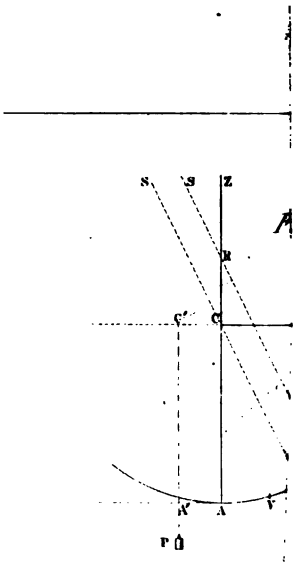
Pièce de rappel du grand niveau NN parallèle au limbe.

Fig. d

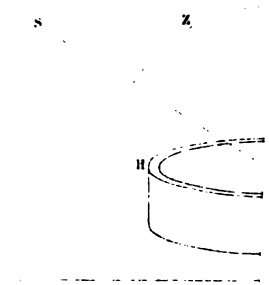
Le Theodolite.

Fig. 81.




S
S
Z
R
C'
C
A'
A
V
P

S
Z


S
Z
H

Traité élém

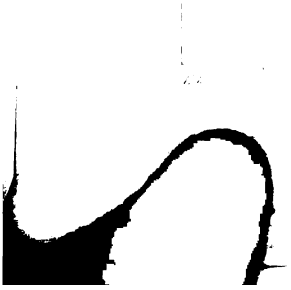
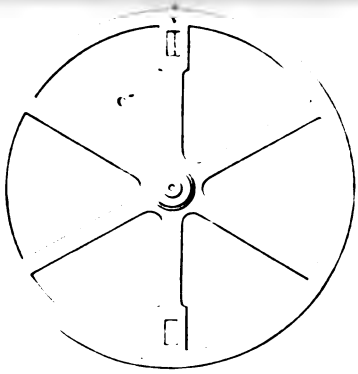


Fig. 86.

Fig. 8

Fig. 89.



E. Wanner

Fig. 88

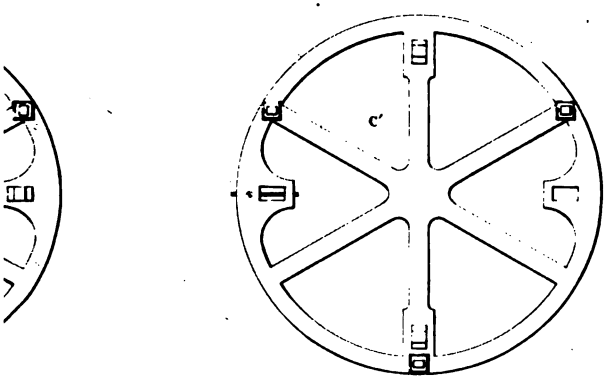


Fig. 90.

' du système des trois
des c, c', c'' superposés.

Fig. 92.

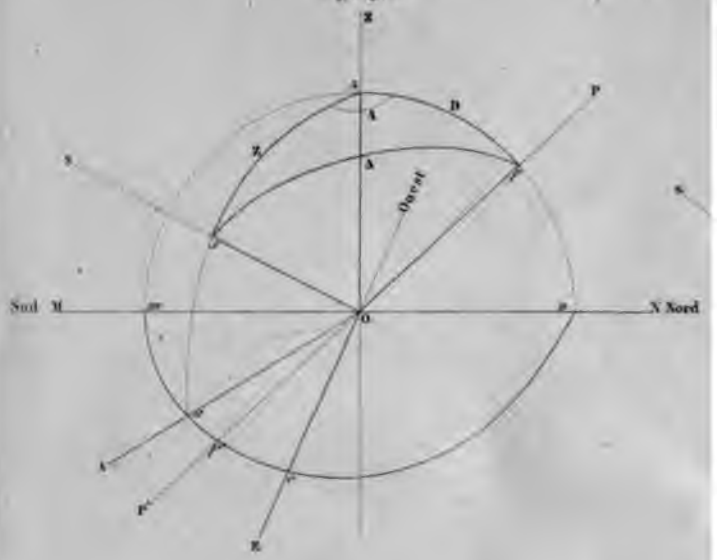


Fig. 91.

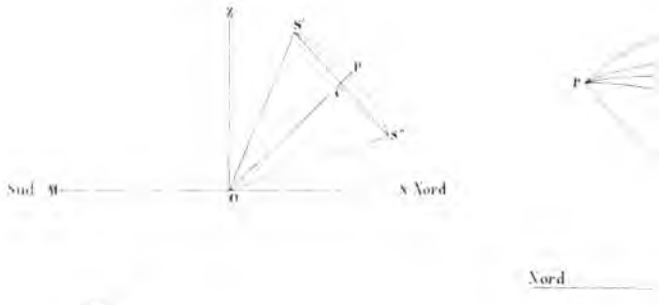


Fig. 93.

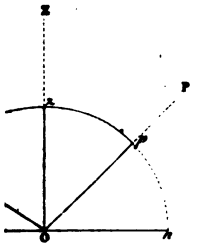


Fig. 94.

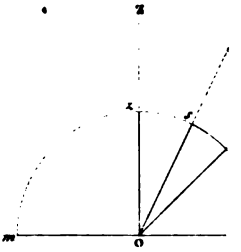
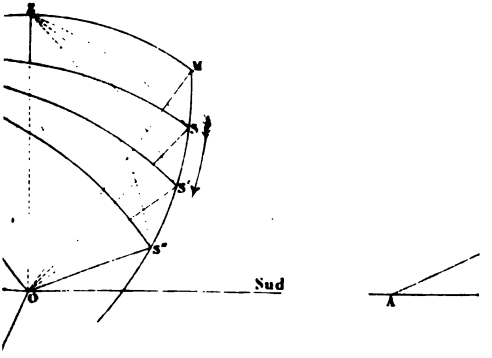


Fig. 96.

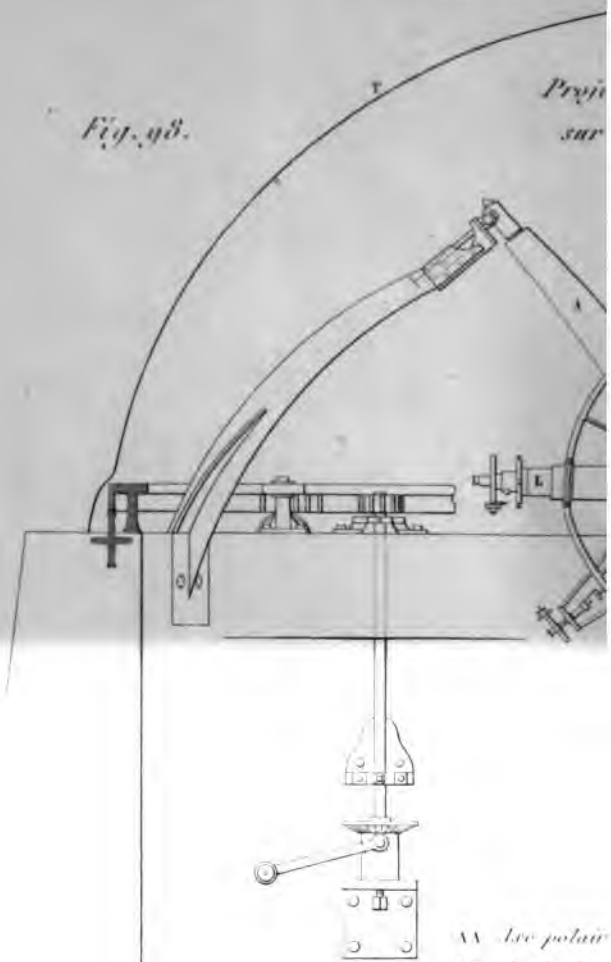


S
Sud N

Machine P

Fig. 98.

Proj
sur

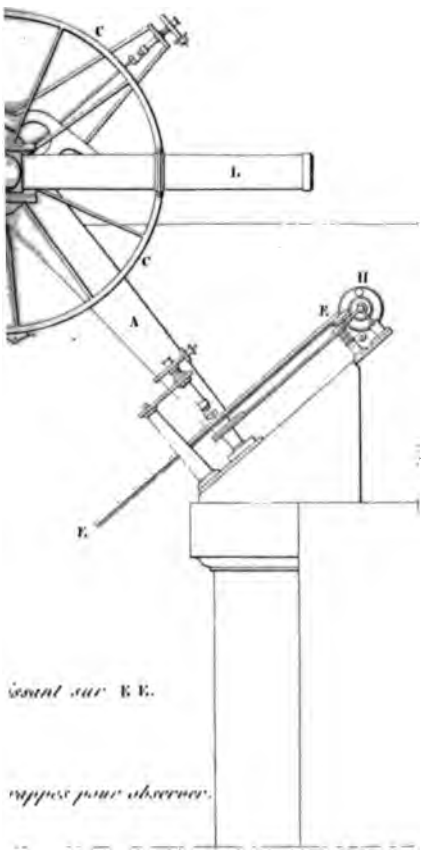


F. Wachsmuth sc.

de Mr. Gambey.

instrument

méridien.



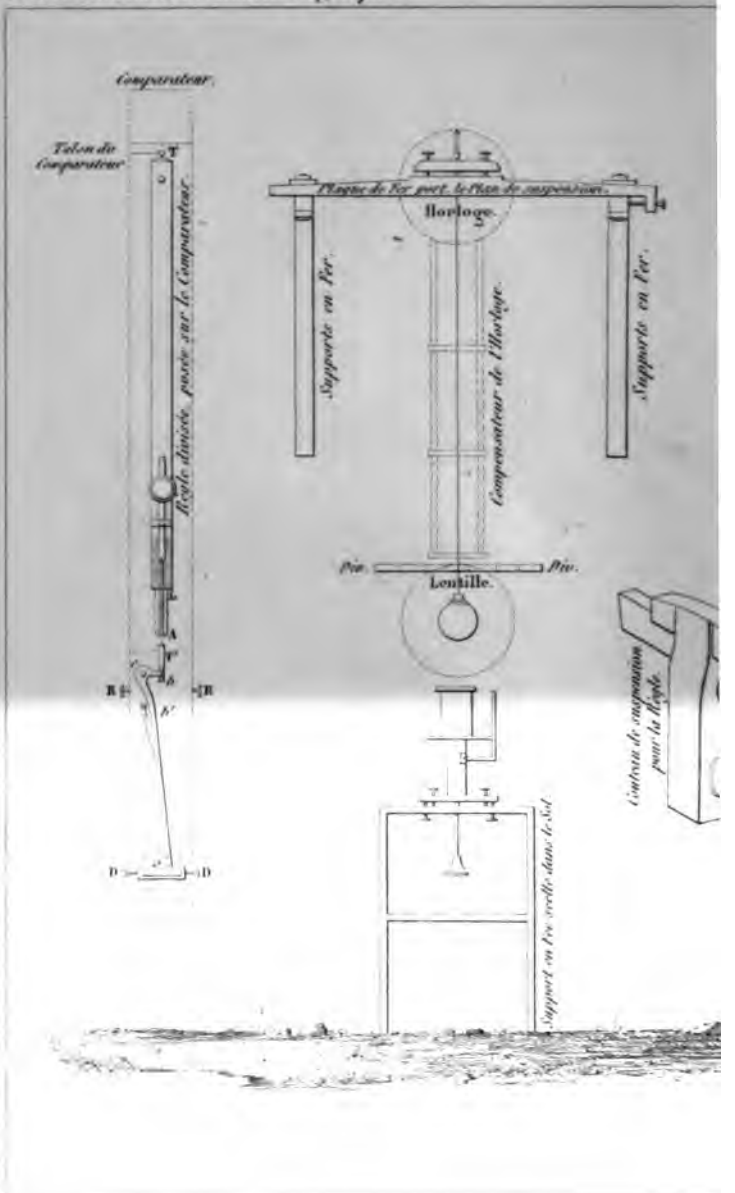
ésant sur E E.

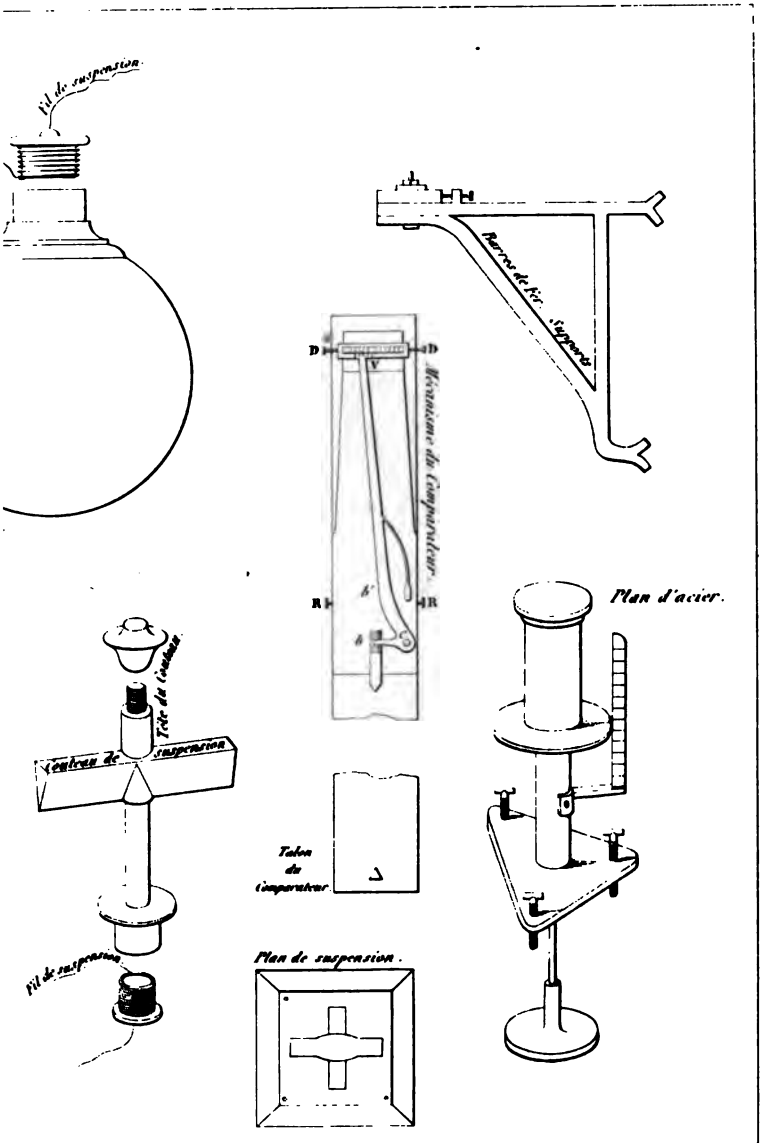
appos pour observer.

Z.

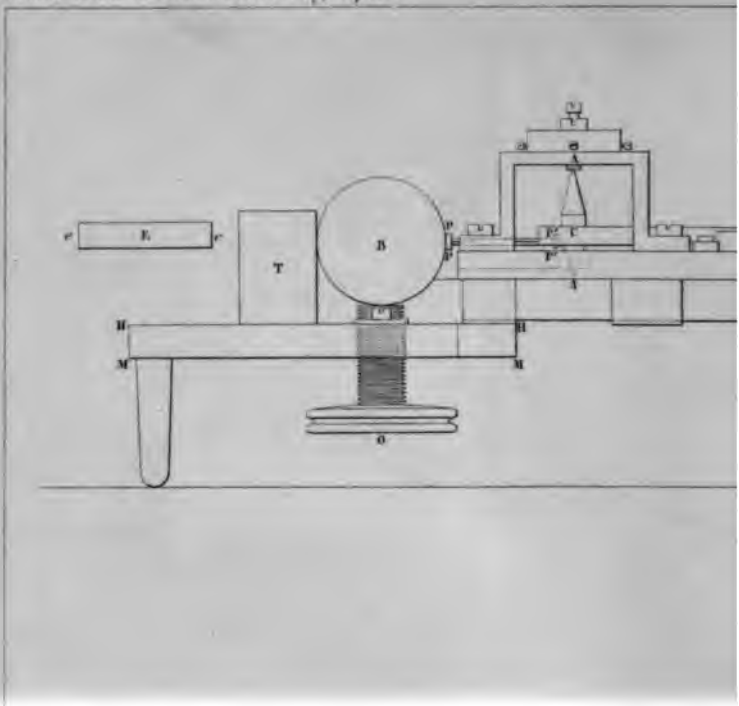
F. Wermuth

Traité élém. d'Astronomie Physique.

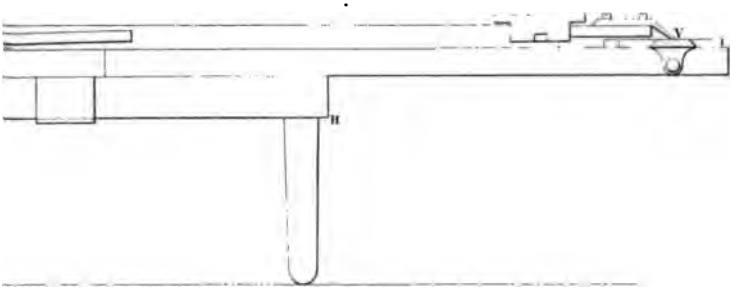


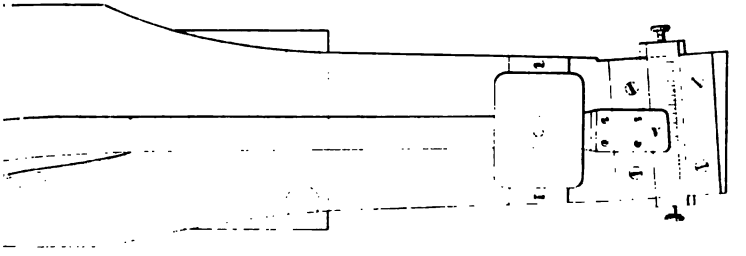

Fil de suspension.
Barre de fer supposée.
Montaison du Comparateur.
D
D
R
R
Plan d'acier.
Tête de l'enclume.
Centre de suspension.
Talon du comparateur.
Fil de suspension.
Plan de suspension.

Traité élém. d'Astronomie Physique.



L. Bramsen sc.





KM.